УДК 517.9

**В.В. СЕМЕНОВ**

# КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ МИНИМИЗАЦИИ[1]

**Ключевые слова**: *плотность, категория Бэра, разрешимость, минимизация, полунепрерывность, свойство Кадеца–Кли, векторная оптимизация.*

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть $(X,\rho)$ — метрическое пространство и $x \in X$. Напомним, что свойство $P(x)$ называется типичным, если множество $\{x \in X : P(x) \text{ выполняется}\} \subseteq X$ содержит счетное пересечение открытых плотных в $X$ подмножеств. Из теоремы Бэра о категории следует, что в полном метрическом пространстве произвольное множество, содержащее счетное пересечение открытых плотных подмножеств, является плотным. Такие множества часто называют массивными.

Пусть $B$ — замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства $(E,\|\cdot\|_E)$ такое, что $0 \in \operatorname{int} B$; $\mu_B : E \to \mathbb{R}$ — функционал Минковского множества $B$. Будем считать, что единичный замкнутый шар $B_1(E)$ является подмножеством $B$. Следовательно, существует такое число $M \geq 1$, что $B_1(E) \subseteq B \subseteq$ $\subseteq B_M(E) = \{x \in E : \|x\|_E \leq M\}$, и поэтому для $x \in E$: $\dfrac{1}{M}\|x\|_E \leq \mu_B(x) \leq \|x\|_E$. Поскольку множество $B$ может быть несимметричным, функционал $\mu_B$ в общем случае не является нормой.

Пусть $X \subseteq E$ — непустое множество. Для ограниченного снизу функционала $f : X \to \mathbb{R}$ и точки $y \in E$ рассмотрим задачу минимизации

$$f(x) + \mu_B(x-y) \to \inf_{x \in X}. \qquad (1)$$

Частным случаем (1) является задача наилучшего приближения: пусть $X$ — замкнутое подмножество банахова пространства $(E,\|\cdot\|_E)$, для $y \in E$ нужно найти точку $\bar{x} \in X$ такую, что $\|y-\bar{x}\|_E = \inf_{x \in X}\|y-x\|_E$.

Рассмотрим множество существования

$$E(X) = \{y \in E : \exists\, \bar{x} \in X \ \ \|y-\bar{x}\|_E = \inf_{x \in X}\|y-x\|_E\}.$$

Первой публикацией, посвященной категорным свойствам множества $E(X)$, является статья С.Б. Стечкина [1], где доказана массивность $E(X)$ для произвольного непустого замкнутого подмножества $X$ равномерно выпуклого банахова пространства. Эта работа положила начало интенсивным исследованиям категорных и плотностных свойств в теории наилучшего приближения [2]. В [3] результат С.Б. Стечкина обобщен на случай замкнутых подмножеств локально равномерно выпуклого рефлексивного пространства $E$. В [4] С. В. Конягин описал класс банаховых пространств, в которых $E(X)$ является множеством второй категории для произвольного замкнутого множества $X \subseteq E$. Это так называемые пространства Ефимова–Стечкина — рефлексивные пространства, в которых из слабой сходимости последовательности элементов сферы $S_1(E) = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$ к элементу из $S_1(E)$ следует сильная сходимость (условие Кадеца–Кли). В статье [5] рассмотрена задача поиска точек обобщенного наилучшего приближения. Отличие от класси-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГФФИ Украины, грант № 0108U010308.

ческой задачи состоит в использовании для оценки отклонения элементов функционала Минковского замкнутой выпуклой окрестности нуля банахова пространства. При некоторых геометрических предположениях (типа равномерной выпуклости) на окрестность, которая порождает функционал Минковского, авторы получили аналог упомянутого результата С.Б. Стечкина. Обобщению этого результата посвящены работы [6, 7].

Другое направление исследований связано с задачами минимизации функционалов с возмущениями типа нормы. Пусть $f$ — заданный на множестве $X$ функционал. В 1973 г. Ж. Баранже [8] обобщил результат С.Б. Стечкина, доказав типичность разрешимости задачи

$$f(x)+\|y-x\|_E \to \inf_{x\in X} \tag{2}$$

для замкнутого непустого подмножества $X$ равномерно выпуклого банахова пространства $E$ и ограниченного снизу полунепрерывного снизу функционала $f: X \to \mathbb{R}$. Обзор последних результатов, связанных с категорными свойствами разрешимости задачи (2), приведен в [9].

Цель данной работы — получить результаты о типичности разрешимости для задачи (1) при условиях, близких к предположениям работ [3, 4] и более слабых, чем в [5]. Рассмотрим также приложение этих результатов к задачам оптимизации линейных систем с векторным критерием качества.

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ: ТЕОРЕМА О ТИПИЧНОСТИ РАЗРЕШИМОСТИ

Напомним одно геометрическое понятие [6, 7, 10].

**Определение 1.** Будем говорить, что множество $B\subseteq E$ имеет свойство Кадеца–Кли, если для произвольной последовательности точек $x_n \in B$ из условий $\mu_B(x_n)=1$ и $x_n \to x$ слабо в $E$, $\mu_B(x)=1$ следует $\|x_n - x\|_E \to 0$.

Если $B=B_1(E)$, то оперируем известным свойством Кадеца–Кли банахова пространства [11].

Сформулируем основной результат.

**Теорема 1**. Пусть $(E,\|\cdot\|_E)$ — рефлексивное банахово пространство; $B\subseteq E$ — замкнутая ограниченная выпуклая окрестность нуля, которая имеет свойство Кадеца–Кли; $X$ — непустое замкнутое подмножество пространства $E$; функционал $f: X \to \mathbb{R}$ ограничен снизу и полунепрерывен снизу. Тогда множество точек $y\in E$ таких, что задача

$$f(x)+\mu_B(x-y)\to \inf_{x\in X} \tag{3}$$

имеет решение, содержит плотное в $E\setminus X$ подмножество типа $G_\delta$.

**Доказательство**. Разобьем доказательство теоремы 1 на несколько шагов-лемм.

Для точки $y\in E$ определим

$$r(y)=\inf_{x\in X}(f(x)+\mu_B(x-y)). \tag{4}$$

Изучим свойства функционала $r: E\to\mathbb{R}$, определенного с помощью (4).

**Лемма 1**. Функционал $y\mapsto r(y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1.

**Доказательство**. Для произвольных точек $y_1, y_2 \in E$ и $x\in X$ имеем

$$r(y_1)\le f(x)+\mu_B(x-y_1)\le f(x)+\mu_B(x-y_2)+\mu_B(y_2-y_1).$$

Перейдя к инфимуму по $x\in X$ в правой части неравенства, получим

$$r(y_1)\le r(y_2)+\mu_B(y_2-y_1).$$

Поскольку $B_1(E) \subseteq B$, имеем $\mu_B(y) \le \|y\|_E$ для всех $y \in E$. Следовательно,

$$r(y_1) \le r(y_2) + \|y_2 - y_1\|_E \text{ или } r(y_1) - r(y_2) \le \|y_2 - y_1\|_E.$$

Изменив порядок $y_1$ и $y_2$, получим $|r(y_1) - r(y_2)| \le \|y_2 - y_1\|_E$.

Рассмотрим произвольный функционал $\phi : E \to \mathbb{R}$. Функционал $y^* \in E^*$ называют локально $\varepsilon$-опорным для $\phi$ в точке $y \in E$, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\phi(y') - \phi(y) \ge \left\langle y^*, y' - y \right\rangle_{E^*, E} - \varepsilon \|y' - y\|_E$$

для всех $y' \in E : \|y' - y\|_E < \delta$ [12, 13].

В работе [12] И. Экланд и Ж. Лебур доказали, что для произвольного $\varepsilon > 0$ полунепрерывный снизу функционал, заданный на рефлексивном банаховом пространстве $E$, имеет локальные $\varepsilon$-опорные функционалы на плотном в $E$ подмножестве. Значит, для $y \mapsto r(y)$ множество существования локально $\varepsilon$-опорных функционалов плотно в $E$.

**Лемма 2.** Пусть $y^* \in E^*$ — локально $\varepsilon$-опорный функционал для $r$ в точке $y \in E \setminus X$. Тогда

$$1 - M\varepsilon \le \sup_{-B} y^* \le 1 + M\varepsilon. \tag{5}$$

**Доказательство**. Из определения локально $\varepsilon$-опорного функционала получаем

$$\frac{r(y') - r(y)}{\mu_{-B}(y' - y)} \ge \left\langle y^*, \frac{y' - y}{\mu_{-B}(y' - y)} \right\rangle_{E^*, E} - \varepsilon \frac{\|y' - y\|_E}{\mu_{-B}(y' - y)} \tag{6}$$

для всех $y' \in E : \|y' - y\|_E < \delta$. Левая часть (6) не превышает 1, поэтому, учитывая неравенство $\|\cdot\|_E / \mu_{-B}(\cdot) \le M$, имеем $\sup_{-B} y^* \le 1 + M\varepsilon$.

Докажем оценку снизу в (5). Снова из определения локально $\varepsilon$-опорного функционала для $y' \in E : \|y' - y\|_E < \delta$ получим неравенство

$$\sup_{-B} y^* \ge \left\langle y^*, \frac{y - y'}{\mu_{-B}(y - y')} \right\rangle_{E^*, E} \ge$$

$$\ge \frac{r(y) - r(y')}{\mu_{-B}(y - y')} - \varepsilon \frac{\|y - y'\|_E}{\mu_{-B}(y - y')} \ge \frac{r(y) - r(y')}{\mu_{-B}(y - y')} - M\varepsilon .$$

Построим последовательность $(y'_n)$ такую, что $y'_n \to y$ и $\dfrac{r(y) - r(y'_n)}{\mu_{-B}(y - y'_n)} \to 1$.

Рассмотрим последовательность точек $x_n \in X$ таких, что

$$0 \le f(x_n) + \mu_B(x_n - y) - r(y) < \frac{1}{n^2}.$$

Положим

$$y'_n = y + t_n(x_n - y), \; t_n = \frac{1}{n\mu_B(x_n - y)}.$$

Ясно, что $\|y'_n - y\|_E \le M\mu_B(y'_n - y) = \dfrac{M}{n} \to 0$. Для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем $t_n \in (0,1)$,

$$r(y) - r(y'_n) \ge r(y) - \{f(x_n) + \mu_B(x_n - y'_n)\} = r(y) - \{f(x_n) + (1 - t_n)\mu_B(x_n - y)\} =$$

$$= t_n \mu_B(x_n - y) - \{f(x_n) + \mu_B(x_n - y) - r(y)\} .$$

Следовательно,

$$1 \geq \frac{r(y)-r(y'_n)}{\mu_{-B}(y-y'_n)} > \frac{t_n\mu_B(x_n-y)-\{f(x_n)+\mu_B(x_n-y)-r(y)\}}{\mu_{-B}(y-y'_n)} =$$

$$= \frac{t_n\mu_B(x_n-y)-\{f(x_n)+\mu_B(x_n-y)-r(y)\}}{t_n\mu_B(x_n-y)} = 1-\frac{f(x_n)+\mu_B(x_n-y)-r(y)}{t_n\mu_B(x_n-y)} =$$

$$= 1-n(f(x_n)+\mu_B(x_n-y)-r(y)) > 1-\frac{1}{n},$$

что и требовалось.

Функционал $f$ ограничен снизу на $X$ некоторым числом $c \in \mathbb{R}$. Имеем

$$f(x)-c \geq 0, \; x \in X,$$

$$\inf_{x\in X}(f(x)-c+\mu_B(x-y)) = \inf_{x\in X}(f(x)+\mu_B(x-y))-c.$$

Поэтому можем считать, что $f(x) \geq 0$ для $x \in X$.

Для $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим множество $G_\varepsilon$ всех точек $y \in E \setminus X$, для которых существуют $y^* \in E^*$ и $\delta > 0$ такие, что

$$1-M\varepsilon \leq \sup\nolimits_{-B} y^* \leq 1+M\varepsilon,$$

$$\inf\{f(x)+\langle y^*, y-x\rangle_{E^*,E} : x \in X, \; f(x)+\mu_B(x-y) \leq r(y)+\delta\} > (1-\varepsilon)\,r(y).$$

**Лемма 3.** Для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ множество $G_\varepsilon$ плотно в $E \setminus X$.

**Доказательство**. Сначала покажем, что если $\varepsilon \in (0,1/2M)$ и $y^* \in E^*$ — локально $\varepsilon$-опорный функционал для $r$ в точке $y \in E \setminus X$, то $y \in G_{2M\varepsilon}$. Пусть $\delta' \in (0,1)$ такое, что

$$r(y')-r(y) \geq \left\langle y^*, y'-y\right\rangle_{E^*,E} - \varepsilon\|y'-y\|_E \tag{7}$$

для всех $y' \in E$: $\|y'-y\|_E < \delta'$. Выберем число $\alpha \in (0,1)$ так, чтобы $M\alpha r(y) < \frac{1}{2}$.

Положим

$$\delta = \frac{\varepsilon\delta' M\alpha r(y)}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Если $x \in X$ удовлетворяет неравенству

$$f(x)+\mu_B(x-y) \leq r(y)+\delta, \tag{8}$$

то $M\alpha\delta'\mu_B(x-y) \leq M\alpha\delta'(r(y)+\delta) < \delta'$.

Положим $y' = y+\alpha\delta'(x-y)$. Тогда для $y'-y = \alpha\delta'(x-y)$ имеем

$$\|y'-y\|_E \leq M\mu_B(y'-y) = M\alpha\delta'\mu_B(x-y) < \delta'.$$

Подставив $y' = y+\alpha\delta'(x-y)$ в (7), с учетом (8) имеем

$$\left\langle y^*, y'-y\right\rangle_{E^*,E} - \varepsilon\|y'-y\|_E = \alpha\delta'\left\langle y^*, x-y\right\rangle_{E^*,E} - \varepsilon\alpha\delta'\|x-y\|_E \leq$$

$$\leq r(y+\alpha\delta'(x-y))-r(y) \leq$$

$$\leq f(x)+(1-\alpha\delta')\mu_B(x-y)-f(x)-\mu_B(x-y)+\delta = -\alpha\delta'\mu_B(x-y)+\delta.$$

Поделив это неравенство на $\alpha\delta' > 0$, получим

$$\left\langle y^*,\, x-y\right\rangle_{E^*,E} \le -\mu_B(x-y)+\varepsilon\|x-y\|_E+\frac{\delta}{\alpha\delta'} \le (-1+M\varepsilon)\mu_B(x-y)+\frac{M\varepsilon}{2}r(y)\,.$$

Отсюда приходим к оценке

$$f(x)+\left\langle y^*,\, y-x\right\rangle_{E^*,E} \ge f(x)+(1-M\varepsilon)\mu_B(x-y)-\frac{M\varepsilon}{2}r(y)=$$

$$=(1-M\varepsilon)(f(x)+\mu_B(x-y))+\underbrace{M\varepsilon f(x)}_{\ge 0}-\frac{M\varepsilon}{2}r(y)\ge\left(1-\frac{3M\varepsilon}{2}\right)r(y)\,.$$

Таким образом, имеем

$$\inf\left\{f(x)+\left\langle y^*,\, y-x\right\rangle_{E^*,E}:\ x\in X,\ f(x)+\mu_B(x-y)\le r(y)+\delta\right\}\ge$$

$$\ge\left(1-\frac{3M\varepsilon}{2}\right)r(y)>(1-2M\varepsilon)r(y)\,,$$

т.е. $y\in G_{2M\varepsilon}$.

Утверждение леммы следует из плотности в $E\setminus X$ множества существования локально $\varepsilon$-опорных функционалов для $r$. Действительно, пусть $y'\in E\setminus X$ и $\delta_0>0$. Тогда существует точка $y\in E\setminus X$ такая, что $\|y'-y\|_E<\delta_0$ и в точке $y$ функционал $r$ имеет локально $\dfrac{\varepsilon}{2M}$-опорный функционал. Таким образом, $y\in G_\varepsilon$.

**Лемма 4.** Множество $G_\varepsilon$ открыто в $E$.

**Доказательство**. Пусть $y\in G_\varepsilon$. Обозначим

$$M_{y,\delta}=\inf\left\{f(x)+\left\langle y^*,\, y-x\right\rangle_{E^*,E}:\ x\in X,\ f(x)+\mu_B(x-y)\le r(y)+\delta\right\},$$

где $y^*\in E^*$, $\delta>0$ — функционал и число такие, что

$$1-M\varepsilon\le\sup\nolimits_{-B}y^*\le 1+M\varepsilon,\ M_{y,\delta}>(1-\varepsilon)r(y)\,.$$

Выберем такое $\lambda>0$, что

$$\lambda<\frac{\delta}{3},\ \lambda<\frac{\alpha}{2\varepsilon(M-1)},$$

$$2\lambda\sup\nolimits_{-B}y^*\le\alpha\,, \tag{9}$$

где $2\alpha=M_{y,\delta}-(1-\varepsilon)r(y)>0$.

Покажем, что для произвольного $y'\in B_\lambda(y)=\{\widetilde{y}\in E:\|\widetilde{y}-y\|_E\le\lambda\}$ выполняется неравенство

$$\inf\left\{f(x)+\left\langle y^*,\, y'-x\right\rangle_{E^*,E}:\ x\in X,\ f(x)+\mu_B(x-y')\le r(y')+\lambda\right\}>(1-\varepsilon)r(y')\,,$$

т.е. $B_\lambda(y)\subseteq G_\varepsilon$. Если $\|y'-y\|_E<\lambda$, $f(x)+\mu_B(x-y')\le r(y')+\lambda$ $(x\in X)$, то

$$f(x)+\mu_B(x-y)\le f(x)+\mu_B(x-y')+\mu_B(y'-y)\le r(y')+\lambda+\|y'-y\|_E\le$$

$$\le r(y)+2\lambda+r(y')-r(y)\le r(y)+2\lambda+\|y'-y\|_E\le r(y)+3\lambda\le r(y)+\delta.$$

Отсюда для точек $x$ следует $f(x)+\left\langle y^*,\, y-x\right\rangle_{E^*,E}\ge M_{y,\delta}$. Из неравенства (9) получим $2\lambda\sup_{-B}y^*\le f(x)+\left\langle y^*,\, y-x\right\rangle_{E^*,E}-M_{y,\delta}+\alpha$. Для выражения $f(x)+$ $+\left\langle y^*,\, y'-x\right\rangle_{E^*,E}$ имеем ряд оценок снизу:

$$f(x)+\left\langle y^{*},\, y'-x\right\rangle_{E^{*},E}=f(x)+\left\langle y^{*},\, y-x\right\rangle_{E^{*},E}+\left\langle y^{*},\, y'-x\right\rangle_{E^{*},E}\geq$$

$$\geq 2\lambda\sup\nolimits_{-B}y^{*}+M_{y,\delta}-\alpha+\left\langle y^{*},\, y'-x\right\rangle_{E^{*},E}\geq$$

$$\geq\lambda\sup\nolimits_{-B}y^{*}+M_{y,\delta}-\alpha\geq\lambda\sup\nolimits_{-B}y^{*}+\alpha+(1-\varepsilon)r(y)=$$

$$=\alpha+(1-\varepsilon)r(y')+\lambda\sup\nolimits_{-B}y^{*}+(1-\varepsilon)(r(y)-r(y'))\geq$$

$$\geq\alpha+(1-\varepsilon)r(y')+\lambda\sup\nolimits_{-B}y^{*}-(1-\varepsilon)\|y-y'\|_{E}\geq$$

$$\geq\alpha+(1-\varepsilon)r(y')+\lambda\sup\nolimits_{-B}y^{*}-(1-\varepsilon)\lambda=$$

$$=\alpha+(1-\varepsilon)r(y')+\lambda\,\{\sup\nolimits_{-B}y^{*}-1+M\varepsilon\}-\lambda\varepsilon\{M-1\}\geq$$

$$\geq\left\{\frac{\alpha}{2}-\lambda\varepsilon\{M-1\}\right\}+\frac{\alpha}{2}+(1-\varepsilon)r(y')>\frac{\alpha}{2}+(1-\varepsilon)r(y')\,.$$

Отсюда получим

$$\inf\left\{f(x)+\left\langle y^{*},\, y'-x\right\rangle_{E^{*},E}:\ x\in X,\ f(x)+\mu_{B}(x-y')\leq r(y')+\lambda\right\}\geq$$

$$\geq\frac{\alpha}{2}+(1-\varepsilon)r(y')>(1-\varepsilon)r(y')\,.$$

Таким образом, $y'\subseteq G_{\varepsilon}$.

Положим $G=\bigcap\limits_{n=2}^{\infty}G_{1/n}$. Из леммы 4 вытекает, что множество $G$ имеет тип $G_{\delta}$, а из леммы 3 и теоремы Бэра о категории следует его плотность в $E\setminus X$.

Теорема 1 вытекает из следующей заключительной леммы.

**Лемма 5.** Если $y\in G$, то существует $\bar{x}\in X$:

$$f(\bar{x})+\mu_{B}(\bar{x}-y)=\min\nolimits_{x\in X}\{f(x)+\mu_{B}(x-y)\}.$$

**Доказательство**. Пусть $y\in G$. Тогда существуют $y_{n}^{*}\in E^{*}$, $\delta_{n}>0$ такие, что

$$1-\frac{M}{n}\leq\sup\nolimits_{-B}y_{n}^{*}\leq 1+\frac{M}{n},\ \ f(x)+\left\langle y_{n}^{*},\, y-x\right\rangle_{E^{*},E}>\left(1-\frac{1}{n}\right)r(y)$$

для всех $x\in X$: $f(x)+\mu_{B}(x-y)\leq r(y)+\delta_{n}$.

Пусть последовательность $x_{n}\in X$ такая, что $f(x_{n})+\mu_{B}(x_{n}-y)\leq r(y)+\frac{1}{n}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x_{n})+\mu_{B}(x_{n}-y)\}=r(y)$. Минимизирующая последовательность $(x_{n})$ ограничена, так как $\|x_{n}\|_{E}\leq\|y\|_{E}+M\left(r(y)+\frac{1}{n}\right)$. Из рефлексивности банахова пространства $(E,\|\cdot\|_{E})$ следует существование у $(x_{n})$ подпоследовательности, слабо сходящейся к некоторому элементу $\bar{x}\in E$. Поэтому можно считать, что

$$f(x_{n})+\mu_{B}(x_{n}-y)\to r(y)\,,$$

$$f(x_{n})\to A,\ \ \mu_{B}(x_{n}-y)\to B,$$

$$x_{n}-y\to\bar{x}-y\ \text{ в топологии }\ \sigma(E,E^{*})\,. \qquad (10)$$

Зафиксируем $n > 2$ и такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что $1/k_0 < \delta_n$. Поскольку для $k \geq k_0$

$$f(x_k) + \mu_B(x_k - y) \leq r(y) + \frac{1}{k} \leq r(y) + \delta_n,$$

имеем

$$f(x_k) + \left\langle y_n^*, y - x_k \right\rangle_{E^*, E} > \left(1 - \frac{1}{n}\right) r(y) \ \forall k \geq k_0.$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$A + \left\langle y_n^*, y - \bar{x} \right\rangle_{E^*, E} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) r(y).$$

Из неравенства

$$A + \sup_{-B} y_n^* \mu_B(\bar{x} - y) = A + \sup_{-B} y_n^* \mu_{-B}(y - \bar{x}) \geq$$

$$\geq A + \left\langle y_n^*, y - \bar{x} \right\rangle_{E^*, E} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) r(y)$$

и $\sup_{-B} y_n^* \to 1$ получим (после предельного перехода при $n \to \infty$)

$$A + \mu_B(\bar{x} - y) \geq r(y). \tag{11}$$

Функционал Минковского $\mu_B$ слабо полунепрерывен снизу, поэтому из (10) следует

$$\mu_B(\bar{x} - y) \leq \lim_{n \to \infty} \mu_B(x_n - y) = B.$$

Приняв во внимание (11), получим

$$r(y) \leq A + \mu_B(\bar{x} - y) \leq A + B = r(y),$$

откуда

$$\mu_B(\bar{x} - y) = B = \lim_{n \to \infty} \mu_B(x_n - y).$$

Поскольку $x_n - y \to \bar{x} - y$ в топологии $\sigma(E, E^*)$, $\mu_B(x_n - y) \to \mu_B(\bar{x} - y)$, а множество $B$ имеет свойство Кадеца–Кли, то $\|x_n - \bar{x}\|_E \to 0$. Множество $X \subseteq E$ замкнуто, поэтому $\bar{x} \in X$. Из полунепрерывности снизу функционала $f$ получим

$$f(\bar{x}) \leq \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

В то же время

$$r(y) \leq f(\bar{x}) + \mu_B(\bar{x} - y) \leq A + B = r(y),$$

откуда

$$f(\bar{x}) + \mu_B(\bar{x} - y) = r(y),$$

что и доказывает лемму.

**Замечание 1.** Для элементов множества $G$ доказано даже больше, чем указано в формулировке теоремы 1. Показано, что для $y \in G$ задача (3) корректна по Тихонову в обобщенном понимании, т.е. множество ее решений непусто, а произвольная минимизирующая последовательность имеет сильно сходящуюся к некоторому решению подпоследовательность.

## ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Покажем, что без рефлексивности банахова пространства $E$ или без свойства Кадеца–Кли множества $B$ результат типа теоремы 1 не имеет места. Следующие две теоремы — обобщение известных результатов С.В. Конягина [4] о характеризации пространств Ефимова–Стечкина.

Начнем со случая нерефлексивного банахова пространства $(E, \|\cdot\|_E)$.

**Теорема 2.** Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — нерефлексивное банахово пространство; $f = 0$. Тогда существуют непустое замкнутое множество $X \subseteq E$ и непустое открытое множество $O \subseteq E \setminus X$ такие, что для произвольной точки $y \in O$ экстремальная задача $\mu_B(x - y) \to \inf\limits_{x \in X}$ не имеет решений.

**Доказательство**. По классической теореме Джеймса [11, с. 17] существует функционал $x^* \in E^*$ такой, что $\left\langle x^*, x \right\rangle_{E^*, E} < \sup_{-B} x^* = 1 \, \forall\, x \in -B$. Рассмотрим два множества: замкнутое ограниченное

$$X = B_1(E) \bigcap \left\{ x \in E : \left\langle x^*, x \right\rangle_{E^*, E} = 0 \right\}$$

и открытое

$$O = \left\{ y \in E : \|y\|_E < \frac{1}{2M+1} \right\} \bigcap \left\{ y \in E : \left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E} > 0 \right\}.$$

Пусть $y \in O$. Сначала покажем, что

$$\inf_{x \in X} \mu_B(x - y) = \left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E}. \tag{12}$$

Действительно, если $x \in X$, то

$$\left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E} = \left\langle x^*, y - x \right\rangle_{E^*, E} \le \mu_{-B}(y - x) = \mu_B(x - y).$$

Рассмотрим последовательность точек $z_n \in -B$ таких, что $\dfrac{n}{n+1} <$ $< \left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E} < 1$. Положим $y_n = y - \dfrac{\left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E}}{\left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E}} z_n$. Точки $y_n$ принадлежат множеству $X$, так как

$$\left\langle x^*, y_n \right\rangle_{E^*, E} = \left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E} - \frac{\left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E}}{\left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E}} \left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E} = 0,$$

$$\|y_n\|_E \le \|y\|_E + \left| \frac{\left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E}}{\left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E}} \right| \|z_n\|_E \le \|y\|_E + \frac{n+1}{n} \left| \left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E} \right| \|z_n\|_E \le$$

$$\le \|y\|_E + 2 \left| \left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E} \right| \|z_n\|_E \le \|y\|_E + 2\mu_{-B}(y) \|z_n\|_E \le (1 + 2M) \|y\|_E < 1.$$

Поскольку $y_n \in X$, имеем

$$\inf_{x \in X} \mu_B(x - y) \le \mu_B(y_n - y) = \mu_{-B}\left( \frac{\left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E}}{\left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E}} z_n \right) \le$$

$$\le \frac{\left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E}}{\left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E}} < \frac{n+1}{n} \left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E},$$

откуда следует равенство (12).

Предположим, что существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что $\mu_B(\bar{x} - y) = \left\langle x^*, y \right\rangle_{E^*, E}$.

Рассмотрим точку $z = \dfrac{y - \bar{x}}{\mu_B(\bar{x} - y)}$. Тогда $z \in -B$ и $\left\langle x^*, z \right\rangle_{E^*, E} = 1$. Получили противоречие с выбором функционала $x^* \in E^*$.

Существует аналогичный результат, если рассмотреть множество $B$, которое не имеет свойства Кадеца–Кли.

**Теорема 3.** Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахово пространство; $B \subseteq E$ — замкнутая ограниченная выпуклая окрестность нуля, которая не имеет свойства Кадеца–Кли; $f = 0$. Тогда существует непустое замкнутое множество $X \subseteq E$ и непустое открытое множество $O \subseteq E \setminus X$ такие, что для произвольной точки $y \in O$ экстремальная задача $\mu_B(x - y) \to \inf\limits_{x \in X}$ не имеет решений.

**Доказательство**. Если банахово пространство $E$ нерефлексивно, то утверждение уже доказано (теорема 2). Предположим, что $E$ — рефлексивное пространство. Поскольку множество $B$, а потому и $-B$, не имеет свойства Кадеца–Кли, существует последовательность точек $z_n \in -B$ такая, что $z_n \to z$ слабо в $E, \mu_{-B}(z_n) = \mu_{-B}(z) = 1$, $\inf\limits_{k \neq n} \|z_n - z_k\|_E > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функционал $x^* \in E^*$ такой, что $\left\langle x^*, z \right\rangle_{E^*, E} = \sup_{-B} x^* = 1$. Тогда имеем $\left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E} \to 1$. Можно считать, что $1 \geq \left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E} > 1 - \dfrac{1}{n+2} > \dfrac{1}{2}$. Положим $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) z_n$ и рассмотрим два множества:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad (X_n = B_{\varepsilon/3}(-y_n) \bigcap \{-y_n + x \in E: \left\langle x^*, x \right\rangle_{E^*, E} = 0\}),$$

$$O = \left\{ y \in E: \|y\|_E < \frac{\varepsilon}{3(2M+1)} \right\}.$$

Докажем, что множество $X$ замкнуто. Пусть $u' \in X_k$, $u'' \in X_n$ и $k > n$. Тогда для достаточно больших $k$ и $n$ имеем

$$\|u' - u''\|_E = \|u' - u'' + z_n - z_n + z_k - z_k + y_n - y_n + y_k - y_k\|_E \geq$$
$$\geq \|z_k - z_n\|_E - \|z_n - y_n\|_E - \|y_k - z_k\|_E - \|y_k + u'\|_E - \|y_n + u''\|_E \geq$$
$$\geq \varepsilon - \frac{1}{n} - \frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} > \frac{\varepsilon}{10}.$$

Множества $X_n$ замкнутые, а начиная с некоторого $n$ — «$\dfrac{\varepsilon}{10}$-отделенные» одно от другого. Поэтому множество $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ замкнутое.

Рассмотрим точки $y \in O$ и $x \in X$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеем $x \in X_n$,

$$\left\langle x^*, x \right\rangle_{E^*, E} = \left\langle x^*, -y_n \right\rangle_{E^*, E} = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left\langle x^*, z_n \right\rangle_{E^*, E} \leq -\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) < -1.$$

Отсюда следует, что $\forall\, x \in X$

$$\mu_B(x - y) = \mu_{-B}(y - x) \geq \left\langle x^*, y - x \right\rangle_{E^*, E} =$$

$$=\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}-\left\langle x^*,\, x\right\rangle_{E^*,E}>1+\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}. \tag{13}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\inf_{x\in X}\mu_B(x-y)=1+\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}. \tag{14}$$

Рассмотрим последовательность $v_n=y-y_n-\dfrac{\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}}{\left\langle x^*,\, z_n\right\rangle_{E^*,E}}z_n$. Точка $v_n$ принадлежит множеству $X_n\subseteq X$ , так как

$$\left\langle x^*,\, v_n+y_n\right\rangle_{E^*,E}=\left\langle x^*,\, y-\frac{\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}}{\left\langle x^*,\, z_n\right\rangle_{E^*,E}}z_n\right\rangle_{E^*,E}=$$

$$=\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}-\frac{\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}}{\left\langle x^*,\, z_n\right\rangle_{E^*,E}}\left\langle x^*,\, z_n\right\rangle_{E^*,E}=0\,,$$

$$\|v_n+y_n\|_E\le\|y\|_E+\left|\frac{\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}}{\left\langle x^*,\, z_n\right\rangle_{E^*,E}}\right|\|z_n\|_E\le\|y\|_E+\frac{n+2}{n+1}\left|\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}\right|\|z_n\|_E\le$$

$$\le\|y\|_E+2\left|\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}\right|\|z_n\|_E\le\|y\|_E+2\mu_{-B}(y)\|z_n\|_E\le(1+2M)\|y\|_E<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку $v_n\in X$, для каждого $n\in\mathbb{N}$

$$\inf_{x\in X}\mu_B(x-y)\le\mu_B(v_n-y)=\mu_{-B}\left(y_n+\frac{\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}}{\left\langle x^*,\, z_n\right\rangle_{E^*,E}}z_n\right)=$$

$$=\mu_{-B}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)z_n+\frac{\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}}{\left\langle x^*,\, z_n\right\rangle_{E^*,E}}z_n\right)=$$

$$=1+\frac{1}{n}+\frac{\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}}{\left\langle x^*,\, z_n\right\rangle_{E^*,E}}<1+\frac{1}{n}+\frac{n+2}{n+1}\left\langle x^*,\, y\right\rangle_{E^*,E}. \tag{15}$$

Учтя строгое неравенство (13), получим из оценки (15) равенство (14) и доказательство недостижимости в нем инфимума.

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ 1 К ЛИНЕЙНЫМ СИСТЕМАМ С ВЕКТОРНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА**

Используем полученные результаты для доказательства существования оптимальных решений, зависящих от параметра задач векторного управления линейными системами.

Пусть $(E,\|\cdot\|_E)$, $(H,\|\cdot\|_H)$, $(W,\|\cdot\|_W)$ и $(V,\|\cdot\|_V)$ — банаховы пространства; $U\subseteq H$ — подмножество допустимых управлений; $B\subseteq H$ — замкнутая ограниченная выпуклая окрестность нуля; пространство $E$ частично упорядочено замкнутым выпуклым и острым конусом $K \subseteq E$; $e \in K \setminus \{0\}$ — фиксированный элемент такой, что $-e \notin K$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\Phi(y,h)+\mu_B(h-h_0)e \to K\text{-min}, \tag{16}$$

$$Ly-F(h)=0\,,\ \ h\in U. \tag{17}$$

Здесь $L:V\to W$ — линейный непрерывный оператор, $F:H\to W$ — нелинейный оператор, $\Phi$: $V\times H\to E$ — заданное отображение, $h_0\in H$ — фиксированный элемент-параметр.

**Замечание 2.** Пусть задано отображение $f:X\to E$. Под задачей $f\to K$-min понимаем задачу поиска точек $x_0\in X$ таких, что $f(X)\bigcap(f(x_0)-K\setminus\{0\})=\varnothing$.

Предположим, что:

1) пространство управлений $(H,\|\cdot\|_H)$ рефлексивно;

2) множество $B\subseteq H$ имеет свойство Кадеца–Кли;

3) множество $U\subseteq H$ замкнуто;

4) оператор $F:H\to W$ непрерывен;

5) оператор $L$: $V\to W$ — линейный топологический изоморфизм $V$ в $W$, причем $R(L)\supseteq F(U)$;

6) отображение $\Phi:V\times H\to E$ $K$-ограничено снизу, $K$-полунепрерывно снизу в топологии $\sigma(V,V^*)$ и топологии $\sigma(H,H^*)$ (в каждой точке $(y',h')\in V\times H$ выполняется: $\forall$ окрестности $O\subseteq E$ точки $\Phi(y',h')$ $\exists$ такая окрестность $V_0\subseteq V$ точки $y'\in V$ и такая окрестность $H_0\subseteq H$ точки $h'\in H$, что $\Phi(V_0,H_0)\subseteq O+K$) [14];

7) $(K^*)^\circ=\{l^*\in K^*\colon \left\langle l^*, l\right\rangle_{E^*,E}>0\ \ \forall\ l\in K\setminus\{0\}\}\neq\varnothing$.

**Замечание 3.** В классической работе [15, теорема 2.1] доказано, что в случае сепарабельности $E$ всегда $(K^*)^\circ\neq\varnothing$. Если пространство $E$ несепарабельно, то множество $(K^*)^\circ$ может быть пустым.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия 1–7. Тогда существует массивное множество $M\subseteq H\setminus U$ такое, что задача (16), (17) имеет эффективное решение.

**Доказательство**. Пусть $h\in U$. Тогда существует единственный элемент $y=y(h)\in V$ такой, что

$$Ly-F(h)=0\,,$$

$$\|y\|_V\le c\|F(h)\|_W,\ \ c>0\,. \tag{18}$$

Рассмотрим отображение $\Psi$: $H\to E:U\ni h\to\Psi(h)=\Phi(y(h),h)$. Покажем, что отображение $\Psi$ — $K$-полунепрерывно снизу на множестве $U$.

Рассмотрим точки $h'\in U$, $y'=y(h')\in V$ и окрестность $O\subseteq E$ точки $\Phi(y',h')\in E$. Из условия 6 вытекает существование таких окрестностей $V_0$ и $H_0$ точек $y'\in V$ и $h'\in H$ соответственно, что $\Phi(V_0,H_0)\subseteq O+K$. Из непрерывности оператора $F$ и оценки (18) следует существование такой окрестности $H_{00}\subseteq H_0$ точки $h'$, что $(L^{-1}\circ F)(H_{00})\subseteq V_0$. Итак, $\Psi(H_{00})\subseteq\Phi(V_0,H_0)\subseteq O+K$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим элемент $e^*\in(K^*)^\circ$ такой, что $\left\langle e^*, e\right\rangle_{E^*,E}=1$, и задачу

$$\left\langle e^*, \Phi(y,h)\right\rangle_{E^*,E}+\mu_B(h-h_0)\to\inf\,,\quad Ly-F(h)=0\,,\ \ h\in U,$$

которую можно записать в виде

$$\left\langle e^*, \Psi(h)\right\rangle_{E^*,E}+\mu_B(h-h_0)\to\inf_{h\in U}. \tag{19}$$

Функционал $h \mapsto \left\langle e^*, \Psi(h) \right\rangle_{E^*, E}$ полунепрерывен снизу и ограничен снизу на $U$. Поэтому из теоремы 1 следует, что множество таких $h_0 \in H$, что задача (19) имеет решение, содержит плотное в $H \setminus U$ подмножество типа $G_\delta$.

Для доказательства теоремы осталось показать, что решение (19) — эффективное решение задачи (16), (17).

Пусть $\bar{h} \in U$ — решение (19). Предположим, что $\bar{h} \in U$ не является эффективным решением (16), (17). Тогда существует такая точка $h' \in U$, что

$$\Psi(h') + \mu_B(h' - h_0)e \in \Psi(\bar{h}) + \mu_B(\bar{h} - h_0)\, e - K \setminus \{0\}\, .$$

Отсюда имеем, с учетом $\left\langle e^*, e \right\rangle_{E^*, E} = 1$,

$$\left\langle e^*, \Psi(h') \right\rangle_{E^*, E} + \mu_B(h' - h_0) < \left\langle e^*, \Psi(\bar{h}) \right\rangle_{E^*, E} + \mu_B(\bar{h} - h_0)\, ,$$

что противоречит оптимальности $\bar{h}$.

**Замечание 4.** Опираясь на результаты работ [16–18], можно получить подобные результаты для задач векторной максимизации линейной системы вида

$$\Phi(y, h) + \mu_B(h - h_0)\, e \to K\text{-max},$$

$$Ly - F(h) = 0\, ,\ h \in U.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Стечкин С.Б. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Rev. Roum. Math. Pur. et Appl. — 1963. — **8**, N 1. — P. 5–18.
2. Конягин С.В. Об аппроксимативных свойствах произвольных замкнутых множеств в банаховых пространствах // Фундамент. и прикл. математика. — 1997. — **3**, № 4. — С. 379–389.
3. Lau K.-S. Almost Chebyshev subsets in reflexive banach spaces // Indiana Univ. Math. J. — 1978. — **27**, N 5. — P. 791–795.
4. Конягин С.В. Об аппроксимативных свойствах замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств // ДАН СССР. — 1980. — **251**, № 2. — С. 276–280.
5. De Blasi F.S., Myjak J. On a generalized best approximation problem // J. Approx. Theory. — 1998. — **94**. — P. 54–72.
6. Li C. On well posed generalized best approximation problems // Ibid. — 2000. — **107**. — P. 96–108.
7. Ni R.X. Existence of generalized nearest points // Taiwanese J. Math. — 2003. — **7**, N 1. — P. 115–128.
8. Baranger J. Existence de solutions pour des problemes d’optimisation non convexes // J. Math. Pures Appl. — 1973. — **52**. — P. 377–406.
9. Li C., Peng L.H. Porosity of perturbed optimization problems in Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — **324**. — P. 751–761.
10. Ni R.X. Derivatives of generalized farthest functions and existence of generalized farthest points // Ibid. — 2006. — **316**. — P. 642–651.
11. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. — Киев: Вища шк., 1980. — 215 с.
12. Ekeland I., Lebourg G. Generic frechet-differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — **224**, N 2. — P. 193–216.
13. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 510 с.
14. Penot J., Thera M. Semi-continuous mappings in general topology // Archiv der Math. — 1982. — **38**. — P. 158–166.
15. Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат.наук. — 1948. — № 1. — С. 3–95.
16. Семенов В.В. Линейный вариационный принцип для выпуклой векторной максимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 2. — С. 105–114.
17. Семенов В.В. Типовість розв’язності деяких задач оптимального керування // Доп. НАН України. — 2008. — № 8. — С. 36–42.
18. Семенов В.В. О разрешимости задач максимизации в сопряженных пространствах // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 2. — С. 89–93.


*Поступила 14.11.2008*