УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ, П.И. СТЕЦЮК

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ НАХОЖДЕНИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОЦЕНОК ШОРА[1]

Ключевые слова: *квадратичная задача, двойственная оценка Шора, отрицательная определенность матрицы, собственное число матрицы, множители Лагранжа, негладкая штрафная функция.*

ВВЕДЕНИЕ

Под квадратичной задачей понимают задачу математического программирования, в которой целевая функция и все функции ограничений квадратичны:

$$f^* = \max_{x \in R^n} \{f(x) = x^T K_0 x + b_0^T x\} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x^T K_i x + b_i^T x + c_i &\le 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ x^T K_i x + b_i^T x + c_i &= 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}. \end{aligned} \tag{2}$$

В случае, когда в задаче (1), (2) $\forall i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ $b_i = 0$ (т.е. все функции задачи представляют собой однородные квадратичные формы), будем говорить об однородной квадратичной задаче.

В виде (1), (2) представим ряд общеизвестных задач, таких как задача линейной дополнительности, квадратичная задача о назначениях, задачи проектирования, экстремальные задачи на графах (например, задачи раскраски и разрезания графов, нахождение максимального независимого множества, максимального взвешенного разреза, максимального k-клаба и т.п.). Более того, к виду квадратичных задач сводится более широкий класс полиномиальных задач (в которых целевая функция и все функции ограничений полиномиальны) с вещественными и булевыми переменными путем введения дополнительных переменных и квадратичных ограничений, связывающих переменные исходной полиномиальной задачи с расширенным множеством переменных полученной квадратичной задачи. Отметим, что такое сведение неоднозначно, впрочем, как и представление произвольной квадратичной задачи, например, за счет функционально избыточных ограничений, которые не влияют на область допустимых значений. В общем случае задача (1), (2) многоэкстремальна и относится к классу NP-трудных задач. В связи с этим возникает определенный интерес к разработке эффективных методов нахождения оценок для данной задачи как с практической точки зрения оценки решения задачи за «приемлемое» (полиномиальное) время, так и их использования в схеме ветвей и границ.

В работах [1, 2] для получения верхних оценок ψ^* оптимума f^* задачи (1), (2) Н.З. Шором предложен и исследован двойственный подход, основанный на использовании функции Лагранжа:

$$\psi^* = \inf_{u \in D \cap U^-} \psi(u) \ge \max_{x \in T} f(x) = f^*.$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта UKM2-2812-KV-06 (CRDF Cooperative Grants Program).

Здесь $\psi(u) = \sup_{x \in R^n} L(x, u)$; $L(x, u) = x^T K(u) x + b^T(u) x + c(u)$ — функция Лагранжа для задачи (1), (2), в которой

$$K(u) = K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i, \quad b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i, \quad c(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i c_i;$$

U^- — область определения вектора множителей Лагранжа $u \in R^m$: $U^- = \{u : u_i \le 0, \ i = \overline{1, m_1}\}$; D — множество точек u, в которых матрица $K(u)$ отрицательно определена.

Такое сужение допустимой области при данном подходе к оценке вполне оправдано, поскольку при $u \notin \overline{D}$ (где $\overline{D}$ — замыкание множества D и соответствует неположительной определенности матрицы $K(u)$) имеем тривиальную (не несущую никакой информации) оценку $\psi(u) = +\infty$. В случае, когда $u \in D$, внутренняя задача нахождения функции $\psi(u)$ является задачей максимизации строго вогнутой квадратичной функции, для решения которой необходимо решить систему линейных уравнений $L'_x(x, u) = 2K(u)x + b(u) = 0$, откуда $x = -K^{-1}(u) b(u) / 2$. Тогда внешняя задача представляет собой задачу нахождения инфинума выпуклой непрерывно дифференцируемой функции $\psi(u) = b^T(u) K^{-1}(u) b(u) / 4 + c(u)$ на выпуклом множестве $D \cap U^-$. Отметим, что допустимая область внешней задачи в некоторых случаях может быть расширена за счет $u \in G \subseteq (\overline{D} / D) \cap U^-$ (некоторого подмножества G значений переменной u, при которых $K(u)$ неположительно определена и вырождена). Это возможно при тех значениях $u \in \overline{D} / D$, когда функция $L(x, u)$ ограничена сверху по x, что эквивалентно множеству переменных u, удовлетворяющих хотя бы одной из n систем вида

$$\begin{cases} b^T(u) \xi_i(u) = 0, \\ \lambda_i(u) = 0, \end{cases} \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

где $\lambda_i(u)$ — собственное число матрицы $K(u)$, $\xi_i(u)$ — собственный вектор матрицы $K(u)$, соответствующий $\lambda_i(u)$. (Данные условия в виде систем легко получить после приведения квадратичной по x формы $L(x, u)$ к каноническому виду.)

В [1] доказан следующий факт.

Лемма 1. Если $\psi^* = \inf_{u \in D \cap U^-} \psi(u)$ достигается на множестве D, то $\psi^* = f^*$.

Однако для большинства задач оценку ψ^* получаем при u, стремящемся к границе неположительной определенности $\overline{D} / D$. При этом возникают проблемы при нахождении обратной матрицы $K^{-1}(u)$ ($K(u)$ стремится к вырожденности) во внутренней задаче и при учете выполнения ограничения $u \in D$ для внешней задачи (возникает вопрос выбора способа возврата в допустимую область по u, поскольку при выходе из области отрицательной определенности происходит разрыв функции $\psi(u)$ — она становится равной $+\infty$, или, другими словами, неопределенной). Ниже представлен подход, позволяющий обойти эти трудности. Его суть заключается в сведении квадратичной задачи общего вида (1), (2) к однородной квадратичной задаче (в разд. 5 показано, что двойственные оценки в обоих случаях равны), для которой решение внутренней задачи тривиально (когда $K(u)$ отрицательно определена, то $x^* = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нулевой n-мерный вектор) и упомянутые выше проблемы не актуальны. Более того, полученная однородная задача сводима к безусловной задаче минимизации выпуклой функции, для решения которой достаточно эффективно можно использовать методы негладкой оптимизации (например, различные модификации r-алгоритма [1, 2]).

1. СВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОБЩЕГО ВИДА К ОДНОРОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ

Для произвольной квадратичной задачи (1), (2) путем введения дополнительной переменной можно построить аналог в виде однородной квадратичной задачи

$$\max_{x \in R^n,\, z_0 \in R^1} (x^T K_0 x + b_0^T x z_0) \tag{3}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & x^T K_i x + b_i^T x z_0 + c_i \le 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ & x^T K_i x + b_i^T x z_0 + c_i = 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$z_0^2 = 1. \tag{5}$$

Задача (3)–(5) соответствует двум эквивалентным (в смысле равенства оптимальных значений целевой функции) задачам: при $z_0 = 1$ — задаче (1), (2), при $z_0 = -1$ — задаче, которая возникает в результате замены переменных $y = -x$ в задаче (1), (2):

$$f^* = \max_{y \in R^n} (y^T K_0 y - b_0^T y)$$

при ограничениях

$$y^T K_i y - b_i^T y + c_i \le 0, \quad i = \overline{1, m_1},$$

$$y^T K_i y - b_i^T y + c_i = 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}.$$

Геометрический смысл приведенного утверждения достаточно простой — расширение исходной задачи путем доопределения ее симметрично оси значений функций (для области определения — относительно центра координат). Однако отметим, что при таком сведении квадратичной задачи к однородному виду количество точек максимума увеличивается в два раза. Тогда если применить для решения задачи (3)–(5) теорию двойственных квадратичных оценок [1, 2], то полученная оценка всегда будет достигаться на границе отрицательной определенности. Таким образом, даже в случае «хорошей» исходной задачи, для которой множество решений состоит из одной точки и двойственная оценка точная, рассмотрение однородного аналога не позволит получить непосредственно значение x^*. Поэтому такое сведение имеет смысл только в тех случаях (следует отметить, достаточно многочисленных), когда решение не единственно или оценка не точная и переход к задаче безусловной оптимизации оправдан.

2. ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим однородную квадратичную задачу

$$f^* = \max_{x \in R^n} x^T K_0 x \tag{6}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & x^T K_i x + c_i \le 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ & x^T K_i x + c_i = 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}, \end{aligned} \tag{7}$$

и применим описанную во введении технику Н.З. Шора для получения двойственной оценки [1, 2].

Построим функцию Лагранжа для задачи (6), (7)

$$L(x, u) = x^T K_0 x + \sum_{i=1}^{m} u_i (x^T K_i x^T + c_i)$$

и рассмотрим маргинальную функцию $\psi(u) = \sup\limits_{x} L(x, u)$, которая имеет вид

$$\psi(u) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \lambda_{\max}(K(u)) > 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} u_i c_i, & \text{если } \lambda_{\max}(K(u)) \leq 0, \end{cases}$$

где $\lambda_{\max}(K(u))$ — максимальное собственное число матрицы $K(u) = K_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} K_i$ (допустимая область внешней задачи в данном случае может быть расширена до $\overline{D}$, поскольку $\psi(u) = \sup\limits_{x \in R^n} L(x, u)$ при $u \in D$ равна $\max\limits_{x \in R^n} L(x, u) = L(\mathbf{0}, u)$ при $u \in \overline{D}$).

Таким образом, верхняя двойственная квадратичная оценка ψ^* [2] для задачи (6), (7) может быть получена путем решения задачи выпуклого программирования

$$f^* \leq \psi^* = \min_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i c_i \right) \tag{8}$$

при ограничениях

$$\lambda_{\max}(K(u)) \leq 0, \tag{9}$$

$$u_i \leq 0, \quad i = \overline{1, m_1}. \tag{10}$$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним несколько известных результатов, необходимых для последующего изложения.

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min_{y \in M} f_0(y), \tag{11}$$

$$f_i(y) \leq 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad y \in M, \tag{12}$$

где $f_i(y)$, $i = \overline{0, k}$, — непрерывные функции, $M \subseteq R^n$ — некоторое множество. Введем семейство задач, зависящее от вектора параметров $z \in R^k$,

$$V(z) = \inf \{ f_0(y) : f_1(y) \leq z_i ; \ i = \overline{1, k}, \ y \in M \},$$

вложенной задачей которого является исходная задача (при $z = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — k-мерный нулевой вектор).

Если воспользоваться для учета ограничений (12) негладкой штрафной функцией в форме функции максимума

$$\begin{gathered} \Phi_N(y) = f_0(y) + NF(y), \\ F(y) = \max \{0, f_1(y), \ldots, f_k(y)\}, \end{gathered} \tag{13}$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [3]. Пусть $\inf\limits_{t>0} \dfrac{V(te)-V(0)}{t} = -L > -\infty$, где e — k-мерный вектор, все компоненты которого равны единице. Если $N > L$, то точки минимума исходной задачи $V(0)$ и задачи $\inf\limits_{y \in M} \Phi_N(y)$, где $\Phi_N(y)$ определяется по формуле (13), совпадают.

Таким образом, теорема 1 позволяет установить точное значение штрафного множителя при использовании для решения задачи (11), (12) негладкой штрафной функции в форме функции максимума.

В дальнейшем понадобится еще один результат. В случае, когда функции $f_i(y)$, $i = \overline{0, k}$, и множество M выпуклы, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 [3]. Пусть $V(0)$ — конечное число. Вектор υ^* является вектором Куна–Таккера тогда и только тогда, когда $-\upsilon^* \in \partial V(0)$.

4. ОДНОРОДНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВ

На практике часто встречаются задачи, которые можно представить как однородные квадратичные задачи без ограничений в виде неравенств. Рассмотрим этот частный случай задачи (6), (7), предполагая, что ограничения (7) состоят только из m ограничений-равенств ($m_1 = 0$), а значит, ограничения (10) в задаче (8)–(10), определяющей двойственную оценку, отсутствуют.

Выпишем для задачи (8), (9) семейство задач, зависящее от $z \in R^1$:

$$V(z) = \inf_u \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i c_i : \lambda_{\max}(K(u)) \le z; \ \ u \in R^m \right\}. \tag{14}$$

Теорема 3. Пусть $\inf\limits_z \dfrac{V(z)-V(0)}{z} = -L > -\infty$, где $V(z)$ определяется по формуле (14). Тогда решение однородной квадратичной задачи (8), (9), которое дает верхнюю лагранжеву оценку для задачи (6), (7) (при $m_1 = 0$), равно

$$\psi^* = \min_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i + L\lambda_{\max}(K(u)) \right). \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку функция цели и единственная функция ограничения задачи (8), (9) выпуклы и предполагается, что $V(0)$ — конечное число, существует возможность для данной задачи аналитически определить множитель Куна–Таккера $\upsilon^* \in R^1$.

Согласно теореме 2 $-\upsilon^* \in \partial V(0)$. По определению субдифференциала $-\upsilon^* \in \partial V(0)$ тогда и только тогда, когда $\forall z \; V(z) - V(0) \ge -(\upsilon^*, z)$, т.е. когда

$$\inf_z \Big(V(z) + (\upsilon^*, z) - V(0) \Big) = 0, \quad \inf_z \left(\upsilon^* + \frac{V(z)-V(0)}{z} \right) z = 0,$$

что возможно только в случае $\upsilon^* = -\inf\limits_z \dfrac{V(z)-V(0)}{z} = L$. Подставив значение υ^* в формулу функции Лагранжа для задачи (8), (9), получим искомый результат. Теорема доказана.

Отдельно остановимся на нескольких конкретных случаях.

Следствие 1. Если в число ограничений задачи (6), (7) ($m_1 = 0$) входят условия бинарности всех переменных, то $L = n$ и соответственно $\psi^* = \min\limits_{u \in R^m} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i u_i + n\lambda_{\max}(K(u)) \right)$.

Доказательство. При наличии ограничений вида $x_i^2 - 1 = 0,\ i = \overline{1, n}$ (пусть их индексы будут первыми), можно записать $K(u) = \widetilde{K}(u) + \operatorname{diag}(u_i,\ i = \overline{1, n})$. Тогда согласно (14)

$$V(z) = \inf_u \left\{ \sum_{i=1}^m u_i c_i : \lambda_{\max}(K(u)) \le z;\ u \in R^m \right\} =$$

$$= \inf_u \left\{ \sum_{i=n+1}^m u_i c_i - \sum_{i=1}^n u_i : \lambda_{\max}(\widetilde{K}(u) + \operatorname{diag}(u_i,\ i = \overline{1, n}) - zI) \le 0;\ u \in R^m \right\} =$$

$$= \inf_u \left\{ \sum_{i=n+1}^m \widetilde{u}_i c_i - \sum_{i=1}^n (\widetilde{u}_i + z) : \lambda_{\max}(\widetilde{K}(\widetilde{u}) + \operatorname{diag}(\widetilde{u}_i,\ i = \overline{1, n})) \le 0;\ \widetilde{u} \in R^m \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \sum_{i=1}^m \widetilde{u}_i c_i - nz : \lambda_{\max}(K(\widetilde{u}_i)) \le 0;\ \widetilde{u} \in R^m \right\} = V(0) - nz,$$

где $\widetilde{u}_i = u_i - z,\ i = \overline{1, n},\ \widetilde{u}_i = u_i,\ i = \overline{n+1, m}$. Тогда

$$\inf_{z>0} \frac{V(z) - V(0)}{z} = \inf_{z>0} \frac{V(0) - nz - V(0)}{z} = -n = -L > -\infty.$$

С учетом формулы (15) доказательство завершено.

Данный случай интересен как достаточно часто встречающийся, например в теории графов (задачи о максимальном разрезе графа, максимальном независимом множестве, максимальной k-клике и т.д.).

Следствие 2. Если в число ограничений задачи (6), (7) ($m_1 = 0$) входит ограничение $\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0$, то $L = 1$ и соответственно $\psi^* =$

$$= \min_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^m c_i u_i + \lambda_{\max}(K(u)) \right).$$

Доказательство здесь не приводится, поскольку оно идентично предыдущему случаю (при определении $V(z)$ заменяется только одна двойственная переменная $\widetilde{u}_1 = u_1 - z$, соответствующая ограничению $\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0$).

Следствие 2 интересно тем, что если область отрицательной определенности матрицы $K(u)$ функции Лагранжа задачи (6), (7) ($m_1 = 0$) не пуста, то всегда можно добавить одно ограничение-равенство (линейная комбинация исходных), функция которого представляет собой однородную положительно определенную квадратичную форму, а значит, путем замены переменных приводится к виду $\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0$.

Таким образом, для любой однородной квадратичной задачи без ограничений-неравенств всегда можно получить двойственную оценку [1, 4] путем решения выпуклой задачи безусловной оптимизации вида (15) без дополнительных затрат (в худшем случае, добавив одну двойственную переменную, если в первоначальной постановке отсутствует ограничение с положительно определенной матрицей).

5. КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБЩЕГО ВИДА (1), (2)

Без ограничения общности можно считать, что все ограничения задачи (6), (7) заданы в виде равенств — любое ограничение-неравенство приводится к необходимому виду путем введения в функцию квадрата дополнительной переменной

$$f^* = \max_{x \in R^n} x^T K_0 x \tag{16}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} x^T K_i x + c_i + z_i^2 = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ x^T K_i x + c_i = 0, \ i = \overline{m_1 + 1, m}. \end{gathered} \tag{17}$$

Таким образом, произвольная квадратичная задача (1), (2) путем ввода переменных z_i, $i = \overline{0, m_1}$ (напомним, что с помощью z_0 избавляемся от линейных членов в квадратичных формах), преобразуется к рассмотренному выше случаю квадратичной однородной задачи без ограничений-неравенств. Далее, построив, например, дополнительное ограничение, функция которого представляет собой положительно определенную квадратичную форму (если такого нет в наличии), и воспользовавшись следствием 2, получим выпуклую задачу безусловной оптимизации вида (15), решение которой дает двойственную оценку исходной задачи. Причем ни введение z_0, ни z_i, $i = \overline{1, m_1}$, не меняют значение предложенной Н.З. Шором двойственной оценки исходной задачи (1), (2). Покажем это.

Утверждение 1. Двойственные оценки задачи (1), (2) и задачи (3)–(5) совпадают.

Доказательство. Введем обозначения u_i, $i = \overline{1, m}$, — двойственные переменные при соответствующих ограничениях (2) и (4) задач, u_0 — двойственная переменная при равенстве (5) и выпишем выражения двойственных квадратичных оценок [1]:

— для задачи (1), (2)

$$f^* \le \psi_1 =$$

$$= \inf_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^m c_i u_i - \frac{1}{4} (b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i)^T (K_0 + \sum_{i=1}^m u_i K_i)^{-1} (b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i) \right) \tag{18}$$

при ограничениях

$$u_i \le 0, \quad i = \overline{1, m_1}; \quad (K_0 + \sum_{i=1}^m u_i K_i) < 0;$$

— для задачи (3)–(5)

$$f^* \le \psi_2 = \inf_{u \in R^{m+1}} \left(\sum_{i=1}^m c_i u_i - u_0 \right) \tag{19}$$

при ограничениях

$$u_i \le 0, \ i = \overline{1, m_1}; \quad \begin{pmatrix} K_0 + \sum_{i=1}^m u_i K_i & b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i \\ b_0^T + \sum_{i=1}^m u_i b_i^T & u_0 \end{pmatrix} < 0.$$

Отметим, что использование строгой отрицательной определенности в задаче (19) вполне корректно (в постановке (8)–(10) этой задачи требовалась неположительная определенность), поскольку для однородной задачи

$$\psi^* = \inf_{u \in D} \sup_{x \in R^n} L(x, u) = \min_{u \in D} \max_{x \in R^n} L(x, u).$$

Условие отрицательной определенности в задаче (19) эквивалентно двум условиям:

$$K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i < 0 \wedge \det = \begin{vmatrix} -(K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i) & -(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) \\ -(b_0^T + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i^T) & -u_0 \end{vmatrix} > 0.$$

Расписав детерминант блочной матрицы по формуле $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} =$ $= |A||D - CA^{-1}B|$, имеем

$$\det = \left|-K_0 - \sum_{i=1}^{m} u_i K_i\right| \left|-u_0 + \frac{1}{4}(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)^T (K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i)^{-1} (b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)\right| > 0$$

,

что при $(K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i) < 0$ эквивалентно

$$-u_0 > -\frac{1}{4}(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)^T (K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i)^{-1} (b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i).$$

Заменив в функции цели $-u_0$ на выражение в правой части полученного неравенства (поскольку это единственное условие с участием данной переменной, ограничивающее функцию цели снизу при фиксации остальных переменных), получим задачу (18), т.е. $\psi_1 \equiv \psi_2$.

Утверждение 2. Двойственные оценки задачи (1), (2) и задачи (16), (17) совпадают.

Доказательство. Введем обозначения u_i, $i = \overline{1, m}$, — двойственные переменные при соответствующих ограничениях задач и выпишем выражения двойственных квадратичных оценок [1]:

— для задачи (1), (2)

$$f^* \le \psi_1 =$$

$$= \inf_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i - \frac{1}{4}(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)^T (K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i)^{-1} (b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) \right), \quad (20)$$

при ограничениях

$$u_i \le 0, \ i = \overline{1, m_1}; \ (K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i) < 0;$$

— для задачи (16), (17)

$$\psi_2 = \inf_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i - \frac{1}{4} \left((b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)^T, \ 0_{m_1^T} \right) K_2^{-1}(u) \left((b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)^T, \ 0_{m_1^T} \right)^T \right) \quad (21)$$

при ограничении

$$K_2(u) = \begin{pmatrix} K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i & 0_{n \times m_1} \\ 0_{m_1 \times n} & \operatorname{diag}(u, i = \overline{1, m_1}) \end{pmatrix} < 0.$$

Используя формулу Фробениуса для обращения блочной матрицы [5], легко видеть, что функции цели обеих задач совпадают.

Условие отрицательной определенности в задаче (21) эквивалентно двум условиям:

$$(K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i) < 0 \wedge \ \forall k \in \{1, \ldots, m_1\} \det_k =$$

$$= \begin{vmatrix} -K_0 - \sum_{i=1}^{m} u_i K_i & 0_{n\times k} \\ 0_{k\times n} & -\mathrm{diag}(u, i=\overline{1, k}) \end{vmatrix} > 0.$$

Расписав детерминант блочной матрицы по формуле $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} =$ $= |A||D - CA^{-1}B|$, получим $\det_k = \left| -K_0 - \sum_{i=1}^{m} u_i K_i \right| |-\mathrm{diag}(u, i=\overline{1, k})| > 0, \quad k = \overline{1, m_1}$, что эквивалентно при условии $(K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i) < 0$ тому, что $u_i < 0, \ i = \overline{1, m_1}$ (последние неравенства можно заменить на нестрогие, поскольку ограниченность сверху целевой функции по x от них не зависит). Таким образом, получили ограничения задачи (20). Доказательство завершено.

6. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ

Приведенный подход для нахождения оценки квадратичной задачи (1), (2) путем сведения к однородной квадратичной задаче без ограничений-неравенств может не удовлетворять в случае значительного увеличения размерности матрицы $K(u)$ в задаче (16), (17) (в конечной задаче она равна $(n + m_1 + 1) \times (n + m_1 + 1)$). Возможно, иногда целесообразнее воспользоваться рассуждениями, предложенными ниже, в результате которых, в отличие от предыдущего подхода, необходимо находить максимальное собственное число и собственный вектор, соответствующий ему, матрицы меньшей размерности — $(n+1) \times (n+1)$.

Для задачи (6), (7) двойственная оценка ψ^* определяется задачей (8)–(10), для которой положим

$$V(z) = \inf_u \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i c_i : u_i \le z_i, \ i = \overline{1, m_1}; \ \lambda_{\max}(K(u)) \le z_{m_1+1}; \ u \in R^m \right\}. \qquad (22)$$

Тогда согласно теореме 1 при $N > L$, где $\inf_{t>0} \frac{V(te) - V(0)}{t} = -L > -\infty$ (e — (m_1+1)-мерный вектор, все компоненты которого равны единице), получаем

$$\psi^* = \min_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i + N \max\{0; \ u_i, i = \overline{1, m_1}; \lambda_{\max}(K(u)) \} \right).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\inf_{t>0} \frac{V(te) - V(0)}{t} = -L > -\infty$. Тогда если $N > L$, то решение однородной квадратичной задачи (6), (7) можно оценить сверху лагранжевой оценкой ψ^*, которая равна

$$\psi^* = \min_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i + N \max\{ 0; \ u_i, i = \overline{1, m_1}; \ \lambda_{\max}(K(u))\} \right). \qquad (23)$$

Выделим несколько важных частных случаев.

Следствие 3. Если множество ограничений задачи (6), (7) состоит из произвольных ограничений-равенств, набора ограничений вида $x_i^2 + c_i \le 0$, $i \in J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, и $x_i^2 + c_i = 0$, $i \in I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, такого, что $I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $I \cap J = \{\varnothing\}$, то $L = -\left(\sum_{i \in I} c_i + \sum_{i \in J} c_i \right)$ и, следовательно,

$$\psi^* = \min_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i + N \max\{0; u_i, i = \overline{1, m_1};\ \lambda_{\max}(K(u))\} \right) \text{ при } N > L.$$

Доказательство. При наличии заданного набора ограничений (пусть их индексы будут первыми) можно записать $K(u) = \widetilde{K}(u\ \ ) + \mathrm{diag}(u_i, i = \overline{1, n})$. Тогда согласно (22)

$$V(te_1) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i u_i : \lambda_{\max}(\widetilde{K}(u) + \mathrm{diag}(u_i, i = \overline{1, n})) \le t;\ u_i \le t, i = \overline{1, |J|} \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i u_i : \lambda_{\max}(\widetilde{K}(u) + \mathrm{diag}(u_i, i = \overline{1, n}) - tI) \le 0;\ u_i - t \le 0, i = \overline{1, |J|} \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i (\widetilde{u}_i + t) + \sum_{i=n+1}^{m} c_i \widetilde{u}_i : \lambda_{\max}(\widetilde{K}(\widetilde{u}) + \mathrm{diag}(\widetilde{u}_i,\ i = \overline{1, n})) \le 0; \right.$$

$$\left. \widetilde{u} \le 0,\ i = \overline{1, |J|} \right\} = V(0) + t \left(\sum_{i \in I} c_i + \sum_{i \in J} c_i \right),$$

где $\widetilde{u}_i = u_i - t$, $i = \overline{1, n}$, $\widetilde{u}_i = u_i$, $i = \overline{n+1, m}$. Тогда

$$\inf_{t > 0} \frac{V(t) - V(0)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{V(0) + t\left(\sum_{i \in I} c_i + \sum_{i \in J} c_i \right) - V(0)}{t} = \left(\sum_{i \in I} c_i + \sum_{i \in J} c_i \right) = -L > -\infty.$$

С учетом теоремы 4 доказательство завершено.

Следствие 4. Если множество ограничений задачи (6), (7) состоит из произвольных ограничений-равенств и область переменных ограничена шаром, т.е. имеется ограничение вида $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le r^2$, то $L = r^2$ и, следовательно,

$$\psi^* = \min_{u \in R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i + N \max\{0;\ u_1,\ \lambda_{\max}(K(u))\} \right) \text{ при } N > L.$$

Схема доказательства аналогична.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — К.: Наук. думка, 1989. — 208 с.

2. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — Dordrecht: Kluwer, 1998. — 394 p.

3. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 136 с.

4. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения / Н.З. Шор, Н.Г. Журбенко, А.П. Лиховид, П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 4. — С. 80–94.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Поступила 29.05.2007