УДК 631.3

В.С. ЙОЦОВ

ОТ ИНФОРМАТИКИ К ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. III
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА, РЕЗУЛЬТАТЫ, СРАВНЕНИЯ

1. Введение

Все познается в сравнении. Формулы, приведенные в первых двух частях представленного исследования, получены с применением логических выводов в теории чисел и элементарных сопоставлений между средами S_i. Так как изложение материала предназначено преимущественно для специалистов по информатике, то с целью сокращения теоретических выкладок в основной цепи доказательств основные математические выкладки перенесены в заключительную третью часть. С другой стороны, обособление основной теоремы в настоящей работе позволяет осуществить более детальный анализ ее применений. Математические сравнения с известными работами из области также обособлены в представленной работе: заключительной по гипотезе о простых числах-близнецах. В то же время приведенное ниже доказательство теоремы 3.1 и повторение шагов 3 и 4 из теоремы 1.1 позволяют осуществить переход (!) к доказательству и некоторой дополнительной *переформулировке* известной гипотезы Харди-Литлвуда. Теорема 3.1 весьма полезна при доказательстве других известных гипотез из теории чисел. Это основная теорема представленного исследования.

2. Основная теорема

В доказательстве теоремы 1.1 (например, начало шага 4) использовано допущение об асимптотическом равенстве $\pi_{z,y}(x)$ (и соответственно $\#\pi_{z,y}(x)$) при фиксированном шаге прогрессии z и допустимых значениях y (см. первую часть работы). Следующая теорема 3.1 позволяет говорить не только об асимптотическом равенстве количества содержащихся в этом множестве прогрессий простых чисел (при $x \longrightarrow \infty$), но и позволяет их замену на *любом* числовом интервале x с некоторой легко вычисляемой ошибкой.

Пусть ~~M~~ – упорядоченное по возрастанию множество простых чисел p, произвольно выбранных из P. В отличие от $p \in P$, упоминаемых ранее, элементы ~~M~~ не представляют подпоследовательность P, а элементы с разными порядковыми номерами могут совпадать и поэтому они обозначаются m_i: $m_1 \in$ ~~M~~, $m_2 \in$ ~~M~~,... $m_k \in$ ~~M~~, $m_{k+1} \in$ ~~M~~, ... $m_z \in$ ~~M;~~ $m_k = m_{k+1}$. При использовании метода решета Эратосфена все числа, кратные элементам массива ~~M~~, отсеиваются из Z^+, причем при повторениях (одинаковых значениях) простых чисел из ~~M~~ полученное ниже значение g умножается на все повторенные числа. В результате остается множество из $g = \Pi^n{}_{i=1}(m_i - 1)$ прогрессий с шагом $h = \Pi^n{}_{i=1} m_i$ [1]. Каждый из элементов v любой из g прогрессий – число, взаимно простое с h: $(v, h) = 1$.

Используя известные определения из второй части работы, $C_{(\Sigma, v)}$ является частным случаем g, а C_v – частный случай h.

Определение 3.1

Средой $S_{\cancel{M}}$ называется объединение всех полученных вышеописанным отсеиванием g прогрессий с шагом h, причем все числа v из этих прогрессий – взаимно простые с m_i или h, $(v,m_i)=1$, $(v,h)=1$.

Определение 3.2

Средой $\neg S_{\cancel{M}}$ называется объединение из g' прогрессий с шагом h, где $g' = h - g$, причем каждое из чисел v' из $\neg S_{\cancel{M}}$ не является взаимно простым хотя бы с одним из $m_i, (v', m_i) > 1$.

Все v' – числа, отсеянные с применением метода решета с последовательностью отсеивания ~~M~~. Соответственно, v - числа, оставшиеся после этого отсеивания.

Любая из рассмотренных ранее S_i – частный случай $S_{\cancel{M}}$, где ~~M~~ содержит последовательность простых чисел от p_1 до p_q и $p_1 = 2$. Например, в случае $\cancel{M} = \{3,7,11\}$ существуют 100 прогрессий с шагом 231 и несовпадающими первыми элементами <231, все элементы которых $(v,231)=1$. На рис. 3.1 представлен фрагмент прогрессии f из S $(f \le g)$ с элементами $v_{i,f}$ $1 \le I \le 15$, $v_{i,f} < h$, $v_{i+1,f} = v_{i,f} + h$.

$v_{1,f}$ ⌉
$v_{2,f}$ ⌋ +h
$v_{3,f}$
$v_{4,f}$
$v_{5,f}$
$v_{6,f}$
$v_{7,f}$
$v_{8,f}$
$v_{9,f}$
$v_{10,f}$
$v_{11,f}$
$v_{12,f}$
$v_{13,f}$
$v_{14,f}$
$v_{15,f}$
…

Рис. 3.1

	1	7	11	13	17	19	23	29	
0		(7)							1
30						7·7			2
60					7·11				3
90	7·13							7·17	4
120	11·11			7·19			11·13		5
150			7·23			13·13			6
180		11·17					7·29	11·19	7
210		7·31	13·17					8	
240		13·19		11·23		7·37			9
270					7·41	17·17		13·23	10
300	7·43					11·29	17·19	7·47	11
330			11·31	7^3					12
360	19^2		7·53		13·29				13
390	17·23			13·31	11·37		7·59		14
420		7·61			19·23				15
					…				

Рис. 3.2

Лемма 3.1

Если v^* является произведением любых элементов S м, то $v^* \in S$ м.

Доказательство.

Согласно определениям 3.1 и 3.2, $Z^+ = S_{\mathrm{M} \cup \neg} S_{\mathrm{M}}$. Пусть рассматривается $\neg S$ м. Согласно определению 3.2, все числа v', $v' \in \neg S$ м таковы, что $\exists m_i \in M : (\mathrm{v'}, m_i) > 1$. С другой стороны, все простые числа p_j, которые получаются при разложении v^* на простые сомножители, таковы, что $\forall m_i \in M : (p_j, m_i) = 1$. В силу единственности разложения v* на простые числа [3] следует: $\forall m_i \in M : (v^*, m_i) = 1$. По определению 3.2, $v^* \notin \neg S_M$, $v^* \in Z^+$, откуда следует искомое доказательство $v^* \in S_M$.

Лемма 3.2

Все числа $v \in S_M$ – элементы одной из прогрессий из S_M, $\{v_{1,f} + kh\}^{\infty}_{k=1}$, которые делятся на $p(v \vdots p)$, образуют прогрессию $\{v_{L,f} + kph\}^{\infty}_{k=1}$, где $p \in P$, $(p, h) = 1$, L – номер строки из S_M для первого элемента $\{v_{L,f} + kph\}^{\infty}_{k=1}$, такого, что $L \le p$.

Доказательство.

Шаг 1.

Пусть существует такое $v_{L,f}$, что $v_{L,f} \in \{v_{1,f} + kh\}^{\infty}_{k=1}$ и $v_{L,f} \vdots p$. Другими словами, остаток от деления $v_{L,f}$ на p равен нулю; что формализуется следующим образом: $0\left\{\frac{V_{L,f}}{P}\right\} = O$. Производится переход к следующему элементу прогрессии: $v_{L,f+1} = v_{L,f} + h$, причем $0\left\{\frac{V_{L+1,f}}{P}\right\} \ne O$ в силу того, что $0\left\{\frac{v_{L+1,f}}{p}\right\} = 0\left\{\frac{v_{L,f}}{p}\right\} + \frac{h}{p} - \left[\frac{h}{p}\right] = \frac{h}{p} - \left[\frac{h}{p}\right]$>0, где $\left[\frac{h}{p}\right]$ – целая часть– остаток при делении $\frac{h}{p}$. По определению, $(h, p) = 1$, откуда следует $\left[\frac{h}{p}\right] < \frac{h}{p}$.

Следующие $p - 2$ итераций приводят к подобным результатам:

$$O\{\frac{V_{L+2,f}}{p}\} = \frac{2h}{p} - \left[\frac{2h}{p}\right] > 0,$$

$$0\left\{\frac{v_{L+p-1,f}}{p}\right\} = (p-1)\frac{h}{p} - \left[(p-1)\frac{h}{p}\right] > 0,$$

т.к. все положительные целые числа $< p$ – взаимно простые с p. Наконец,

$$0\left\{\frac{v_{L+p,f}}{p}\right\} = \frac{ph}{p} - \left[\frac{ph}{p}\right] = 0.$$

При подстановке $v_{L+p,f}$ на место $v_{L,f}$ по индукции доказывается, что все члены искомой прогрессии $\{v_{L,f} + kph\}^{\infty}_{k=1}$ делятся на p.

Шаг 2.

Если искомое $v_{L,f} > ph$, то $v_{L-p,f} > 0$ и, следовательно, $v_{L,f}$ не удовлетворяет условию минимальности первого члена прогрессии $\vdots p$. В итоге $v_{L,f} - ph \le 0$, по определению искомой прогрессии $\{v_{L,f} + kph\}^{\infty}_{k=1}$ или, что то же самое, $l \le p$.

Лемма 3.3

Пусть рассматриваются S_M и p – простое число из строки j, h – шаг прогрессий из S_M (их ровно g), $(p,h)=1$. Тогда все числа $\vdots p$ из S_M образуют такой *цикл* p, что на отрезке между строками j и $j+p-1$ из S_M каждый из столбцов (прогрессий с шагом h) содержит одно и только одно число $\vdots p$, и порядок обхода столбцов повторяется через каждые p строк.

Доказательство.

Шаг 1.

Пусть рассматриваются первые элементы всех g прогрессий из S_M, т.е. $v_{1,f}$, $1 \le f \le g$, $v_{1,f} < h$. Тогда $ph_{1,f} < ph$, т.е. результаты умножения первых g элементов расположены в S_M между строками j и $j+p-1$.

Шаг 2.

Допустим, что прогрессия $\{v_{1,f} + kh\}^{\infty}_{k=1}$ такая, что в ней на интервале между строками j, $j+p-1$ есть хотя бы два числа $\vdots p$. Однако в силу леммы 3.2 между этими двумя числами $\vdots ph$. Следовательно, допущение из шага 2 опровергается, т.к. $\left(p+1-\frac{1}{p}\right) \vdots p$.

Шаг 3.

Так как в $S_M - g$ столбцов и соответственно g таких чисел $v_{L,f}$, что $v_{L,f} \vdots p$, то в силу принципа Дирихле (общеизвестного принципа ящиков) и при учете результатов из шага 2 доказано, что в каждом из столбцов на заданном интервале содержится одно и только одно число, кратное p. Условие о повторяемости периода обхода следует из леммы 3.2.

В соответствии с леммами 3.1, 3.2 и 3.3 можно дать расширенную трактовку определения 1.5 в определении 3.3.

Пусть рассматривается S_M, состоящая, согласно определению 3.1, из g столбцов с шагом h.

Определение 3.3

Пусть $p \in S_M$, $v \in S_M$. **Циклом** p (согласно лемме 3.1) называется множество $S_M \cap \{vp : v = v_{1,1}, v_{1,2...}\}$ (где $v_{1,1} = 1$). Согласно лемме 3.2, цикл p имеет повторяющийся рисунок с периодом p строк. Согласно лемме 3.3, каждый из периодов обхода столбцов состоит из g чисел, распределенных по одному на каждый столбец из S_M.

Теорема 3.1

Независимо от выбора любых двух прогрессий с первыми членами $v_{1,f1} \in S_M$ и $v_{1,f2} \in S_M$, $\pi_{h,f1}(x) \approx \pi_{h,f2}(x)$, причем знак $\approx$ означает ошибку не более $\pi(\sqrt{x}) - k_p$, где k_p – количество несовпадающих простых чисел – элементов ~~M.~~

Доказательство.

Шаг 1.

Пусть рассматривается цикл любого простого числа $p \in S_M$. По определению 3.3, цикл р обходит в некотором порядке все столбцы из S_M, и через p строк порядок обхода повторяется. В цикле p содержится только одно простое число $(p = pv_{1,1} = p1)$, все остальные элементы – составные числа.

Шаг 2.

Пусть рассматриваются все циклы простых чисел (шаг 1) на любом интервале $[1, x]$. Очевидно, многие из составных чисел входят в несколько циклов одновременно. Например, при $M = \{2,3,5\}(S_M = S_5)$ число 1001 делится на 7, 11, 13 (рассматриваются простые числа – делители) и входит в три описанных цикла p. Для устранения двузначности толкования из нескольких простых делителей числа выбирается наименьший, например, при $S_M = S_5$ число 1001 входит только в цикл 7.

При вышеупомянутом ограничительном условии подсчет составных чисел из любого цикла р начинается со значения p^2. Общее количество простых чисел на интервале $[1, \sqrt{x}]$ составляет $\pi(\sqrt{x})$, а для случая S_M из него необходимо вычесть отсеянные простые числа (их ровно k_p).

Пусть производится подсчет составных чисел в двух рассматриваемых столбцах $S_M : \{v_{1,f1} + kh\}^{\infty}_{k=1}$ и $\{v_{1,f2} + kh\}^{\infty}_{k=1}$. При вышеупомянутых условиях подсчета все искомые составные числа $\leq x$ получаются последовательным пересчетом элементов прогрессий, получающихся при пересечении циклов p со столбцами $\{v_{1,f1} + kh\}^{q1}_{k=1}$ и $\{v_{1,f2} + kh\}^{q2}_{k=1}$, где соответствующие q вводятся для соблюдения условия $\leq x$. Пересчет начинается с чисел, кратных наименьшему простому числу из S_M и заканчивается пересчетом чисел, кратных наибольшему простому числу $\leq \sqrt{x}$ (если такие существуют в данном столбце при условии $\leq x$).

Шаг 3.

Из вышеупомянутого описания пересчета составных чисел $\leq x$ в двух прогрессиях следует тривиальный факт, что в худшем случае на интервале $[1, x]$ в одну из прогрессий входят на $\pi\left(\sqrt{x}\right) - k_p$ больше составных чисел (и соответственно простых чисел), чем в другую.

Полученная искомая оценка из условия теоремы – очень грубая и завышенная оценка, т.к. она получена при грубом допущении, что на столбце $\{v_{1,f1} + kh\}_{k=1}^{\infty}$ каждая из прогрессий, кратных p, (пересечение цикла р со столбцом) содержит (при условиях пересчета из шага 2) на одно составное число больше по сравнению со столбцом $\{v_{1,f2} + kh\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, что никакая из этих прогрессий не может содержать на 2, 3... составных чисел больше, чем прогрессия чисел, кратных тому же р из любого другого столбца, т.к. это нарушает условия леммы 3.3.

Следствие 3.1

$\pi_{h,f1}(x) \sim \pi_{h,f2}(x)$.

Ниже переносятся все объяснения из первой работы в связи со следующими очевидными фактами:

$\pi_{h,f1}(x) \approx \dfrac{(\pi(x) - k_p)}{g}$, $\pi_{h,f2}(x) \approx \dfrac{(\pi(x) - k_p)}{g}$ (Второй вариант: использование фрагментов из доказательства теоремы 3.1). При допущении из теоремы 3.1, что первая из прогрессий содержит максимум составных чисел, а вторая – минимум, следует, что $\pi_{g,f2}(x) = \pi_{h.f1}(x) + \pi(\sqrt{x}) - k_p$. Тогда $\lim_{x\to\infty}(\pi(\sqrt{x})-k_p)/(\pi(x)-k_p)/g)=0$. Так как с ростом x конечные составляющие k_p и g становятся пренебрежимо малы, то формулу можно представить в упрощенном виде: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\pi\left(\sqrt{x}\right)}{\pi(x)} = 0$.

Следствие 3.1 представляет связь теоремы 3.1 с известной теоремой Дирихле, т.к. в ней представлены все возможные прогрессии с взаимно простыми первым членом и шагом пр огрессии.

3. Сравнения с гипотезой Харди – Литлвуда

Согласно гипотезе Харди-Литлвуда, в развитии Х.Ризеля любая допустимая комбинация [1] $P_x\left(p, p + d_1, p + d_{2..., p+d_{z-1}}\right)$ из множества z простых чисел удовлетворяет формуле (3.1) и повторяется бесконечное число раз, а вычисления k_z приводятся в [1]. На рис. 3.2 представлен первый период цикла 7 в S_5 для иллюстрации недопустимого расположения простых чисел. Например, недопустимо говорить о гипотезе в связи с $P_x(p, p+6, p+11, p+13, p+17, p+19, p+23, p+29)$, т.к. такое расположение встречается всего 1 раз в строке 1 в силу свойств цикла 7.

$$P_x(p, p+d_1, \ldots, p+d_{z-1}) = K_z \frac{x}{(\ln x)^z} \ . \qquad (3.1)$$

В частности, для случая гипотезы о простых числах-близнецах:

$$P_x(p, p+2) = 1.320323632 \frac{x}{(\ln x)^2} \ . \qquad (3.2)$$

Приведенные до сих пор доказательства (теоремы 1.1, 1.2, 2.3, 3.1 для обоснования шагов 2, 3 и 4 из теоремы 1.1) и предельные соотношения из работы [2] (для обоснования результатов, приводящих к теореме 2.3) позволили вывести доказательство, близкое с (3.2):

$$P_x(p, p+2) = 1.320323632 \frac{(\pi(x))^2}{x} \ . \qquad (3.3)$$

При использовании известного соотношения $\pi(x) \sim \frac{\mathrm{x}}{\ln} x$ несложно произвести переход от (2.3) к (2.2), т.к. они асимптотически равны. Однако асимптотическое равенство не означает, что обе формулы с одинаковым успехом могут использоваться на любом конечном интервале.

Слабое место приведенных результатов в связи с гипотезой Харди-Литлвуда: вычисление k_z. Они вычислялись для каждого конкретного случая поотдельности, взаимосвязь между их значениями не объяснялась, и часть из них оставалась неизвестной. Приведенные до сих пор выводы и доказательства позволили решить этот вопрос. Возвращаясь к рис. 3.2, нетрудно увидеть, что $d = 2$ появляется между 3 парами столбцов в S_5 и далее в соответствии с табл. 3.1.

Таблиця 3.1

d	количество пар столбцов	первые пары чисел в S_5
2	3	11-13, 17-19, 29-31
4	3	7-11, 13-17, 19-23
6	6	1-7, 7-13, 11-17, 13-19, 17-23, 23-29
8	3	11-19, 23-31, 29-37
10	4	1-11, 7-17, 13-23, 19-29
12	6	1-13, 7-19, 11-23, 17-29, 19-31, 29-41
14	3	17-31, 23-37, 29-43
16	3	1-17, 7-23, 13-29
18	6	1-19, 11-29, 13-31, 19-37, 23-41, 29-47
20	4	11-31, 17-37, 23-43, 29-49
22	3	1-23, 7-29, 19-41
24	6	7-31, 13-37, 17-41, 19-43, 23-47, 29-53
26	3	11-37, 17-43, 23-49
28	3	1-29, 13-41, 19-47
30	8	1-31, 7-37, 11-41, 13-43, 17-47, 19-49, 23-53, 29-59
32	3	11-43, 17-49, 29-61

34	...	...

При сравнении $d = 2$ и $d = 32$ становится ясно, что количество пар столбцов повторяется с периодом 30 (к правым числам из пар в правом столбце добавляется 30). Следует отметить, что при $d \vdots 30$ число пар столбцов *не меньше восьми*. Из таблицы видны другие интересные зависимости, однако объем данной работы не позволяет рассмотреть все математические подробности.

В соответствии с изложенным в табл. 3.1 можно получить значение для любой пары простых чисел, например:

$$P_x(p, p+36) = \frac{6}{3} 1.320323632 \frac{(\pi(x))^2}{x}, \qquad (3.4)$$

т.е. (3.4) содержит в 2 раза больше простых чисел по сравнению с (3.3), причем с ростом x это соотношение стремится в точности к двум. Вывод формулы (3.4) проиллюстрировал полноту решений в связи с проблемой о количестве пар простых чисел на любом числовом интервале.

Из доказательства теоремы 1.1 со всей очевидностью следует, что процесс вывода формул для *допустимых n*-торок простых чисел можно продолжить до бесконечности. Например, для случая троек простых чисел достаточно использовать формулу из шага 4 теоремы 1.1 (1.14), определение 2.5 для формирования $K^{\{3\}}{}_{v,d}$ и в соответствии с [2] получить обоснование и формулу для минимального случая троек (минимального в силу особенностей, отмеченных при доказательстве лемм 2.1 и 2.2. Вопросы изучения всех случаев для троек простых чисел решаются с применением индукции и построением таблиц, подобных табл. 2.1).

Ход вывода формул для получения наихудшего (с минимумом n-торок, в частности, троек простых чисел) повторяет доказательства и вывод формул от (2.3) до (2.11). При выводе формул нет необходимости даже в обобщении от S_i к S_M , т.к. порядок отсеивания не имеет значения:

$$C_{v,3} = \prod_{p_i=5}^{v} (p_i - 3); \quad v \in \mathrm{P}; v > 3. \qquad (3.5)$$

В частности, $C_{5,3} = 2$; $C_{7,3} = 8$; $C_{11,3} = 64$; $C_{13,3} = 640$...

Для S_i верны следующие соотношения. В S_5 :

$$C_{5,3} \frac{(\pi_{C(\Sigma,5),y}(x))^3}{(X_y)^2} = 2\frac{\left(\frac{\pi(x)}{2\cdot 4}\right)^3}{\left(\frac{x}{2\cdot 3\cdot 5}\right)^2} = 3\{\frac{3\cdot 5\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 4}\}\frac{(\pi(x))^3}{x^2} = k_3^{\{3\}}\{\frac{(5-2)\cdot 5\cdot 5}{(5-1)^3}\}\frac{(\pi(x))^2}{x}. \qquad (3.6)$$

.Проверка показывает, что один из минимальных случаев формируется при $P_x(p, p+2, p+4)$. Первые тройки чисел: 11-13-17 и 17-19-23; $C_{5,3} = 2$.

Пусть рассматривается S_7 :

$$C_{7,3}\frac{(\pi_{C(\Sigma,7),y}(x))^3}{(X_y)^2}=8\frac{\left(\frac{\pi(x)}{2\cdot4\cdot6}\right)^3}{\left(\frac{x}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right)^2}=k_5^{\{3\}}\{\frac{(7-3)\cdot7\cdot7}{(7-1)^3}\}\frac{(\pi(x))^2}{x}. \qquad (3.7)$$

Пусть рассматривается S_{11}:

$$C_{11,3}\frac{(\pi_{C(\Sigma,11),y}(x))^3}{(X_y)^2}=64\frac{\left(\frac{\pi(x)}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right)^3}{\left(\frac{x}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11}\right)^2}=k_7^{\{3\}}\{\frac{(11-3)\cdot11\cdot11}{(11-1)^3}\}\frac{(\pi(x))^2}{x}. \qquad (3.8)$$

В итоге по индукции доказывается аналог леммы 2.2:

$$k_u^{\{3\}}=\frac{215}{64}\cdot\prod_{p_i=7}^{\infty}\frac{(p-3)\cdot p^2}{(p-1)^3}. \qquad (3.9)$$

Нет необходимости вычисления (3.9). Результаты совпадают с гипотетическим выводом K_3 в [1], (3.1). Повторяя (3.5)-(3.9) до бесконечности (см. леммы 2.1 и 2.2), доказываются все случаи K_z из (3.1) и [1]. В связи с применением (3.5) в обобщенном варианте (3.10) следует отметить:

$$C_{v,z}=\prod_{p_i>v}^{v}(p_i-z);\quad \mathrm{p_i}\in\mathrm{P};\mathrm{v}\in\mathrm{P};p_i>v>z. \qquad (3.10)$$

В общем случае формула для z простых чисел состоит из такого же произведения дробей с z элементами в числителе и $(z-1)^z$ в знаменателе и представляется в общем виде (3.11).

$$P_x(p,p+d_1,\dots p+d_{z-1})=K_z\frac{(\pi(x))^z}{x^{z-1}}. \qquad (3.11)$$

В связи с ростом z до бесконечности появляется проблема чисто практического характера. Например, для вывода K_z невозможно использовать $S_i:i<z$. В связи с этим производятся исследования для обоснования вывода K_z из работы [1].

В работе [2] представлена мотивировка вывода предельных формул типа (2.12) или (3.9). На каждом шаге вывода (например, см. (2.11)) производится переход от S_{i-1} к S_i и формируются $k^{\{2\}}{}_i$ (или в общем случае $k^{\{z\}}{}_i$) со следующими свойствами. Как показано в [2], $k^{\{z\}}{}_i$ является легко вычислимым и усредненным (по частоте появления и процентному соотношению простых чисел) значением в S_i. Компоненты $k^{\{z\}}{}_i$ легко проиллюстрировать на примере $k^{\{2\}}{}_5$ (см. рис. 3.2). Пусть на фрагменте из 15 строк (рис. 3.2) подсчитывается количество пар простых чисел между столбцами {11} и {13}: это 11-13, 41-43, 71-73, 101-103, 191-193, 281-283, 311-313, 431-433 (8). Затем пусть правила сопоставления между столбцами изменяются следующим образом: сопоставляемые числа из столбца {11} - те же, а к числам из {13} добавляется +30 (геометрически все элементы {13} "приспущены" на 1 шаг вниз при сопоставлениях). Тогда пар простых чисел должно получиться больше, т.к. все числа ⋮7 попадают в одну строку сопоставлений: 13-41, 43-71, 73-101, 103-131, 163-191, 223-251, 283-311, 373-

401, 433-461 (9). Чем больше совпадений кратных чисел при подобном изменении условий сопоставлений, тем больше количество наблюдаемых на (достаточно большом) интервале пар простых чисел. Если в примере рассмотреть интервал из 100 строк, то во втором случае количество пар простых чисел будет приблизительно на $\frac{1}{6}$ больше.

С ростом i до бесконечности в соответствующей среде содержится все меньший процент составных чисел (см. раздел 12 из второй работы), т.к. количество отсеянных составных чисел возрастает и соответственно $k^{\{z\}}_i$ уменьшается и с ростом i стремится к искомому предельному значению.

4. Дальнейшие исследования

В предыдущем разделе показано, что существуют по меньшей мере две возможности формирования K_z для любого допустимого расположения z простых чисел: подход Ризеля [1] или повторение выводов из предыдущей работы, приводящее к решению предельных формул, например, (2.8)-(2.12); (3.9)… При втором способе появляется возможность исследования, что произойдет, если построение предельных формул производится до *бесконечности.*

В силу доказательств лемм 2.1 и 2.2, K_z – минимальное значение (случай $K_z = 0$ не входит в рассмотрение, т.к. это – недопустимое расположение [1]). Вопрос о максимальном значении при расположении z простых чисел не имеет количественного решения, т.к. максимального числа не существует. В силу свойств из раздела 12 из второй работы не существует такого числа N, чтобы $N \cdot K_z$ было максимальным значением расположения z простых чисел при $z \to \infty$. Исследование подобных вопросов связано с построением и дальнейшем исследованием таблиц, подобных табл. 3.1, причем в качестве среды удобно использовать S_5.

5. Заключение

В работе доказана теорема 3.1. – основная теорема исследования. Ее применение позволяет получить новые доказательства известной теоремы Дирихле, расширить их для случая взаимозаменяемости соответствующих $\#\pi...$ для прогрессий с одинаковым шагом с известной ошибкой $o \to 0$ при $x \to \infty$, а также завершить даказательство теоремы 2.3 (гипотеза о простых числах-близнецах). Приведены доказательства и сравнения в связи с гипотезой Харди-Литлвуда, что любое допустимое $P_x\left(p, p+d_1, p+d_2..., p+d_{z-1}\right) \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Riesel H. Prime Numbers and Computer Methods for Factorization. – Birkhauser, Boston, 1985. – 464 p.
2. Йоцов В. Об одном подходе к поиску и оценке доказательств // Искусственный интеллект (НАН Украины). – 1999. – № 2. – С. 97 – 103.
3. Ireland K., Rosen M. A Classical Introduction to Modern Number Theory. – Springer-Verlag, New York, 1982. – 416 p.