УДК 519.21; 681.513

В.К. ЯСИНСКИЙ, Л.И. ЯСИНСКАЯ, С.В. АНТОНЮК

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ПУАССОНОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Ключевые слова: *приближенный синтез, оптимальное управление, квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения, малый параметр, пуассоновские возмущения.*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На вероятностном пространстве (Ω, F, P) с фильтрацией $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, определено сильное решение $x(t) \equiv x(t, \omega) \in R^n$ системой квазилинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений Ито–Скорохода [1–7] (КСДФУ$_\infty$) $\forall t \in [0, T]$

$$dx(t) = [\varepsilon f(t, x_t) + B(t)u(t)]dt + d\xi(t), \tag{1}$$

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t) + \int_Z c(t, z)\tilde{\nu}(dz, dt) \tag{2}$$

и начальными условиями

$$x(t) = \varphi_0(t), \ -\infty < t \leq 0, \ u \in \mathbf{U} \subset R^l. \tag{3}$$

Здесь $\varphi_0 \in \mathbf{D}_\infty \equiv \mathbf{D}((-\infty, 0])$ — пространство Скорохода непрерывных справа функций, которые имеют левосторонние границы [3, 8, 9], векторы-столбцы a, c, u измеримы и ограничены на $[0, T]$; матрицы-функции $B(t)$ и $b(t)$ размерности $n \times n$ состоят из измеримых и ограниченных функций $B_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$; функционал $f: [0, T] \times \mathbf{D}_\infty$ измерим; $w(t)$ — n-мерный винеровский процесс, который не зависит от центрированой пуассоновской меры $\tilde{\nu}(dz, dt) \equiv \nu(dz, dt) - \Pi(dz)dt$ [3].

Допустим, что существует такая неотрицательная неубывающая на τ функция $r(t, \tau)$, что выполняются условия равномерной ограниченности по $t \in [0, T]$

$$|f(t, \varphi)|^2 \leq a_0^2 + \int_0^\infty |\varphi(-\tau)|^2 \, dr(t, \tau) \tag{4}$$

и условие Липшица: $\forall \varphi, \psi \in \mathbf{D}_\infty$

$$|f(t, \varphi) - f(t, \psi)|^2 \leq \int_0^\infty |\varphi(-\tau) - \psi(-\tau)|^2 \, dr(t, \tau); \tag{5}$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\infty dr(t, \tau) < \infty. \tag{6}$$

Инфинитезимальный оператор на решениях (1)–(3) вычисляется по формуле [4] (с. 156–162; теоремы 2.1.2; 2.1.3; следствие 2.1.2) от функционала $v \in \mathbf{V}$ (множество функционалов $v: [0, T] \times \mathbf{D} \to R^1$, дважды непрерывно-дифференцированых по x и один раз по t):

$$\mathcal{L}v(t,\varphi,u,\varepsilon)v(t,\varphi)=\mathcal{L}_0 v_\varphi(t,x)+[\varepsilon f(t,\varphi)+B(t)u]'\nabla v_\varphi(t,x), \tag{7}$$

для которого

$$\mathcal{L}_0 v_\varphi(t,\varphi)=\frac{\partial}{\partial t}v_\varphi+a'(t)\nabla v_\varphi(t)+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}[b'(t)\nabla^2 v_\varphi(t,x)b(t)]+$$
$$+\int_Z [v(t,x_t+c(t,z))-v(t,x_t)-(\nabla v(t,x_t),c(t,z))\Pi(dz). \tag{8}$$

Здесь $'$ — операция транспонирования вектора или матрицы; $\nabla v\equiv\left(\frac{\partial v}{dx_1},\frac{\partial v}{dx_2},\ldots,\frac{\partial v}{dx_n}\right)'$; $\nabla^2 v\equiv\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right)$, $i,j=\overline{1,n}$; $\mathrm{Sp}A$ — след матрицы A; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение.

Рассмотрим проблему минимизации функционала качества задачи оптимального управления

$$J(u)=\mathbf{E}_{\varphi_0}\{x'(T)M_0(t)x(T)+\int_0^T u'(t)M_1(t)u(t)+$$
$$+x'(t)M_2(t)x(t)dt\}, \tag{9}$$

где матрицы $M_1(t)$, $M_2(t)$ измеримы и равномерно ограничены, $M_1(t)$ равномерно по t положительно определена, а $M_0(t)$, $M_2(t)$ — неотрицательно-определенные матрицы.

Множество допустимых управлений $\mathbf{U}$ — это множество случайных процессов $\gamma(t,\omega)$, согласованных с потоком σ-алгебр F_t и таких, что

$$\mathbf{E}_{\varphi_0}\left\{\int_0^T |\gamma(t)|^2\,ds\right\}\le K(1+||\varphi||_0^2), \tag{10}$$

где

$$||\varphi_0||\equiv\sup_{-h\le\theta\le 0}|\varphi_0(\theta)|^2. \tag{11}$$

Решение задачи оптимального управления для (1)–(3), (9) сводится [см. 4, 5] к исследованию уравнения Беллмана

$$\mathcal{L}_0 v_\varphi(t,x)+\varepsilon f'(t,\varphi)\nabla v_\varphi(t,x)+x'M_2(t)x=$$
$$=\frac{1}{4}(\nabla v_\varphi(t,x))'B_1(t)\nabla v_\varphi(t,x); \tag{12}$$

$$v(T,\varphi)=x'M_0(T)x;\quad x=\varphi(0);\quad B_1\equiv BM_1^{-1}(t)B'. \tag{13}$$

Оптимальное управление $u^0(t,\varphi)$ при виполенении некоторых условий для решения задачи (12), (13) можно найти в виде [10]

$$u^0(t,\varphi)=-\frac{1}{2}M_1^{-1}(t)B'(t)\nabla v_\varphi(t,x). \tag{14}$$

Построим последовательные приближения к оптимальному управлению $u^0(t,\varphi)$, установим оценки погрешности для задачи управления (1)–(3), (9).

2. ВЫБОР НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ К ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ

При $\varepsilon=0$ уравнения (12), (13) имеют точное решение [10]:

$$v_0(t,\varphi)=x'P_0(t)x+2x'P_1(t)+P_2(t),$$

где $x=\varphi(0)$. Здесь матрица $P_0(t)$, вектор $P_1(t)$ и функция $P_2(t)$ определяются краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [10, 11]:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}+M_2=P_0'B_1P_0;\quad P_0(T)=M_0; \tag{15}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt}+P_0a=P_0B_1P_1;\quad P_1(T)=0; \tag{16}$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt}+2a'P_1+Sp[b'P_0b]+\int_Z c'P_0c\Pi(dz)=P_1'P_1P_1;\quad P_2(T)=0. \tag{17}$$

При этом $P_0(t)$, $P_1(t)$ и $P_2(t)$, как решения системы (15)–(17), равномерно ограничены по t и такие, что матрица

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} \geq 0_{(n+1)\times(n+1)}$$

(далее будем обозначать неотрицательную определненость матрицы размерности $(n+1)\times(n+1)$ на векторах $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)'$), где $\forall x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \in R^n$, $P_0 \geq 0_{n\times n}$; $P_2 \geq 0$. Тогда оптимальное управление при $\varepsilon=0$ задачи (1)–(3), (9) имеет вид [7]

$$u_0^0(t,\varphi)=-M_1^{-1}B'(t)[P_0(t)\varphi(0)+P_1(t)]. \tag{18}$$

Пусть $x_\varepsilon^u(t)$ — решение системы (1)–(3) при $\varepsilon \geq 0$ с управлением u, а $J_\varepsilon(u)$ — функционал

$$J_\varepsilon(u)\equiv \mathbf{E}_{\varphi_0}\{(x_\varepsilon^u(T))'M_0x_\varepsilon^u(T)+\int_0^T [u'(s)M_1(s)u(s)+$$

$$+(x_\varepsilon^u(s))'M_2(s)x_\varepsilon^u(s)]ds\}. \tag{19}$$

Теорема 1. Управление $u_0^0(t,\varphi)$ (18) является нулевым приближением к оптимальному управлению $u^0(t,\varphi)$ задачи (1)–(3), (9) в смысле выполнения условия

$$0\leq J_\varepsilon(u_0^0(t,\varphi)-v(\varphi_0))\leq \varepsilon K_0, \tag{20}$$

где $K_0=K(1+||\varphi_0||_0^{\ 2})$; $v(\varphi_0)=\inf\limits_{u\in U} J_\varepsilon(u)$.

Доказательство. В качестве вспомогательной задачи управления [1] рассмотрим исходную систему (1)–(3), (9) при $\varepsilon=0$. Тогда согласно лемме 1 (см. [8]) имеем

$$0\leq J_\varepsilon(u_0^0-v(\varphi_0))\leq 2\rho(J_\varepsilon, J_0), \tag{21}$$

где $\rho(J_\varepsilon, J_0)\equiv \sup\limits_{u\in U}|J_\varepsilon(u)-J_0(u)|$, $\mathbf{U}$ — множество случайных процессов $\gamma(t)\equiv\gamma(t,\omega)\in R^n$, согласованных с потоком σ-алгебр $\{\mathrm{F}_t\subset \mathrm{F}\}$, для которых

$$\int_0^T \mathbf{E}_{\varphi_0}\{|\gamma(t)|^2\}dt\leq K_0. \tag{22}$$

Докажем сначала, что $\forall\gamma\in\mathbf{U}$ справедлива оценка

$$\mathbf{E}_{\varphi_0}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}|x_\varepsilon^\gamma(t)|^2\right\}\leq K_0. \tag{23}$$

Переписав систему (1), (2) в интегральной форме, легко получить оценку квадрата модуля решения через интегралы

$$|x_{\varepsilon}^{\gamma}(\tau)| \le K \Biggl\{ |x(0)|^2 + \varepsilon^2 \left| \int\limits_0^{\tau} f(s, x_{\varepsilon s}^{\gamma}) ds \right|^2 +$$

$$+\left| \int\limits_0^{\tau} B(s)\gamma(s) ds \right|^2 + \left| \int\limits_0^{T} a(s) ds \right|^2 + \left| \int\limits_0^{T} b(s) dw(s) \right|^2 + \left| \int\limits_0^{\tau} \int\limits_Z c(s, z)\widetilde{\nu}(dz, ds) \right|^2 \Biggr\}.$$

Откуда, учитывая условия (4)–(6), ограниченность коэфициентов (1), (2) и свойства стохастических интегралов [3], можно получить неравенство для второго момента решения задачи (1)–(3):

$$\mathbf{E}_{\varphi_0} \left\{ \sup_{0 \le t \le T} |x_{\varepsilon}^{\gamma}(t)|^2 \right\} \le K[1 + ||\varphi_0||^2 +$$

$$+ \int\limits_0^t \mathbf{E}_{\varphi_0} \{|\gamma(s)|^2\} ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^h \mathbf{E}_{\varphi_0} \{|x_{\varepsilon}^{\gamma}(s - \tau)|^2\} dr(s, \tau) ds].$$

Если учесть справедливость очевидной оценки

$$\mathbf{E}_{\varphi_0} \left\{ \sup_{-\tau \le \tau \le s} |x_{\varepsilon}^{\gamma}(\tau)|^2 \right\} \le ||\varphi_0||^2 + \mathbf{E}_{\varphi_0} \left\{ \sup_{0 \le \tau \le s} |x_{\varepsilon}^{\gamma}(\tau)|^2 \right\},$$

и оценку (22), то получим неравенство

$$\mathbf{E}_{\varphi_0} \left\{ \sup_{-\tau \le \tau \le s} |x_{\varepsilon}^{\gamma}(\tau)|^2 \right\} \le K \left[1 + ||\varphi_0|| + \int\limits_0^t \mathbf{E}_{\varphi_0} \left\{ \sup_{0 \le \tau \le s} |x_{\varepsilon}^{\gamma}(\tau)|^2 \right\} ds \right].$$

Используя неравенство Гронуолла–Беллмана, имеем

$$\mathbf{E}_{\varphi_0} \left\{ \sup_{0 \le t \le T} |x_{\varepsilon}^{\gamma}(t) - x_0^{\gamma}(t)|^2 \right\} \le \varepsilon^2 K_0. \tag{24}$$

Далее, учитывая (23), получаем оценку

$$J_{\varepsilon}(\gamma) - J_0(\gamma)| = \Biggl| \mathbf{E}_{\varphi_0} [(x_{\varepsilon}^{\gamma}(T) - x_0^{\gamma}(T))' M_0 (x_{\varepsilon}^{\gamma}(T) + x_0^{\gamma}(T)) +$$

$$+ \int\limits_0^T (x_{\varepsilon}^{\gamma}(s) - x_0^{\gamma}(s))' M_2(s)(x_{\varepsilon}^{\gamma}(s) +) ds] \Biggr| \le$$

$$\le K \left[\mathbf{E}_{\varphi_0} \left\{ \sup_{0 \le t \le T} |x_{\varepsilon}^{\gamma}(t) + x_0^{\gamma}(t)|^2 \right\} \mathbf{E}_{\varphi_0} \left\{ \sup_{0 \le t \le T} |x_{\varepsilon}^{\gamma}(t) - x_0^{\gamma}(t)|^2 \right\} \right]^{1/2} \le \varepsilon K_0.$$

Осюда, учитывая (21), верно неравенство (20). Далее нужно доказать, что управление $u_0^0(t, \varphi)$ из $\mathbf{U}$, т.е. оно удовлетворяет (23). Действительно,

$$\int\limits_0^T \mathbf{E}_{\varphi_0} \{|u_0^0(t, x_{\varepsilon t}^{u_0^0})|^2\} dt = \int\limits_0^T \mathbf{E}_{\varphi_0} \{| M_1^{-1}(t) B'(t)(P_0(t) x_{\varepsilon}^{u_0^0}(t) +$$

$$+P_1(t))|\}dt \le K(1+\int_0^T \mathbf{E}_{\varphi_0}\{|x_\varepsilon^{u_0^0}(t)|^2\}dt),$$

где $x_\varepsilon^{u_0^0}(t)$ — решение уравнения

$$dx_\varepsilon^{u_0^0}(t)=[\varepsilon f(t,x_{\varepsilon t}^{u_0^0})-B_1(t)(P_0(t)x_\varepsilon^{u_0^0}(t)+P_1(t))]dt+$$

$$+a(t)dt+b(t)dw(t)+\int_Z c(t,z)\widetilde{\nu}(dz,dt).$$

Поэтому $x_\varepsilon^{u_0^0}(t)$ удовлетворяет оценке вида (23). Таким образом, управление $u_0^0(t,\varphi)$ удовлетворяет (22), что и доказывает теорему 1.

3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ *k*-ГО ПРИБЛИЖЕНИЯ К ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ

Алгоритм построения k-го приближения к оптимальному управлению задачи (1)–(3), (9) в общем виде описан в [8].

Здесь величины v, $\mathcal{L}$ и G, что входят в уравнение Беллмана

$$\mathcal{L}(t,\varphi,u^0,\varepsilon)v(t,\varphi)+G(t,\varphi,u^0,\varepsilon)=0, \tag{25}$$

$$v(T,\varphi)=F(\varphi,\varepsilon),$$

для функционала качества $J(u)\equiv J^u(0,\varphi_0)$, где

$$J^u(t,\varphi)=\mathbf{E}_{t,\varphi}\{F(x_T^u(\varepsilon))+\int_t^T G(s,x_s^u,u(s,x_s^u),\varepsilon)ds\},$$

находятся в виде [8]

$$v(t,\varphi)=v_0(t,\varphi)+\varepsilon v_1(t,\varphi)+\varepsilon^2 v_2(t,\varphi)\ldots,$$

$$\mathcal{L}(t,\varphi,u^0,\varepsilon)=\mathcal{L}_0(t,\varphi)+\varepsilon\mathcal{L}_1(t,\varphi)+\varepsilon^2\mathcal{L}_2(t,\varphi)\ldots, \tag{26}$$

$$G(t,\varphi,u^0,\varepsilon)=G_0(t,\varphi)+\varepsilon G_1(t,\varphi)+\varepsilon^2 G_2(t,\varphi)\ldots$$

Если подставить (26) в (24) и приравнять к нулю коэффициенты при различных степенях ε, то получим

$$\sum_{j=0}^{i}\mathcal{L}_{i-j}(t,\varphi)v_j(t,\varphi)+G_i(t,\varphi)=0;\ \ i=0,1,2,\ldots, \tag{27}$$

$$v_0(T,\varphi)=F(\varphi,\varepsilon),\ \ v_i(T,\varphi)=0,\ i=0,1,2,\ldots.$$

Итак, $\mathcal{L}_i$ и G_i для задачи управления (1)–(3), (9) имеют вид:

$$\mathcal{L}_0(t,\varphi)=\mathcal{L}_0-\frac{1}{2}(\nabla v_\varphi^0(t,x))'B_1(t)\nabla;$$

$$\mathcal{L}_1(t,\varphi)=f'(t,\varphi)\nabla-\frac{1}{2}(\nabla v_\varphi^1(t,x))'B_1(t)\nabla;$$

$$\mathcal{L}_i(t,\varphi)=-\frac{1}{2}(\nabla v_\varphi^i(t,x))'B_1(t)\nabla;\ \ i=2,3,\ldots;$$

$$G_0(t,\varphi) = x' M_2(t) x + \frac{1}{4} (\nabla v_\varphi^0(t,x))' B_1(t) \nabla v_\varphi^0(t,x);\ x = \varphi(0);$$

$$G_i(t,\varphi) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{i} (\nabla v_\varphi^{i-j}(t,x))' B_1(t) \nabla v_\varphi^j(t,x);\ x = \varphi(0),\ i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для $i \geq 1$ уравнение Беллмана (27) можно записать

$$\mathcal{L}_0 v_\varphi^i(t,x) + f'(t,\varphi) \nabla v_\varphi^{i-1}(t,x) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{i} (\nabla v_\varphi^j(t,x))' B_1(t) \nabla v_\varphi^{i-j}(t,x),$$

$$v_\varphi^i(T,x) = 0,\ x = \varphi(0). \tag{28}$$

Определим из (28) $v_1(t,\varphi), \ldots, v_k(t,\varphi)$, $v_i \equiv v^i$, зададим k-е приближение к оптимальному управлению [8, 1] (в соответствии с $u_k \equiv u(t,\varphi,Q_k,\varepsilon)$, $Q_k \equiv v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^k v_k$ и $u^0(t,\varphi) = -\frac{1}{2} M_1^{-1}(t) B'(t) \nabla v_\varphi(t,x))$ формулой

$$u_k(t,\varphi) = -\frac{1}{2} M_1^{-1}(t) B'(t) \nabla [v_\varphi^0(t,x) + \varepsilon v_\varphi^1(t,x) + .. + \varepsilon^k v_\varphi^k(t,x)]. \tag{29}$$

Формула (14) задает нулевое приближение v_0 для функционала Беллмана. Существование следующих приближений $v_1, v_2, \ldots, v_k$ устанавливается таким утверждением [12].

Теорема 2. Решение уравнений (28) при $i = \overline{1,k}$ существует в виде

$$v_i(t,\varphi) = \mathbf{E}_{t,\varphi} \left\{ \int_t^T \Phi_i(s, y_s) ds \right\}, \tag{30}$$

где $\Phi_i \equiv f'(t,\varphi) \nabla v_\varphi^{i-1}(t,x) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \nabla v_\varphi^{i-1}(t,x) B_1(t) \nabla v_\varphi^{i-j}(t,x), \quad x = \varphi(0),$

а неизвестный случайный процесс $y(s)$ определяется как решение СДУ

$$dy(s) = -B_1(s)[P_0(s) y(s) + P_1(s)] ds + d\xi(s)\ \ \forall s \in [t,T], \quad y_t = \varphi \in \mathbf{D}. \tag{31}$$

Доказательство. При $i \geq 1$ из (28) получим

$$\mathcal{L}_1 v_i(t,\varphi) + \Phi_i(t,\varphi) = 0;\ v_i(T,\varphi) = 0, \tag{32}$$

при этом следует учесть тождество

$$\sum_{j=0}^{i} (\nabla v_\varphi^j(t,x))' B_1(t) \nabla v\ \varphi^{i-j}(t,x) = 4 (\nabla v_\varphi^i(t,x))' B_1(t) [P_0(t) x + P_1(t)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} (\nabla v_\varphi^j(t,x))' B_1(t) \nabla v_\varphi^{i-j}(t,x),$$

где $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_0 - (P_0 x + P_1)' B_1 \nabla$ — инфинитезимальный оператор процесса $y(s)$ как решение стохастического дифференциального уравкния (СДУ) (31).

При $i = 1$ уравнения (32) запишем в виде

$$\mathcal{L}_1 v_1(t,\varphi) + 2 f'(t,\varphi) [P_0(t) x + P_1(t)] = 0 \tag{33}$$

с краевым условием

$$v_1(T,\varphi) = 0; \quad x = \varphi(0). \tag{34}$$

Если $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ — два решения задачи (33), (34), то для $1\widetilde{v} = \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2$ из $L_1\widetilde{v} = 0$ и $\widetilde{v}(T, \varphi) = 0$ следует [2], что $\widetilde{v}(T, \varphi) \equiv 0$. А это и означает единственность решения задачи (33), (34). Аналогично методом математической индукции докажем единственность решений уравнений (32) $\forall i \geq 1$. Из леммы 2 [12] и соотношений (32)–(34) следует (30), что и доказывает теорему 2.

Замечание. Вычисление правой части выражения (30) для $v_1(t, \varphi)$ можно иногда свести к квадратурам. Например, в случае $f(t, x_t) \equiv f(t, x(t-h))$, где $h \geq 0$ — постоянная, а $p(t, x, s, y)$ — плотность вероятности перехода процесса $y(s)$ как решения СДУ (31). Тогда (30) при $i = 1$ запишем в виде для $t \in [0, T-h]$

$$v_1(t, \varphi) = 2 \int_t^{t+h} \int_{R^n} f'(s, \varphi(s-t-h))[P_0(s) + P_1(s)] p(t, \varphi(0), s, y) dy ds +$$

$$+ 2 \int_{t+h}^{T} \int_{R^n} \int_{R^n} f'(s, z)[P_0(s) y + P_1] p(t, \varphi(0), s-h, z) p(s-h, z, s, y) dz dy ds;$$

а для $t \in [T-h, T]$

$$v_1(t, \varphi) = 2 \int_t^T \int_{R^n} f'(s, \varphi(s-t-h))[P_0(s) y + P_1(s)] p(t, \varphi(0), s, y) dy ds,$$

где плотность $p(t, x, s, y)$ в некоторых случаях для СДУ (31) можно вычислить в явном аналитическом виде [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Б. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
2. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1987. — 328 с.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
4. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 328 с.
5. Колмановский В.Б. Управление и оценивание в системах с последействием // Математическая теория систем. — М.: Наука, 1986. — С. 151–162.
6. Шайхет Л.Е. Об ε-оптимальном управлении квазилинейными интегральными уравнениями // Теория случайных процессов. — 1986. — Вып. 14. — С. 121–130.
7. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. О приближенном синтезе оптимального управления стохастическими квазилинейными системами с последействием // Прикл. математика и механика. — 1978. — **42**, В. 6. — С. 101–112.
8. Jakubovski A.A. Non-Skorohod topology on the Skorohod space // Electron. J. of Probab. — 1997. — **2.** — P. 1–21.
9. Jakubovski A.A. The a.s. Skorohod representation for subsequences in nonmetric spaces // Theory Probab. Appl. — 1997. — **42.** — P. 209–216.
10. Юрченко I.В., Ясинська Л.I., Ясинський В.К. Комп'ютерне статистичне моделювання. — Чернівці: Прут, 2002. — 416 с.
11. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наук. думка, 1977. — 312 с.
12. Королюк В.С., Ясинський В.К., Антонюк С.В. Оптимальное управление стохастическими динамическими системами со всей предысторией с пуассоновскими переключениями // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 7. — С. 103–107.

Поступила 11.01.2007