

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КЛАССОВ РЕГРЕССОРОВ БЕСКОНЕЧНОЙ ЕМКОСТИ

Ключевые слова: *временной ряд, восстановление функциональной зависимости, равномерная сходимость, аппроксимация полиномами.*

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач анализа временных рядов является восстановление функциональных зависимостей по эмпирическим данным. Существуют различные подходы для решения этой проблемы, которые основываются на имеющейся априорной информации, структуре и параметрах моделей, экстремальных свойствах аппроксимирующих полиномов, а также на специфике дальнейшего использования результатов. В настоящей статье будем считать, что временной ряд $\{Y(t), t \in T\}$, заданный в фиксированные моменты времени $(y_1, t_1), \dots, (y_l, t_l)$, может быть описан с помощью стохастического регрессионного уравнения с аддитивной случайной составляющей

$$Y(t) = f(t, \alpha) + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где ε_t — независимые, одинаково распределенные случайные величины (НРСВ).

Параметризованный класс регрессионных функций $F = \{f(\cdot, \alpha), \alpha \in \Lambda\}$ определяет зависимость временного ряда от индекса времени и задается априорно.

Задача восстановления функциональной зависимости, заданной уравнением (1), состоит в выборе функции $f \in F$ и нахождении оценок ее параметров $\hat{\alpha}$, которые согласно некоторому критерию наилучшим образом описывают эмпирические данные. В настоящей статье в качестве критерия используем условие минимизации среднего риска

$$I(\alpha) = M q(z, \alpha) = \int (Y(t) - f(t, \alpha))^2 P(z) dz, \quad (2)$$

где $z = (Y(t), t)$ — случайная величина с неизвестной плотностью распределения $P(z)$.

При условии ограниченности эмпирических данных в работах [1–4] эта задача решается минимизацией эмпирического функционала риска

$$I_e(\alpha) = M_l q(z, \alpha) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (y_i - f(t_i, \alpha))^2 \quad (3)$$

при условии существования равномерной по параметру сходимости

$$P \left\{ \sup_{\alpha} |I(\alpha) - I_e(\alpha)| \geq \kappa \right\} < \eta(l, \kappa), \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \eta(l, \kappa) = 0. \quad (4)$$

В работах [1–3] доказано существование равномерной сходимости (4) эмпирического функционала риска I_e к среднему и получены оценки этой сходимости в случаях, когда класс регрессионных функций $F = \{f(\cdot, \alpha), \alpha \in \Lambda\}$ имеет конечную емкость или может быть покрыт конечной ε -сетью. На практике часто возникает необходимость приближать эмпирические данные функциями, для которых емкость бесконечна или не определена, а покрытие конечной ε -сетью или невозможно, или приводит к потере точности результата. В этих случаях необходимо проводить дополнительные исследования.

© Н.Д. Панкратова, А.Г. Зражевский, 2011

**1. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ В СЛУЧАЕ
АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ РЕГРЕССИИ ПОЛИНОМАМИ**

Докажем равномерную сходимость эмпирического функционала риска (3) к среднему риску (2) и построим оценки скорости сходимости для случая, когда класс регрессионных функций F может быть приближен полиномиальным классом функций.

В дальнейшем будем считать, что выполняется условие ограниченности возможных выбросов [1]

$$\sup_{\alpha, z} q(z, \alpha) = \sup_{\alpha, Y, t} (Y(t) - f(t, \alpha))^2 \leq \tau. \quad (5)$$

Теорема 1. Предположим, что функции $f(t, \alpha) \in F$ можно приблизить полиномом $P_n(t)$ степени n на отрезке $[a, b]$, при этом справедлива следующая оценка:

$$|f(t, \alpha) - P_n(t)| \leq G(f; n, t). \quad (6)$$

Пусть выполнено условие (5). Тогда имеет место равномерная сходимость (4) и с вероятностью $1 - \eta$ при $l > n + 1$ выполняется неравенство

$$I(\alpha) < I_e(\alpha) + \varepsilon + 2\tau \sqrt{\frac{(n+1) \left(\ln \frac{2l}{n+1} + 1 \right) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}}, \quad (7)$$

где

$$\varepsilon = 2 \sup_{t \in [a, b]} G(f; n, t) (2\sqrt{\tau} + G(f; n, t)). \quad (8)$$

Замечание 1. Если (8) разрешимо относительно n : $n = R(f; \varepsilon)$, то можно определить наиболее низкую степень регрессионного полинома при заданном ε .

Доказательство. Для того чтобы доказать равномерную по параметру сходимость (4), покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечный класс Q_ε , который содержит нижние и верхние приближения для каждой функции q из $Q = \{q | q = (Y(\cdot) - f(\cdot, \alpha))^2, f \in F\}$, и выполняются условия

$$q_{\varepsilon, L} \leq q \leq q_{\varepsilon, U} \text{ и } M(q_{\varepsilon, U} - q_{\varepsilon, L}) < \varepsilon. \quad (9)$$

Действительно, если определить

$$q_{\varepsilon, L} = (Y(t) - P_n(t))^2 - \varepsilon/2, \quad q_{\varepsilon, U} = (Y(t) - P_n(t))^2 + \varepsilon/2,$$

то условие $M(q_{\varepsilon, U} - q_{\varepsilon, L}) < \varepsilon$ выполняется.

Докажем первое условие (9), т.е. $q_{\varepsilon, L} \leq q \leq q_{\varepsilon, U}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} |(Y(t) - f(t, \alpha))^2 - (Y(t) - P_n(t))^2| &= |(P_n(t) - f(t, \alpha))(2Y(t) - f(t, \alpha) - P_n(t))| = \\ &= |f(t, \alpha) - P_n(t)| |2Y(t) - f(t, \alpha) - P_n(t)| \leq |f(t, \alpha) - P_n(t)| (2|Y(t) - f(t, \alpha)| + \\ &+ |f(t, \alpha) - P_n(t)|) \leq G(f; n, t) (2\sqrt{\tau} + G(f; n, t)) \leq \varepsilon/2, \end{aligned}$$

где τ определено условием (5).

Если в полученных неравенствах перейти к $\sup_{t \in [a, b]}$ и ограничить правую часть последнего неравенства $\varepsilon/2$, то получим первое условие (9), а именно $q_{\varepsilon, L} \leq q \leq q_{\varepsilon, U}$. Поскольку это условие выполняется, то имеет место равномерная сходимость (4) [3]. Оценим ее скорость.

Поскольку $P_n(t)$ является полиномом степени n , то емкость класса функций $q^P(t, \alpha) = (Y(t) - P_n(t))^2$ равна $n + 1$ [4]. В случае, если класс регрессоров имеет конечную емкость, то сходимость является равномерной, и с вероятностью $1 - \eta$ выполняется оценка отклонения эмпирического риска от среднего [1]

$$|I^P(\alpha) - I_e^P(\alpha)| < 2\tau \sqrt{\frac{(n+1) \left(\ln \frac{2l}{n+1} + 1 \right) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}}, \quad (10)$$

где $I^P(\alpha) = Mq^P(t, \alpha)$, $I_e^P(\alpha) = M_l q^P(t, \alpha)$.

Легко показать, что $|I(\alpha) - I_e(\alpha)| \leq |I(\alpha) - I^P(\alpha)| + |I_e^P(\alpha) - I_e(\alpha)| + |I^P(\alpha) - I_e^P(\alpha)|$.

Переходя в неравенстве $|(Y(t) - f(t, \alpha))^2 - (Y(t) - P_n(t))^2| \leq \varepsilon/2$, которое получено при проверке первого условия (9), к математическим ожиданиям, найдем

$$|I(\alpha) - I^P(\alpha)| = |Mq(t, \alpha) - Mq^P(t, \alpha)| \leq M|q(t, \alpha) - q^P(t, \alpha)| \leq \varepsilon/2.$$

Аналогично имеет место неравенство $|I_e(\alpha) - I_e^P(\alpha)| \leq M_l |q(t, \alpha) - q^P(t, \alpha)| \leq \varepsilon/2$. Тогда

$$|I(\alpha) - I_e(\alpha)| \leq |I(\alpha) - I^P(\alpha)| + |I_e^P(\alpha) - I_e(\alpha)| + |I^P(\alpha) - I_e^P(\alpha)| \leq \varepsilon + |I^P(\alpha) - I_e^P(\alpha)|.$$

Подставляя вместо второго слагаемого его оценку (10), получаем утверждение теоремы 1.

Следствие 1. Если выполняются условия теоремы 1, то имеет место равномерная сходимость (4). При этом с вероятностью $1 - \eta$ справедлива оценка среднего риска

$$I(\alpha) < I_e^P(\alpha) + \frac{3}{2}\varepsilon + 2\tau \sqrt{\frac{(n+1) \left(\ln \frac{2l}{n+1} + 1 \right) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}}. \quad (11)$$

Замечание 2. В случае, когда класс функций F неизвестен, вместо оценки (7) на практике более целесообразна оценка (11). Это объясняется тем, что оценка (11) предполагает минимизацию эмпирического функционала риска (3) и поиск соответствующих оценок параметра $\hat{\alpha}$ в случае, когда регрессорами будут аппроксимирующие полиномы $P_n(t)$ (условие (6)). Степень этих полиномов может быть определена методом упорядоченной минимизации риска [1].

Рассмотрим несколько примеров оценок аппроксимации функций полиномами [5–7], которые могут быть использованы при восстановлении функциональной зависимости с учетом результатов теоремы 1.

Пример 1. Если $f(t) \in D^{(n+1)}[a, b]$ (см. [5]), то функция $f(t)$ может быть приближена на отрезке $[a, b]$ полиномом $P_n(t)$ наилучшего равномерного приближения степени n с оценкой отклонения:

$$\sup_{[a, b]} |f(t) - P_n(t)| \leq \left(\max_{[a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \right) \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \quad (12)$$

Пример 2. Если $f(t) \in D^{(n+1)}[a, b]$ (см. [5]) и существует степень $N \in \mathbb{N}$, при которой $\sup_{[a, b]} |f(t) - P_N(t)| \approx 0$, то

$$\sup_{[a, b]} |f(t) - P_{N-i}(t)| \leq \sum_{j=0}^{i-1} |a_{N-j}^{(N-j)}| (b-a)^{N-j} 2^{-2(N-j-1)-1}, \quad i=1, \dots, N-1, \quad (13)$$

где $a_{N-j}^{(N-j)}$ — коэффициенты полиномов $P_{N-j}(t)$ при t^{N-j} , а $P_{N-j}(t)$ является полиномом наилучшего равномерного приближения полинома $P_{N-j-1}(t)$, $j=0, \dots, N-2$.

Пример 3. Если функция $f(t) \in C[0,1]$ (см. [6, 7]) и удовлетворяет условию Гельдера порядка γ , т.е. для модуля непрерывности $\omega(f; u)$ выполняется неравенство

$$\omega(f; u) \leq cu^\gamma, \quad \gamma \in (0,1], \quad (14)$$

$B_n(f; t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$, $t \in [0,1]$, — полином Бернштейна, то

$$|f(t) - B_n(f; t)| \leq \frac{5}{2} \omega\left(f; \frac{\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{n}}\right), \quad (15)$$

где $\omega\left(f; \frac{\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{n}}\right) = \sup_{\substack{|t_2-t_1| \leq \frac{\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{n}} \\ t_1, t_2 \in [0,1]}} |f(t_1) - f(t_2)|$.

Следствие 2. Если выполняются условия теоремы 1 и класс регрессионных функций F покрывается полиномами Бернштейна с оценкой аппроксимации (15), то имеет место равномерная сходимость (4) и оценка среднего риска задается неравенством (7) (или (11)), а степень полинома Бернштейна определяется следующим образом:

$$n(\varepsilon) = \left[\left(\frac{-\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau + \frac{\varepsilon}{2}}}{c} \right)^{-2/\gamma} \frac{1}{4} \right]. \quad (16)$$

Докажем утверждение для случая, когда класс функций частично покрыт конечной ε -сетью по некоторым своим параметрам, а по остальным параметрам (при фиксированных значениях узлов ε -сети) может быть приближен полиномами конечной степени.

Теорема 2. Пусть множество функций $F = \{f(t, a, \alpha), t \in (0,1], a \in \Lambda_a, \alpha \in \Lambda_\alpha\}$ покрыто конечной ε -сетью по параметру $\alpha: \{f(t, a, \alpha_1), f(t, a, \alpha_2), \dots, f(t, a, \alpha_{n(\varepsilon)})\}$, а по параметру a (при фиксированном значении α_i) удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть также выполняется условие (5). Тогда имеет место равномерная сходимость (4) и с вероятностью $1-\eta$ при $l > n(\varepsilon) + 1$ выполняется неравенство

$$I(a_e, \alpha_e) < < I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) + 2\tau \sqrt{\frac{(n(\varepsilon) + 1) \ln \frac{2l}{n(\varepsilon) + 1} + \ln n(\varepsilon) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}} + \varepsilon + 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau}, \quad (17)$$

здесь $I(a_e, \alpha_e) = M(y(t) - f(t, a_e, \alpha_e))^2$, $f(t, a_e, \alpha_e)$ — функция, которая минимизирует эмпирический функционал (3), $I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (y_i - f(t_i, a_e, \alpha_i(\alpha_e)))^2$, $f(t, a_e, \alpha_i(\alpha_e))$ — ближайший к $f(t, a_e, \alpha_e)$ элемент ε -сети; $n(\varepsilon)$ — степень аппроксимирующего полинома, которая может быть найдена из (8).

Замечание. В случае приближения функций из класса F полиномами Бернштейна $n(\varepsilon)$ определяется равенством (16).

Доказательство. Поскольку F покрыта конечной ε -сетью по параметру α , то по определению для $\alpha \in \Lambda$ существует i такое, что $\sup_{a,t} |f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_i)| < \varepsilon_\alpha$.

Докажем равномерную сходимость в предположении, что параметр α принимает свои значения лишь в вершинах ε -сети. Тогда при условии конечности ε -сети

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{\alpha, i} |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} &\leq \sum_{i=1}^{n(\varepsilon_\alpha)} P \left\{ \sup_a |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} \leq \\ &\leq n(\varepsilon_\alpha) \sup_i P \left\{ \sup_a |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку функции из класса $F = \{f(t, a, \alpha), t \in (0,1], a \in \Lambda_\alpha\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то существуют полиномы приближения $P_n(t)$ степени n и выполняется неравенство $|I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| \leq \varepsilon + |I^P(a, \alpha_i) - I_e^P(a, \alpha_i)|$, где ε определяется равенством (8). Тогда

$$P \left\{ \sup_a |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} \leq P \left\{ \sup_a |I^P(a, \alpha_i) - I_e^P(a, \alpha_i)| > \kappa - \varepsilon \right\}.$$

Поскольку класс полиномов степени $n(\varepsilon)$ имеет емкость $n(\varepsilon) + 1$, то существует равномерная сходимость эмпирического функционала риска к среднему (в функционалах в качестве регрессионных функций взяты аппроксимирующие полиномы $P_n(t)$). Скорость сходимости определяется неравенством [1]

$$P \left\{ \sup_a |I^P(a, \alpha_i) - I_e^P(a, \alpha_i)| > \kappa - \varepsilon \right\} < 9 \frac{(2l)^{n(\varepsilon)+1}}{(n(\varepsilon)+1)!} e^{-\frac{(\kappa-\varepsilon)^2 l}{4\tau^2}}.$$

Поскольку правая часть неравенства не зависит от i , то

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{a, i} |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} &\leq n(\varepsilon_\alpha) \sup_i P \left\{ \sup_a |I(a, \alpha_i) - I_e(a, \alpha_i)| > \kappa \right\} \leq \\ &\leq n(\varepsilon_\alpha) \sup_i P \left\{ \sup_a |I^P(a, \alpha_i) - I_e^P(a, \alpha_i)| > \kappa - \varepsilon \right\} < 9n(\varepsilon_\alpha) \frac{(2l)^{n(\varepsilon)+1}}{(n(\varepsilon)+1)!} e^{-\frac{(\kappa-\varepsilon)^2 l}{4\tau^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равномерная сходимость (4) и ее скорость определяется правой частью последнего неравенства. Приравниваем ее к η и решаем полученное уравнение относительно κ :

$$\kappa = 2\tau \sqrt{\frac{(n(\varepsilon)+1) \ln \frac{2l}{n(\varepsilon)+1} + \ln n(\varepsilon_\alpha) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}} + \varepsilon. \quad (18)$$

Для $\alpha \in \Lambda$ обозначим через $f(t, a, \alpha_i(\alpha))$ ближайший к $f(t, a, \alpha)$ элемент ε -сети.

С учетом выпуклости математического ожидания, выпуклости функционала $(Y(t) - f(t, a, \alpha_i))^2$ и условия (5) получим

$$\begin{aligned} &|I(a, \alpha) - I(a, \alpha_i(\alpha))| \leq \\ &\leq |M(f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_i(\alpha)))(2Y(t) - f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_i(\alpha)))| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon_\alpha M \sqrt{(2Y(t) - f(t, a, \alpha) - f(t, a, \alpha_i(\alpha)))^2} \leq \varepsilon_\alpha \sqrt{2I(a, \alpha) + 2I(a, \alpha_i(\alpha))} \leq 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau}.$$

Тогда с вероятностью $1-\eta$ качество функции $f(t, a_e, \alpha_e)$, которая минимизирует эмпирический риск $I(a_e, \alpha_e)$, определяется оценкой

$$I(a_e, \alpha_e) < I(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) + 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau} < I_e(a_e, \alpha_i(\alpha_e)) + \kappa + 2\varepsilon_\alpha \sqrt{\tau},$$

где κ задается формулой (18). Таким образом, имеет место неравенство (17).

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В СЛУЧАЕ АППРОКСИМАЦИИ КЛАССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА

Рассмотрим пример применения результатов теоремы 1 для тригонометрического класса функций F :

$$F = \{f(t, \alpha, \omega), t \in [t_0, 1], a = \{a_0, a_1, a_2\} \in \Lambda_a, \omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]\},$$

$$f(t, a, \omega) = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t. \quad (19)$$

Введем следующее обозначение: $\tilde{t} = \omega t / \bar{\omega} \in [\underline{\omega} t_0 / \bar{\omega}, 1]$. Тогда

$$f(\tilde{t}, a) = a_0 + a_1 \sin \bar{\omega} \tilde{t} + a_2 \cos \bar{\omega} \tilde{t}. \quad (20)$$

Поскольку функции (20) непрерывны и удовлетворяют условию Гельдера (14) при $\gamma=1$, $c = \max_{a \in \Lambda_a} \{a_0, a_1, a_2\} \bar{\omega}$, то их можно приблизить полиномами Бернштейна

$$B_n(f; \tilde{t}) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}, a\right) C_n^k \tilde{t}^k (1-\tilde{t})^{n-k} = a_0 + a_1 \sum_{r=0}^n b_r^{(1)} t^r \omega^r + a_2 \sum_{r=0}^n b_r^{(2)} t^r \omega^r,$$

где

$$b_r^{(1)} = \sum_{k=0}^r C_n^k C_{n-k}^{r-k} (-1)^{r-k} \bar{\omega}^{-r} \sin(\bar{\omega} k / n), \quad b_r^{(2)} = \sum_{k=0}^r C_n^k C_{n-k}^{r-k} (-1)^{r-k} \bar{\omega}^{-r} \cos(\bar{\omega} k / n).$$

Погрешность аппроксимации при этом оценивается неравенством (15).

В соответствии со следствием 1 теоремы 1 оценка среднего риска (11) состоит из трех слагаемых:

$$I(\alpha) < I_1(\alpha, n) + I_2(\alpha, n) + I_3(n),$$

где $I_1(\alpha, n) = I_e^{B_n}(\alpha)$ — эмпирический функционал риска, для которого в качестве регрессионных функций используются полиномы Бернштейна, аппроксимирующие функции (20);

$$I_2(\alpha, n) = \frac{15}{4} c \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma/2} \left(2\sqrt{\tau} + \frac{5}{4} c \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma/2}\right), \quad I_3(n) = 2\tau \sqrt{\frac{(n+1)(\ln \frac{2l}{n+1} + 1) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}}.$$

При увеличении степени аппроксимирующего полинома n значения первого и второго слагаемых убывают, в то время как значение третьего — возрастает. Задача состоит в нахождении значения n и соответствующей оценки параметра α , при которых оценка среднего риска (правая часть неравенства (11)) будет принимать минимальное значение. Указанный подход к выбору оптимальной сложности модели (в данном случае это степень n полинома Бернштейна) называется методом упорядоченной минимизации риска [1].

Применим изложенную теорию для выбора оптимальной (в понимании изложенного) модели искусственного временного ряда с ее дальнейшим использованием для моделирования и прогнозирования. Эмпирические данные зададим в виде

$$Y(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t + \xi(t), \quad t \in (0, 1], \quad (21)$$

где $a_0 = 0.1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $\omega = \pi$, $\xi(t)$ — НРСВ с нормальным распределением с параметрами 0 и 0.2, в фиксированные моменты времени: $t_i = i/48$, $i = 1, \dots, 24$. Прогнозный период состоит из 24 моментов времени: $t_i = i/48$, $i = 25, \dots, 48$.

На рис. 1, а показан график зависимости оценки среднего риска $I_1 + I_2 + I_3$ (см. (11)) от n . На рис. 1, б представлены эмпирические данные (кривая 1), восстановленная функциональная зависимость с спрогнозированными значениями (кривая 2), фактические значения, рассчитанные по формуле (21) без добавления случайной компоненты $\xi(t_i)$, $i = 25, \dots, 48$ (кривая 3). Здесь в качестве максимально возможного значения периода принимаем $\bar{\omega} = 2\pi$, τ — среднеквадратичная ошибка при приближении эмпирических данных полиномами второй степени.

Методом упорядоченной минимизации риска степень полинома Бернштейна n изменяем от 4 до 10. Как видно из рис. 1, а, минимум величины среднего риска достигается при $n = 6$. В этом случае значения параметров составляют $\hat{a}_0 = 0.84$, $\hat{a}_1 = 0.718$, $\hat{a}_2 = -1.44$, $\hat{\omega} = 1.4\pi$. Спрогнозированные значения получим при экстраполяции полинома Бернштейна на период прогноза: $t_i = i/48$, $i = 25, \dots, 48$. Как видно из рис. 1, прогнозирование на основе использования полиномиальной

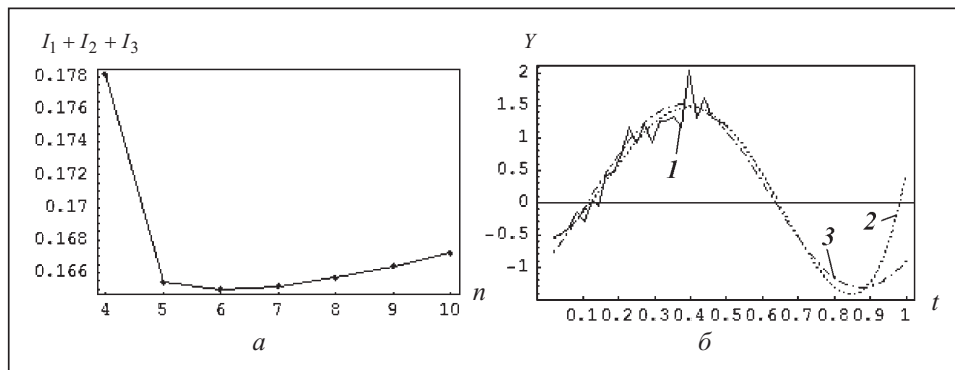


Рис. 1. Графическая реализация восстановления функциональной зависимости в случае аппроксимации класса тригонометрических функций полиномами Бернштейна

аппроксимации тригонометрических функций целесообразно проводить только на небольшие промежутки времени (около 50% количества эмпирических данных).

Оценим качество построенной модели, когда значение эмпирического функционала риска $I_e = 0.0339$ определяется следующими статистическими характеристиками: $RE(1) = 0.083$ — относительная ошибка первого спрогнозированного значения, $MSE(12) = 0.09$, $MSE(24) = 0.376$ — среднеквадратичные ошибки первых 12 и 24 значений прогноза соответственно, $MAPE(12) = 0.295$, $MAPE(24) = 0.314$ — среднеабсолютные процентные ошибки первых 12 и 24 значений прогноза соответственно [8]. С увеличением периода прогноза среднеквадратичная и среднеабсолютная погрешности увеличиваются.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В СЛУЧАЕ АППРОКСИМАЦИИ КЛАССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Описанный в разд. 2 подход требует априорного задания класса функций F , аппроксимируемого полиномами Бернштейна. Необходимость подобной априорной информации на практике существенно сужает класс задач восстанавливаемых зависимостей. Здесь предлагается иной подход, который основан на аппроксимации регрессионных функций полиномами наилучшего равномерного приближения.

К построению оценки среднего риска (2) применим оценки аппроксима-

ции (12) и (13). Основываясь на результатах теоремы 1, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(n) = & \\ = 2 \left(\max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \right) \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} & \left(2\sqrt{\tau} + \left(\max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \right) \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(n) = 2 \left(\sum_{j=0}^{N-n-1} |a_{N-j}^{(N-j)}| (b-a)^{N-j} 2^{-2(N-j-1)} \right) & \left(2\sqrt{\tau} + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{N-n-1} |a_{N-j}^{(N-j)}| (b-a)^{N-j} 2^{-2(N-j-1)} \right), & \end{aligned} \quad (23)$$

где N выбирается из условия $\sup_{[a,b]} |f(t) - P_N(t)| \approx 0$.

Предположим, что выполняются условия теоремы 1, а следовательно, имеет место равномерная сходимость и оценка среднего риска (2) определяется как

$$I(\alpha) < I_1(\alpha, n) + I_{2(i)}(\alpha, n) + I_3(n), \quad (24)$$

где $I_1(\alpha, n) = I_e^P(\alpha)$ — эмпирический риск, построенный на основании полиномов наилучшего равномерного приближения, $I_{2(i)}(\alpha, n) = 3 \varepsilon_i(n) / 2$, $i = 1, 2$, — погрешность, заданная равенствами (22) и (23) соответственно, $I_3(n) =$

$$= 2\tau \sqrt{\frac{(n+1) \left(\ln \frac{2l}{n+1} + 1 \right) - \ln \frac{\eta}{9}}{l}}.$$

Как и в разд. 2, при увеличении степени аппроксимирующего полинома n значения первого и второго слагаемых убывают, в то время как значение третьего слагаемого возрастает. Таким образом, для выбора оптимальной (в смысле минимума оценки среднего риска) степени полинома n целесообразно использовать метод упорядоченной минимизации риска [1].

Применим описанный подход для восстановления функциональной зависимости по искусственному временному ряду. Эмпирические данные определим как

$$Y(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t + \psi) + \xi(t), \quad t \in (0, 1], \quad (25)$$

где $a_0 = 0.1$, $a_1 = 1$, $\omega = 2\pi$, $\psi = \pi / 3$, $\xi(t)$ — НРСВ с нормальным распределением с параметрами 0 и 0.2.

Моделируем 24 значения: $t_i = i / 24$, $i = 1, \dots, 24$; τ — среднеквадратичная погрешность при приближении эмпирических данных полиномом второй степени. В качестве априорной информации для построения $\varepsilon_1(n)$ используем равенство $\max_{[0,1]} |f^{(n+1)}(t)| = \bar{a}_1 \bar{\omega}^{n+1} = 2\pi^{n+1}$. Некоторые результаты процесса восстановления

функциональной зависимости в случае аппроксимации класса тригонометрических функций полиномами наилучшего равномерного приближения приведены на рис. 2.

Зависимость значений $I_1(\alpha, n) + I_2(n)$ от n представлена на рис. 2, a , откуда следует, что минимальное значение достигается при $n = 4$. Результаты оценивания среднего риска (24) в зависимости от n при условии, что второе слагаемое рассчитывается с помощью (22) и (23) соответственно, представлены на рис. 2, b и 2, $в$. Минимальные значения этих величин достигаются при $n = 7$ и $n = 5$ соответственно. В табл. 1 даны результаты оценивания качества построенной модели с привлечением наилучшего равномерного приближения при использовании полиномов степе-

ней 4, 5, 7. Рассчитаны значения эмпирического функционала риска I_e^P , основные характеристики качества MSE и $MAPE$, полученные на основе сравнения смоделированных с помощью оцениваемого полинома данных и данных, найденных по формуле (25) без добавления случайной составляющей $\xi(t)$. Если степень полинома выбирается из условия минимума эмпирического функционала риска, то ввиду убывания последнего с ростом n результатом будет максимально допустимая степень (в данном случае $n = 9$). Это может привести к переглаживанию, т.е. к случаю, когда регрессионная кривая кроме основной тенденции будет описывать случайную компоненту, что нежелательно. Эту проблему можно решить путем учета слагаемого $I_3(n)$ при минимизации [1]. Однако при этом может возникнуть противоположная проблема — недоглаживание. Как видно из табл. 1, при $n = 4$ (степень выбрана из условия минимизации $I_1(\alpha, n) + I_3(n)$) значение MSE является наибольшим. Учет при минимизации всех трех компонент (24) предоставляет возможность контролировать как переглаживание, так и недоглаживание. При этом важное значение имеет оценка аппроксимации функции полиномом. В данном примере

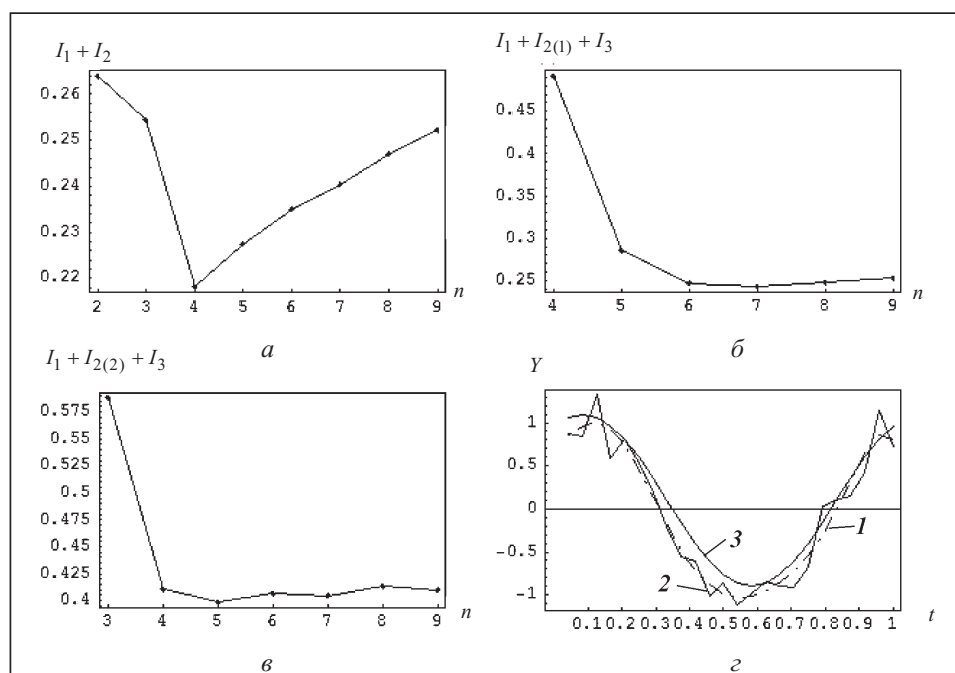


Рис. 2. Графическая реализация процесса восстановления функциональной зависимости в случае аппроксимации класса тригонометрических функций полиномами наилучшего равномерного приближения

лучшие значения статистик MSE и $MAPE$ получены при $n = 7$, что соответствует результату, полученному при использовании оценки (12).

На рис. 2, z дан график временного ряда, полученного путем моделирования полинома степени $n = 7$ (кривая 1), эмпирических данных (кривая 2) и временного ряда, рассчитанного по формуле (25) без случайной составляющей $\xi(t)$ (кривая 3). Как видим, предложенный подход частично решает проблему переглаживания и недоглаживания при выборе аппроксимирующего полинома.

Таблица 1

n	I_e^P	MSE	$MAPE$
4	0.0302475	0.837458	1.38923
5	0.0302365	0.836269	1.38927
7	0.027802	0.814669	1.38232

4. ПРИМЕР МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Применим описанный в разд. 3 подход для восстановления функциональной зави-

симости на основе временного ряда, определяющего требования банков по кредитам, предоставленными юридическим лицам в АР Крым за 12 месяцев 2007 года. После выделения трендовой составляющей с применением монотонных регрессоров временной ряд остатков имеет положительную авторегрессионную составляющую. В работе [8] сделано предположение относительно наличия циклической составляющей, и в качестве регрессоров для остатков использован класс тригонометрических функций. Данный подход для малых выборок [1] может привести к недозглаживанию, что может быть устранено описанным в разд. 3 способом.

Предположим, что остатки временного ряда (в дальнейшем эмпирические данные) могут быть описаны с помощью регрессионной модели (1), класс регрессионных функций $F = \{f(\cdot, \alpha), \alpha \in \Lambda\}$ которой удовлетворяет условиям теоремы 1. По аналогии с разд. 3 построим оценки среднего риска (24), используя оценки приближения функций класса полиномами наилучшего равномерного приближения (12) и (13). Считаем, что $f(t) \in D^{(n+1)}[a, b]$ и $\max_{[0,1]} |f^{(n+1)}(t)| = \bar{a}_1 2\pi^{n+1}$. Значение $\bar{a}_1 = 101.187$

представляет собой максимальное отклонение эмпирических данных от нуля.

График процесса восстановления функциональной зависимости остатков временного ряда кредитов юридических лиц в АР Крым дан на рис. 3. Приведено оценивание среднего риска (24) в зависимости от n для трех случаев: второе слагаемое отсутствует (рис. 3, а), второе слагаемое задается формулой (22) (рис. 3, б) и формулой (23) (рис. 3, в). Здесь в соответствии с методом упорядоченной минимизации риска оптимальные (в смысле минимизации оценки среднего риска) значения степени аппроксимирующего полинома составляют $n_1 = 3$, $n_2 = 6$ и $n_3 = 5$ соответственно. В качестве модели был принят полином степени $n_2 = 6$. На рис. 3, г пред-

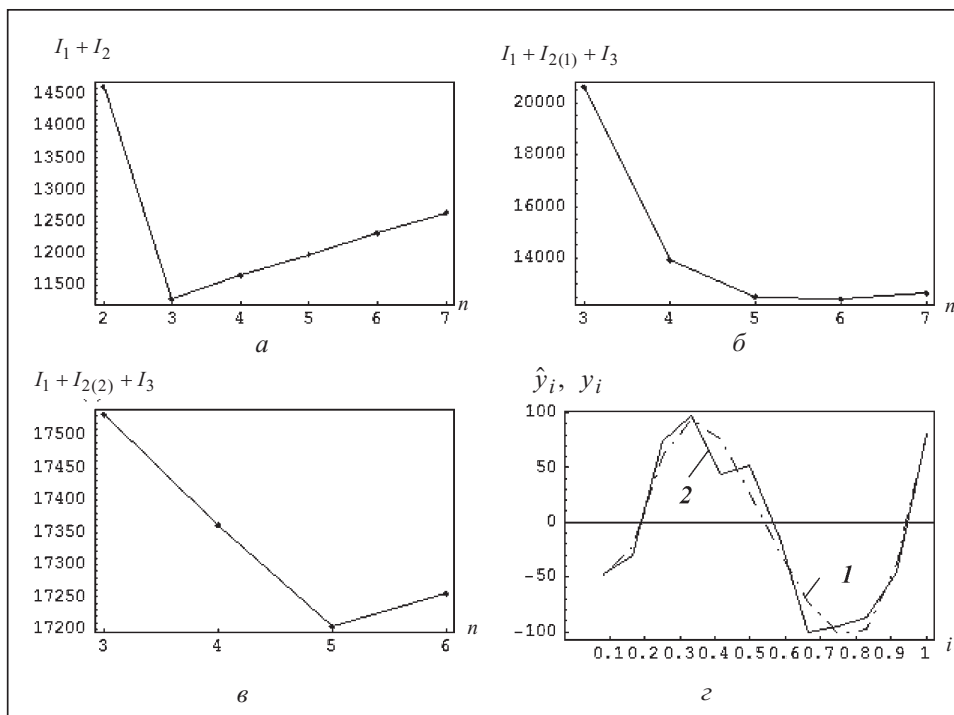


Рис. 3. Графическая реализация процесса восстановления функциональной зависимости остатков временного ряда кредитов

ставлен график смоделированных значений $\hat{y}_i, i = 1, \dots, 12$ (кривая 1) и эмпирических данных $y_i, i = 1, \dots, 12$ (кривая 2).

Таблица 2

Характеристика	Смоделированные значения для i											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	-46.90	-30.85	74.48	96.84	43.62	52.35	-13.41	-101.1	-95.77	-87.36	-46.22	80.14
\hat{y}_i	-53.67	-6.31	51.30	83.60	77.47	36.92	-22.43	-78.75	-109.4	-96.53	-32.22	75.79
RE	-0.14	0.79	0.31	0.13	-0.77	0.29	-0.67	0.22	-0.14	-0.10	0.30	0.05

Значения величин \hat{y}_i , y_i и относительных ошибок RE для $i = 1, \dots, 12$, $n_2 = 6$ даны в табл. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача восстановления функциональной зависимости на основе временных рядов, когда класс регрессоров может быть приближен полиномиальными функциями. Приведены примеры аппроксимации функций полиномами наилучшего равномерного приближения и полиномами Бернштейна. В случае, если класс регрессионных функций задан априорно, использование аппроксимации полиномами Бернштейна позволяет сохранять качественные характеристики исследуемых процессов, что улучшает качество прогнозирования. Аппроксимация полиномами наилучшего равномерного приближения не требует априорного задания класса регрессионных функций (за исключением условий, перечисленных в примерах 1, 2), что существенно расширяет использование указанного подхода на практике.

Доказана равномерная сходимост ь эмпирического функционала риска к теоретическому и оценена ее скорость для случаев, когда класс функций может быть приближен полиномами по всем или лишь по некоторым своим параметрам. Во избежание проблем недоглаживания и перезглаживания предложено использовать метод упорядоченной минимизации риска. Полученные результаты использованы для восстановления функциональной зависимости искусственно смоделированных временных рядов и временного ряда остатков кредитов, предоставленных юридическим лицам в АР Крым после выделения трендовой составляющей. Характеристики качества построенных моделей свидетельствуют о возможности применять предложенную методологию для восстановления временных рядов разной природы и различных видов сложности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vapnik V.N. Estimation of dependences based on empirical data. — New York: Springer Verlag, 1982. — 399 p.
2. Anthony M., Shawe-Taylor J. A result of Vapnik with applications // Discrete Applied Mathematics. — 1993. — № 47 (3). — P. 207–217.
3. Pollard D. Convergence of stochastic processes. — New York: Springer Verlag, 1984. — 215 p.
4. Anthony M. Discrete mathematics of neural networks: Selected Topics. — SIAM, 2001. — 131p.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 630 с.
6. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
7. Теляковский С.А. О скорости приближения функций многочленами Бернштейна // Тр. ИММ. — 2008. — 14, № 3. — С. 162–169.
8. Зражевский О.Г. Методи побудови моделей для довгострокового прогнозування фінансових часових рядів // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2010. — № 1. — С. 123–142.

Поступила 22.06.2010