СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 536.24

РЕШЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Ключевые слова: *многокомпонентные гиперболические системы, комплексные обратные задачи.*

В работах [1, 2] предложены явные процедуры построения градиентных методов [3] решения обратных задач соответственно для параболических и псевдопараболических многокомпонентных распределенных систем на основе теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [4, 5].

В данной статье рассматриваются вопросы реализации градиентных методов [3] для идентификации параметров гиперболических многокомпонентных распределенных систем.

1. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ $(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing,\ \partial\Omega_1 \cap \cap \partial\Omega_2 = \gamma \neq \varnothing$; Ω_1, Ω_2 — связные ограниченные строго липшицевы области из R^n) определено гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}\right) + \tilde{f}(x, t), \tag{1}$$

где $\tilde{f}\,\big|_{\Omega_{lT}} \in C(\Omega_{lT})$, $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in \mathrm{U}$ $(\mathrm{U} = \{v = \{v_i(x)\}_{i=1}^n : v_i = (v_i^1, v_i^2),$ $v_i^l = v_i\,|_{\overline{\Omega}_l}$, $v_i^l \in C(\overline{\Omega}_l) \cap C^1(\Omega_l)$, $v_i^l > 0$, $l = 1, 2;$ $i = \overline{1, n}\})$.

На границе $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T]$ $(\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma)$ заданы смешанные классические краевые условия

$$y\big|_{\Gamma_{1T}} = \varphi, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) = g, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) = -\alpha y + \beta, \quad (x, t) \in \Gamma_{3T}, \tag{4}$$

где $\Gamma_{iT}=\Gamma_i\times(0,T]$, $\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{3}\Gamma_i$, $\Gamma_i\cap\Gamma_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $i,j=\overline{1,3}$, ν — внешняя нормаль к границе Г.

На участке γ раздела областей Ω_1, Ω_2 условия сопряжения слабопрочного включения имеют вид

$$\left[\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\right]=0, \tag{5}$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\right\}^{\pm}=r[y], \tag{6}$$

где $r=\text{const}\geq 0$, $[\varphi]=\varphi^+-\varphi^-$, $\varphi^+=\{\varphi\}^+=\varphi(x,t)$ при $(x,t)\in\gamma_T^+=$ $=(\partial\Omega_2\cap\gamma)\times(0,T]$, $\varphi^-=\{\varphi\}^-=\varphi(x,t)$ при $(x,t)\in\gamma_T^-=(\partial\Omega_1\cap\gamma)\times(0,T]$.

При $t=0$ заданы начальные условия

$$y(x,0)=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=y_1(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{8}$$

где $y_0\in\overline{V}_0=\{v(x): v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\, i=1,2\}$, $y_1\in L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega_i)$ — пространство функций Соболева, определенных на области Ω_i.

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных областях γ_i, разбивающих область Ω на $N+2$ связных ограниченных строго липшицевых областей Ω_j $(\gamma_i\in\Omega$, $i=\overline{1,N})$, известны следы решения $y=y(x,t)$ начально-краевой задачи (1)–(8)

$$y\big|_{\gamma_{iT}}=f_i(x,t),\quad i=\overline{1,N}, \tag{9}$$

где $\gamma_{iT}=\gamma_i\times(0,T]$, $i=\overline{1,N}$.

Задача (1)–(9) состоит в нахождении вектор-функции $u\in \mathrm{U}$, при которой решение $y=y(u)=y(u;x,t)$ начально-краевой задачи (1)–(8) удовлетворяет равенствам (9).

Задачу (1)–(9) будем решать приближенно. Для этого составим функционал-невязку [3]

$$J(u)=\sum_{i=1}^{N}\int_0^T \rho_i(t)\,||A_i u-f_i||^2_{L_2(\gamma_i)}\,dt, \tag{10}$$

где $Au=\{A_i u\}_{i=1}^N$, $A_i u=y(u;x,t)\Big|_{\gamma_{iT}}$ при заданном векторе $u\in\mathrm{U}$, $||\varphi||^2_{L_2(\gamma_i)}=\int\limits_{\gamma_i}\varphi^2 d\gamma_i$, $\rho_i(t)$ — весовые коэффициенты.

Вместо задачи (1)–(9) будем решать задачу (1)–(8), (10), состоящую в нахождении вектора $u\in\mathrm{U}$, при котором функционал (10) принимает минимальное значение при ограничениях (1)–(8).

Итерационная последовательность для нахождения приближения u_{n+1} решения u задачи (1)–(8), (10) имеет вид

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \quad n = 0, 1, \ldots, n^*, \tag{11}$$

и начинается с некоторого начального приближения $u_0 \in \mathrm{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются следующими выражениями [3]:

— для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}; \tag{12}$$

— для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}; \tag{13}$$

— для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n\, p_{n-1}, \quad \gamma_0 = 0,$$

$$\gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \quad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2}. \tag{14}$$

При решении задачи (1)–(8), (10) вместо классического решения $y = y(u)$ задачи (1)–(8) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 1. При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(8) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in v_0$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right) + a(u; y, w) = l(w), \quad t \in (0, T], \tag{15}$$

$$(y, w) = (y_0, w), \quad t = 0, \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, w\right) = (y_1, w), \quad t = 0, \tag{17}$$

где $W(0,T) = \{v(x,t) \in L^2(0,T;V) : \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(0,T; L_2(\Omega))\}$, $V = \{v \in \bar{V} : v|_{\Gamma_{1T}} = \varphi\}$, $\bar{V} = \{v(x,t) : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2,\ t \in (0, T]\}$, $(z, w) = \int\limits_\Omega zwdx$, $v_0 = \{v(x) \in \bar{V}_0 : v|_{\Gamma_1} = 0\}$,

$$a(u; y, w) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int\limits_\gamma r[y][w] d\gamma + \int\limits_{\Gamma_3} a y w d\Gamma_3,$$

$$l(w) = (\tilde{f}, w) + \int\limits_{\Gamma_2} g w d\Gamma_2 + \int\limits_{\Gamma_3} \beta w d\Gamma_3.$$

Следуя [4], легко установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U}$ начально-краевая задача (1)–(8) имеет единственное обобщенное решение $y = y(u) \in W(0, T)$.

Для допустимого приращения Δu вектора $u \in \mathrm{U}$ на основании (15)–(17) приращение $\theta = \Delta y$ решения $y = y(u)$ задачи (15)–(17) можем определить как решение следующей задачи: найти функцию $\theta = \theta(x, t) \in W_0(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w\right) + a(u; \theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \quad t \in (0, T], \tag{18}$$

$$(\theta, w)(0) = 0, \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}, w\right)(0) = 0, \tag{20}$$

где $W_0(0, T) = L^2(0, T; V^0)$, $V^0 = \{v \in \overline{V} : v|_{\Gamma_{1T}} = 0\}$, $l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^1(\Delta u; w)$, $l_\theta^1(\Delta u; w) = -\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n \Delta u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx.$

Замечание 1. Если $\mathrm{U} = R_+^{2n}$ $(R_+ = (0, \infty))$, то приращение $\theta = \Delta y$ можем определить как решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n \Delta u_i \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}, \quad (x, t) \in \Omega_T, \ \theta|_{\Gamma_{1T}} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) = -\sum_{i=1}^n \Delta u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i), \quad (x, t) \in \Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) = -\alpha\theta - \sum_{i=1}^n \Delta u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i), \quad (x, t) \in \Gamma_{3T}, \tag{21}$$

$$\left[\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)\right] = -\left[\sum_{i=1}^n \Delta u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)\right], \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$\left\{\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)\right\}^{\pm} = r[\theta] - \left\{\sum_{i=1}^n \Delta u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)\right\}^{\pm}, \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Определение 2. Обобщенным решением начально-краевой задачи (21) называется функция $\theta = \theta(x, t) \in W_0(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w\right) + a(u; \theta, w) = l_\theta^2(\Delta u; w), \quad t \in (0, T], \tag{22}$$

$$(\theta, w)(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}, w\right)(0) = 0, \tag{23}$$

где

$$l_\theta^2(\Delta u; w) = \left(\sum_{i=1}^n \Delta u_i \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}, w\right) - \left(\sum_{i=1}^n \Delta u_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i), w\right)_{L_2(\Gamma_2)} -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i\frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i), w\right)_{L_2(\Gamma_3)}+\int_{\gamma}\left\{\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i\frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\right\}^{+} w^{+}\,d\gamma -$$

$$-\int_{\gamma}\left\{\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i\frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\right\}^{-} w^{-}\,d\gamma. \qquad (24)$$

При фиксированных u, Δu, y решение $\theta\in W_0(0, T)$ задачи (22), (23) существует и единственно.

Для каждого приближения u_n решения u задачи (15)–(17), (10) введем в рассмотрение сопряженную начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=0,\quad (x, t)\in\Omega_T\setminus\gamma_d,\quad \psi\big|_{\Gamma_{1T}}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)=0,\quad (x, t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)=-\alpha\psi,\quad (x, t)\in\Gamma_{3T}, \qquad (25)$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\right\}^{\pm}=r[\psi],\quad (x, t)\in\gamma_T,$$

$$[\psi]=0,\quad \left[\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\right]=-\rho_j(y(u_n)-f_j),\quad (x, t)\in\gamma_{jT},\quad j=\overline{1, N},$$

$$\psi(x, T)=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x, T)=0,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2,$$

где $\gamma_d=\bigcup_{i=1}^{N}\gamma_{iT}$.

Определение 3. Обобщенным решением начально-краевой задачи (25) называется функция $\psi(x, t)\in W_d(0, T)$, которая # $w(x)\in\upsilon_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, w\right)+a(u;\psi, w)=l_\psi(u; w),\quad t\in(0, T], \qquad (26)$$

$$(\psi, w)(T)=0,\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, w\right)(T)=0, \qquad (27)$$

где

$$W_d(0, T)=\{\upsilon(x, t)\in L^2(0, T;\upsilon_d):\frac{\partial\upsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\in L^2(0, T; L_2(\Omega))\},$$

$$\upsilon_d=\{\upsilon(x, t)\in\overline{V}_d:\upsilon|_{\Gamma_{1T}}=0,\ [\upsilon]|_{\gamma_{iT}}=0,\ i=\overline{1, N}\},$$

$$\overline{V}_d=\{\upsilon(x, t):\upsilon|_{\Omega_j}\in W_2^1(\Omega_j),\ j=\overline{0, N+1},\ t\in(0, T]\},$$

$$v_{d_0} = \{v(x) \in \bar{V}_{d_0} : v|_{\Gamma_1} = 0, \quad [v]|_{\gamma_j} = 0, \quad j = \overline{1, N}\},$$

$$\bar{V}_{d_0} = \{v(x) : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \; i = \overline{0, N+1}\},$$

$$l_\psi(u; w) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j(t)(y_j - f_j, w)_{L_2(\gamma_j)}. \tag{28}$$

Области Ω_j, $j = \overline{0, N+1}$, образованы разбиением области Ω поверхностями γ_j, $j = \overline{1, N}$.

Выбирая в тождествах (26), (27) вместо функции w разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом представления функционала $l_\theta(\Delta u; w) = \; l_\theta^1(\Delta u; w)$ и тождеств (18)–(20), имеем

$$J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n, \tag{29}$$

где

$$\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_{ni}\}_{i=1}^{N_1}, \quad \tilde{\psi}_{ni} = -\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\Big|_{\Omega_T}, \quad \|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{N_1} \tilde{\psi}_{ni}^2 \, dxdt, \tag{30}$$

N_1 — размерность области Ω.

Замечание 2.Формулы (30) позволяют восстанавливать коэффициенты u_i уравнения (1) как функции переменных (x, t), т.е. для случая $\mathrm{U} = (C_+(\bar{\Omega}_{1T}))^n \times (C_+(\bar{\Omega}_{2T}))^n$, $C_+(\bar{\Omega}_{lT}) = \{v(x, t) \in C(\bar{\Omega}_{lT}) : v(x, t) > 0\}$.

Если $u_i = u_i(x)$, то $\tilde{\psi}_{ni} = -\int_0^T \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} dt$, $\|J_{u_n}{}'\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N_1} \tilde{\psi}_{ni}^2 dx$.

Если $u_i = \mathrm{const} > 0$, т.е. $\mathrm{U} = R_+^{2n}$, то

$$\tilde{\psi}_{ni}^j = -\int_0^T \int_{\Omega_j} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} dxdt, \; \|J'_{u_n}\|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{2} (\tilde{\psi}_{ni}^j)^2. \tag{31}$$

Если $u_i = u_i(t)$, то $\tilde{\psi}_{ni}^j = -\int_{\Omega_j} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^T \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{N_1} (\tilde{\psi}_{ni}^j)^2 \, dt$.

Замечание 3. Если $\mathrm{U} = R_+^{2n}$, то вместо формул (31) на основании равенства $l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^2(\Delta u; w)$, с учетом тождеств (22), (23), имеем

$$\tilde{\psi}_{ni}^j = \int_0^T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}, \psi\right)_{L_2(\Omega_j)} dt - \int_0^T \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i), \psi\right)_{L_2(\Gamma_2 \cap \bar{\Omega}_j)} dt -$$

$$- \int_0^T \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i), \psi\right)_{L_2(\Gamma_3 \cap \bar{\Omega}_j)} dt + \int_0^T \int_{\gamma \cap \bar{\Omega}_j} \left\{\frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\right\}^+ \psi^+ d(\gamma \cap \bar{\Omega}_j) dt -$$

$$- \int_0^T \int_{\gamma \cap \bar{\Omega}_j} \left\{\frac{\partial y}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\right\}^- \psi^- d(\gamma \cap \bar{\Omega}_j) dt,$$

$$\|J'_{u_n}\|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{2} (\tilde{\psi}_{ni}^j)^2.$$

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (11), (12) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (12).

Решив задачу нахождения функции $z(\widetilde{\psi}_n; x, t) \in W(0, T)$, удовлетворяющей $\forall\, w \in \upsilon_0$ тождествам

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w\right) + a(\widetilde{\psi}_n; z, w) = l(w), \quad t \in (0, T], \tag{32}$$

$$(z, w)(0) = (y_0, w), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}, w\right)(0) = (y_1, w), \tag{33}$$

найдем

$$AJ'_{u_n} = \{z_i(J'_{u_n})\}_{i=1}^{N}, \tag{34}$$

где $z_i(J'_{u_n}) = z(\widetilde{\psi}_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (34), можем реализовать метод скорейшего спуска (11), (13) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (15)–(17), (10). Имея J'_{u_n}, p_{n-1}, $J'_{u_{n-1}}$, можем определить направление спуска p_n с помощью формул (14). Это позволит решить задачу определения функции $z(p_n) = z(p_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w\right) + a(p_n; z, w) = l(w), \quad t \in (0, T], \tag{35}$$

$$(z, w)(0) = (y_0, w), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}, w\right)(0) = (y_1, w). \tag{36}$$

На основании решения $z(p_n)$ задачи (35), (36) получим вектор

$$Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^{N}, \tag{37}$$

где $z_i(p_n) = z(p_n)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (37), можем использовать метод сопряженных градиентов (11), (14) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (15)–(17), (10).

Замечание 4. Для определения J'_{u_n}, AJ'_{u_n}, p_n, Ap_n в задаче (18)–(20) в качестве $l_\theta(\Delta u; w)$ используем $l_\theta^1(\Delta u; w)$; если $\mathrm{U} = R_+^{2n}$, то можно полагать также $l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^2(\Delta u; w)$.

2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ УДЕЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ И МАССОВЫХ СИЛ

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ (область Ω определена в разд. 1) определено гиперболическое уравнение

$$u_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + u_2, \tag{38}$$

где $u = (u_1, u_2) \in \mathrm{U} = (C_+(\Omega_{1T}) \times C_+(\Omega_{2T})) \times L^2(0, T; L_2(\Omega))$,

$$\sum_{i, j=1}^{n} k_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \ge \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \xi_i, \xi_j \in R^1, \quad x \in \Omega. \tag{38$'$}$$

На границе Γ_T заданы смешанные краевые условия

$$y|_{\Gamma_{1T}} = \varphi, \tag{39}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = g, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T}, \tag{40}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = -\alpha y + \beta, \quad (x, t) \in \Gamma_{3T}. \tag{41}$$

На участке γ раздела областей Ω_1, Ω_2 условия сопряжения имеют вид

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) \right] = 0, \quad t \in (0, T], \tag{42}$$

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) \right\}^{\pm} = r[y], \quad t \in (0, T]. \tag{43}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{44}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{45}$$

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных областях γ_i, разбивающих область Ω на $N+2$ областей Ω_j, известны следы решения $y = y(x, t)$ начально-краевой задачи (38)–(45), заданные равенствами (9). Тем самым получена задача определения вектора $u \in \mathrm{U}$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x, t)$ задачи (38)–(45) удовлетворяет равенствам (9). Вместо решения $y = y(u)$ задачи (38)–(45) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 4. Обобщенным решением начально-краевой задачи (38)–(45) называется функция $y = y(u) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(u_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w \right) + a(y, w) = l(u; w), \quad t \in (0, T], \tag{46}$$

$$(u_1 y, w)(0) = (u_1 y_0, w)(0), \tag{47}$$

$$\left(u_1 \frac{\partial y}{\partial t}, w \right)(0) = (u_1 y_1, w)(0), \tag{48}$$

где множества $W(0, T)$, υ_0 определены в разд. 1,

$$a(y, w) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int_{\gamma} r[y][w] d\gamma + \int_{\Gamma_3} \alpha y w d\Gamma_3,$$

$$l(u; w) = (u_2, w) + (g, w)_{L_2(\Gamma_2)} + (\beta, w)_{L_2(\Gamma_3)}. \tag{48'}$$

Заметим, что при каждом фиксированном $u \in \mathrm{U}$ решение задачи (46)–(48) $y = y(u) \in W(0, T)$ существует и единственно.

Для приращения Δu вектора $u \in \mathrm{U}$ на основании (38)–(45) приращение $\theta = \Delta y$ решения задачи (38)–(45) можем определить как решение следующей начально-краевой задачи:

$$u_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \Delta u_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \Delta u_2, \quad (x, t) \in \Omega_T, \ \theta|_{\Gamma_{1T}} = 0,$$

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = -\alpha\theta, \quad (x, t) \in \Gamma_{3T}, \tag{49}$$

$$\left[\sum_{i,\, j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) \right] = 0, \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$\left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) \right\}^{\pm} = r[\theta], \quad (x, t) \in \gamma_T,$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Определение 5. Обобщенным решением начально-краевой задачи (49) называется функция $\theta(x, t) \in W_0(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(u_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w \right) + a(\theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \quad t \in (0, T], \tag{50}$$

$$(u_1 \theta, w)(0) = 0, \quad \left(u_1 \frac{\partial \theta}{\partial t}, w \right)(0) = 0, \tag{51}$$

где

$$l_\theta(\Delta u; w) = -\left(\Delta u_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w \right) + (\Delta u_2, w). \tag{52}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (46)–(48), (10) введем в рассмотрение сопряженную задачу, состоящую в нахождении функции $\psi(x, t) \in W_d(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(u_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, w \right) + a(\psi, w) = l_\psi(u; w), \tag{52'}$$

$$(u_1 \psi, w)(T) = 0, \quad \left(u_1 \frac{\partial \psi}{\partial t}, w \right)(T) = 0,$$

где выражение $l_\psi(u; w)$ имеет вид (28).

Выбирая в тождествах (52′) вместо функции w разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (50), (51) получаем

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \tag{53}$$

где $\widetilde{\psi}_n = (\widetilde{\psi}_{n_1}, \widetilde{\psi}_{n_2})$, $\widetilde{\psi}_{n_i} = (\widetilde{\psi}^1_{n_i}, \widetilde{\psi}^2_{n_i})$, $\widetilde{\psi}^j_{n_1} = -\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\psi|_{\Omega_j}$, $i, j = 1, 2$; $\widetilde{\psi}^j_{n_2} = \psi|_{\Omega_{jT}}$,

$$\| J_{u_n}{}' \|^2 = \sum_{j=1}^{2} \int_0^T \| \widetilde{\psi}^j_{n_1} \|^2_{L_2(\Omega_j)}\, dt + \int_0^T \sum_{j=1}^{2} \| \widetilde{\psi}_{n_2} \|^2_{L_2(\Omega_j)}\, dt.$$

Замечание 5. Если $u_1|_{\Omega_j} = \text{const}$, то $\widetilde{\psi}^j_{n_1} = -\displaystyle\int_0^T \int_{\Omega_j} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\psi\, d\Omega_j\, dt$.

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (11), (12) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (12).

Решив задачу нахождения функции $z(\widetilde{\psi}_n; x, t) \in W(0, T)$, удовлетворяющей $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ тождествам

$$\left(\widetilde{\psi}_{n_1} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w \right) + a(z, w) = l(\widetilde{\psi}_n; w), \quad t \in (0, T], \tag{54}$$

$$(\widetilde{\psi}_{n_1} z, w)(0) = (\widetilde{\psi}_{n_1}\, y_0, w)(0), \tag{55}$$

$$\left(\widetilde{\psi}_{n_1} \frac{\partial z}{\partial t}, w \right)(0) = (\widetilde{\psi}_{n_1}\, y_1, w)(0), \tag{56}$$

найдем

$$AJ'_{u_n} = \{ z_i(J'_{u_n}) \}_{i=1}^N, \tag{57}$$

где $z_i(J'_{u_n}) = z(\widetilde{\psi}_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (57), можем реализовать метод скорейшего спуска (11), (13) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (46)–(48), (10). Имея J'_{u_n}, p_{n-1}, $J'_{u_{n-1}}$, можем определить направление спуска p_n с помощью формул (14). Это позволит решить задачу определения функции $z(p_n) = z(p_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(p_{n_1} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w \right) + a(z, w) = l(p_n; w), \quad t \in (0, T], \tag{58}$$

$$(p_{n_1} z, w)(0) = (p_{n_1} y_0, w)(0), \tag{59}$$

$$\left(p_{n_1} \frac{\partial z}{\partial t}, w) \right)(0) = (p_{n_1}\, y_1, w)(0). \tag{60}$$

На основании решения $z(p_n)$ задачи (58)–(60) получим вектор

$$Ap_n = \{ z_i(p_n) \}_{i=1}^N, \tag{61}$$

где $z_i(p_n) = z(p_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (61), можем использовать метод сопряженных градиентов (11), (14) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (46)–(48), (10).

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАССОВЫХ СИЛ

Пусть на области Ω_T определено гиперболическое уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + u. \tag{62}$$

На границе Γ_T заданы краевые условия (39)–(41). На участке γ_T имеем условия сопряжения (42), (43), а при $t = 0$ — начальные условия (44), (45).

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных областях γ_i, разбивающих область Ω на $N+2$ областей Ω_j, известны следы решения $y = y(x, t)$ начально-краевой задачи (62), (39)–(45), заданные равенствами (9). Тем самым получена задача (62), (39)–(45), (9), состоящая в нахождении функции $u = u(x, t) \in \mathrm{U} = L^2(0, T; L_2(\Omega))$, при которой решение $y = y(u) = y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (62), (39)–(45) удовлетворяет равенствам (9). Вместо решения $y = y(u)$ задачи (62), (39)–(45) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 6. Обобщенным решением начально-краевой задачи (62), (39)–(45) называется функция $y(u) \in W(0, T)$, которая $\forall\ w(x) \in v_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w \right) + a(y, w) = l(u; w), \quad t \in (0, T], \tag{63}$$

$$(\rho y, w)(0) = (\rho y_0, w), \tag{64}$$

$$\left(\rho \frac{\partial y}{\partial t}, w \right)(0) = (\rho y_1, w), \tag{65}$$

где билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определена соответствующим выражением (48′), $l(u; w) = (u, w) + (g, w)_{L_2(\Gamma_2)} + (\beta, w)_{L_2(\Gamma_3)}$.

Для приращения Δu вектора $u \in \mathrm{U}$ на основании тождеств (63)–(65) приращение $\theta = \Delta y$ решения задачи (63)–(65) можем определить как решение следующей задачи: найти функцию $\theta = \theta(x, t) \in W_0(0, T)$, которая $\forall\ w(x) \in v_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w \right) + a(\theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \quad t \in (0, T], \tag{66}$$

$$(\rho \theta, w)(0) = 0, \quad \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial t}, w \right)(0) = 0, \tag{67}$$

где

$$l_\theta(\Delta u; w) = (\Delta u, w). \tag{67′}$$

Пусть H_m — некоторое подпространство пространства U с базисом $\{\varphi_i(x, t)\}_{i=1}^m$. Произвольная функция $\tilde{u} \in H_m \subset \mathrm{U}$ представима в виде

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(x, t), \quad \alpha_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m}. \tag{68}$$

Вместо задачи (63)–(65), (10), где $u \in \mathrm{U}$, рассмотрим данную задачу при $u \in H_m$.

Следовательно,
$$\Delta\widetilde{u} = \sum_{i=1}^{m} \Delta\alpha_i \, \varphi_i(x, t). \tag{69}$$
Тогда в задаче (66), (67) вместо (67′) имеем
$$l_\theta(\Delta u; w) = \sum_{i=1}^{m} \Delta\alpha_i (\varphi_i, w). \tag{70}$$

Для каждого приближения $u_n = \widetilde{u}_n \in H_m \subset \mathrm{U}$ задачи (63)–(65), (10), (68) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:
$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right), \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus \gamma_d, \ \psi|_{\Gamma_{1T}} = 0,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T},$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = -\alpha\psi, \quad (x, t) \in \Gamma_{3T}, \tag{71}$$
$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) \right\}^{\pm} = r[\psi], \quad (x, t) \in \gamma_T,$$
$$[\psi] = 0, \quad (x, t) \in \gamma_{lT},$$
$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) \right] = -\rho_l (y(u_n) - f_l), \quad (x, t) \in \gamma_{lT}, \quad l = \overline{1, N},$$
$$\psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, T) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Определение 7. Обобщенным решением начально-краевой задачи (71) называется функция $\psi(x, t) \in W_d(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств
$$\left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, w \right) + a(\psi, w) = l_\psi(w), \quad t \in (0, T], \tag{72}$$
$$(\rho\psi, w)(T) = 0, \quad \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial t}, w \right)(T) = 0,$$
где
$$l_\psi(w) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j(t)(y(u_n) - f_j, w)_{L_2(\gamma_j)}. \tag{73}$$

Выбирая в тождествах (72) вместо функции w разность $y(u_{n+1}) - - y(u_n)$, с учетом (66), (67), (70) имеем
$$\int_0^T \sum_{j=1}^{N} \rho_j(t)(y(u_n) - f_j, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_j)} dt = \sum_{i=1}^{m} \Delta\alpha_i \int_0^T (\varphi_i, \psi) dt. \tag{74}$$

С учетом (74) имеем

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \tag{75}$$

где $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_{n_i}\}_{i=1}^{m}$, $\widetilde{\psi}_{n_i} = \int\limits_0^T (\varphi_i, \psi)dt$.

Замечание 6. В силу того, что уравнение (62) определено на областях Ω_{jT}, $j = 1, 2$, то можно предположить $H_m = H_{m_1} \times H_{m_2}$, $m = m_1 + m_2$, т.е. $u = u^j(x, t)$ при $(x, t) \in \Omega_{jT}$. Имеем $\widetilde{u}(x, t) = \widetilde{u}^j(x, t)$ при $(x, t) \in \Omega_{jT}$ и

$$\widetilde{u}^j(x, t) = \sum_{i=1}^{m_j} a_i^j \varphi_i^j(x, t), \quad j = 1, 2. \tag{74$'$}$$

Следовательно,

$$l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta(\Delta \widetilde{u}, w) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_j} \Delta a_i^j (\varphi_i^j, w)_{L_2(\Omega_j)}. \tag{75$'$}$$

С учетом (66), (67), (72), (75′) имеем $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = (\widetilde{\psi}_{n_1}, \widetilde{\psi}_{n_2})$, $\widetilde{\psi}_{n_j} = \{\widetilde{\psi}_{n_j}^i\}_{i=1}^{m_j}$, $\widetilde{\psi}_{n_j}^i = (\varphi_i^j, \psi)_{L_2(\Omega_j)}$.

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (11), (12) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (12). Решив задачу нахождения функции $z(\widetilde{\psi}_n; x, t) \in W(0, T)$, удовлетворяющей $\forall\, w \in \upsilon_0$ тождествам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w\right) + a(z, w) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_j} \widetilde{\psi}_{nj}^i (\varphi_i^j, w)_{L_2(\Omega_j)} +$$

$$+ (g, w)_{L_2(\Gamma_2)} + (\beta, w)_{L_2(\Gamma_3)}, \quad t \in (0, T],$$

$$(\rho z, w)(0) = (\rho y_0, w), \quad \left(\rho \frac{\partial z}{\partial t}, w\right)(0) = (\rho y_1, w),$$

определим

$$AJ'_{u_n} = \{z_i(J'_{u_n})\}_{i=1}^{N}, \tag{76}$$

где $z_i(J'_{u_n}) = z(\widetilde{\psi}_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (76), можем реализовать метод скорейшего спуска (11), (13) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (63)–(65), (10), (74′). Можем определить направление спуска p_n с помощью формул (14). Это позволит решить задачу определения функции $z(p_n) = z(p_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w\right) + a(z, w) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_j} p_{nj}^i (\varphi_i^j, w)_{L_2(\Omega_j)} +$$

$$+ (g, w)_{L_2(\Gamma_2)} + (\beta, w)_{L_2(\Gamma_3)}, \quad t \in (0, T], \tag{77}$$

$$(\rho z, w)(0) = (\rho y_0, w), \quad \left(\rho \frac{\partial z}{\partial t}, w\right)(0) = (\rho y_1, w). \tag{78}$$

На основании решения $z(p_n)$ задачи (77), (78) получим вектор

$$Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^{N}, \tag{78'}$$

где $z_i(p_n) = z(p_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (78′), можем использовать метод сопряженных градиентов (11), (14) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (63)–(65), (10), (74′).

4. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОЧНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Пусть на области Ω_T определено уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + \tilde{f}. \tag{79}$$

На границе Γ_T заданы краевые условия (39)–(41). На участке γ_T условия сопряжения имеют вид

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i)\right] = 0, \tag{80}$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i)\right\}^{\pm} = u[y]. \tag{81}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия (44), (45).

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных областях γ_i, разбивающих область Ω на $N+2$ области Ω_j, известны следы решения $y = y(x, t)$ начально-краевой задачи (79), (39)–(41), (44), (45), (80), (81), заданные равенствами (9).

Определение 8. При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U} = R_+$ обобщенным решением начально-краевой задачи (79), (39)–(41), (44), (45), (80), (81) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right) + a(u; y, w) = l(w), \quad t \in (0, T], \tag{82}$$

$$(\rho y, w)(0) = (\rho y_0, w), \tag{83}$$

$$\left(\rho \frac{\partial y}{\partial t}, w\right)(0) = (\rho y_1, w), \tag{84}$$

где

$$a(u; y, w) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx + \int_{\gamma} u[y][w]\, d\gamma + \int_{\Gamma_3} \alpha y w\, d\Gamma_3,$$

$$l(w) = (\tilde{f}, w) + (g, w)_{L_2(\Gamma_2)} + (\beta, w)_{L_2(\Gamma_3)}.$$

Для приращения Δu параметра $u \in \mathrm{U}$ на основании (82)–(84) приращение $\theta = \Delta y$ решения $y = y(u)$ задачи (82)–(84) можем определить как решение задачи

$$\left(\rho\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},\,w\right)+a\,(u;\theta,w)=l_\theta\,(\Delta u;w),\quad t\in(0,T\,], \tag{85}$$

$$(\rho\theta,w)(0)=0,\quad \left(\rho\,\frac{\partial\theta}{\partial t},\,w\right)(0)=0, \tag{86}$$

где

$$l_\theta\,(\Delta u;w)=-\,\Delta u\int_\gamma\,[\,y\,(u)][w]d\gamma. \tag{87}$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in \mathrm{U}$ задачи (82)–(84), (10) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\rho\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right),\quad (x,t)\in\Omega_T\setminus\gamma_d,\ \psi|_{\Gamma_{1T}}=0,$$

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}k_{ij}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}k_{ij}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)=-\,\alpha\psi,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T}, \tag{88}$$

$$\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n}k_{ij}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=u_n[\psi],\quad (x,t)\in\gamma_T,\ [\psi]=0,\quad (x,t)\in\gamma_{lT},$$

$$\left[\sum_{i,\,j=1}^{n}k_{ij}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)\right]=-\,\rho_l\,(\,y\,(u_n)-f_l),\quad (x,t)\in\gamma_{lT},\quad l=\overline{1,N},$$

$$\psi\,(x,T)=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,T)=0.$$

Определение 9. Обобщенным решением начально-краевой задачи (88) называется функция $\psi\,(x,t)\in W_d\,(0,T)$, которая $\forall\,w(x)\in \upsilon_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\,w\right)+a\,(u_n;\psi,w)=l_\psi\,(w),\quad t\in(0,T\,], \tag{89}$$

$$(\rho\psi,w)(T)=0,\quad \left(\rho\,\frac{\partial\psi}{\partial t},\,w\right)(T)=0, \tag{90}$$

где $l_\psi\,(w)$ имеет вид (73).

Выбирая в тождествах (89), (90) вместо функции w разность $y\,(u_{n+1})-y\,(u_n)$, с учетом (85), (86) имеем

$$\int_0^T\sum_{j=1}^{N}\rho_j\,(\,y\,(u_n)-f_j,\,y\,(u_{n+1})-y\,(u_n))_{L_2(\gamma_j)}\,dt=-\,\Delta u_n\int_0^T\int_\gamma\,[\,y\,(u_n)][\psi]d\gamma dt.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n, \tag{91}$$

где $\widetilde{\psi}_n=-\int_0^T\int_\gamma\,[\,y\,(u_n)][\psi]d\gamma dt.$

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (11), (12) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (12).

Решив задачу нахождения функции $z(\widetilde{\psi}_n; x, t) \in W(0, T)$, удовлетворяющей $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ тождествам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w \right) + a(\widetilde{\psi}_n; z, w) = l(w), \quad t \in (0, T], \tag{92}$$

$$(\rho z, w)(0) = (\rho y_0, w), \tag{93}$$

$$\left(\rho \frac{\partial z}{\partial t}, w \right)(0) = (\rho y_1, w), \tag{94}$$

найдем

$$AJ'_{u_n} = \{ z_i(J'_{u_n}) \}_{i=1}^{N}, \tag{95}$$

где $z_i(J'_{u_n}) = z(\widetilde{\psi}_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (95), можем реализовать метод скорейшего спуска (11), (13) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (82)–(84), (10). Имея J'_{u_n}, p_{n-1}, $J'_{u_{n-1}}$, можем определить направление спуска p_n с помощью формул (14). Это позволит решить задачу нахождения функции $z(p_n) = z(p_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w \right) + a(p_n; z, w) = l(w), \quad t \in (0, T], \tag{96}$$

$$(\rho z, w)(0) = (\rho y_0, w), \tag{97}$$

$$\left(\rho \frac{\partial z}{\partial t}, w \right)(0) = (\rho y_1, w). \tag{98}$$

На основании решения $z(p_n)$ задачи (96)–(98) получим вектор

$$Ap_n = \{ z_i(p_n) \}_{i=1}^{N}, \tag{99}$$

где $z_i(p_n) = z(p_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (99), можем использовать метод сопряженных градиентов (11), (14) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (82)–(84), (10).

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Пусть на области Ω_T определено уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + \widetilde{f}. \tag{100}$$

На границе Γ_T заданы краевые условия (39)–(41). На γ_T условия сопряжения имеют вид (42), (43), а при $t = 0$ заданы начальные условия

$$y(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{101}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = u_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{102}$$

Определение 10. При каждом фиксированном $u=(u_1, u_2)\in \mathrm{U}=C(\Omega)\times L_2(\Omega)$ обобщенным решением начально-краевой задачи (100), (39)–(43), (101), (102) называется функция $y=y(u)\in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right)+a(y,w)=l(w),\quad t\in(0,T], \tag{103}$$

$$(\rho y, w)(0)=(\rho u_1, w), \tag{104}$$

$$\left(\rho\frac{\partial y}{\partial t}, w\right)(0)=(\rho u_2, w). \tag{105}$$

Для приращения Δu вектора $u\in \mathrm{U}$ на основании (103)–(105) или на основании начально-краевой задачи (100), (39)–(43), (101), (102) приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$ задачи (103)–(105) можем определить как решение следующей задачи: найти функцию $\theta=\theta(x,t)\in W_0(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in\upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, w\right)+a(\theta,w)=0,\quad t\in(0,T], \tag{106}$$

$$(\rho\theta, w)(0)=(\rho \Delta u_1, w), \tag{107}$$

$$\left(\rho\frac{\partial \theta}{\partial t}, w\right)(0)=(\rho \Delta u_2, w). \tag{108}$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in \mathrm{U}$ задачи (103)–(105), (10) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right),\quad (x,t)\in\Omega_T\setminus\gamma_d,\ \psi|_{\Gamma_{1T}}=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)=-\alpha\psi,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T}, \tag{109}$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)\right\}^{\pm}=r[\psi],\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$[\psi]=0,\quad (x,t)\in\gamma_{lT},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)\right]=-\rho_l(y(u_n)-f_l),\quad (x,t)\in\gamma_{lT},\quad l=\overline{1,N},$$

$$\psi(x,T)=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,T)=0,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2.$$

Определение 11. Обобщенным решением начально-краевой задачи (109) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\# w(x)\in \upsilon_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, w\right)+a(\psi,w)=l_\psi(w),\quad t\in(0,T], \tag{110}$$

$$(\rho\psi, w)(T)=0,\quad \left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}, w\right)(T)=0, \tag{111}$$

где $l_\psi(w)$ имеет вид (73).

Выбирая в тождествах (110), (111) вместо функции w разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (106)–(108) имеем

$$\int_0^T\sum_{j=1}^N\rho_j(y(u_n)-f_j,\, y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_j)}dt=\int_0^T\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, y(u_{n+1})-y(u_n)\right)dt+$$

$$+\int_0^T a(\psi, y(u_{n+1})-y(u_n))dt=\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}, y(u_{n+1})-y(u_n)\right)\Bigg|_0^T-$$

$$-\left(\rho\psi, \frac{\partial(y(u_{n+1})-y(u_n))}{\partial t}\right)\Bigg|_0^T+\int_0^T\left(\rho\frac{\partial^2(y(u_{n+1})-y(u_n))}{\partial t^2},\psi\right)dt+$$

$$+\int_0^T a(y(u_{n+1})-y(u_n),\psi)dt=-\left(\rho\,\Delta u_1,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)(0)+(\rho\Delta u_2,\psi)(0),$$

т.е.

$$\int_0^T\sum_{j=1}^N\rho_j(y(u_n)-f_j,\, y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_j)}dt=-\left(\rho\Delta u_1,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)(0)+(\rho\Delta u_2,\psi)(0).$$

Следовательно,

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n, \tag{112}$$

где $\widetilde{\psi}_n=(\widetilde{\psi}_{n_1},\widetilde{\psi}_{n_2})$, $\widetilde{\psi}_{n_1}=-\rho\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_\Omega(0)$, $\widetilde{\psi}_{n_2}=\rho\psi|_\Omega(0)$, $||J_{u_n}'||^2=\int_\Omega\widetilde{\psi}^2_{n_1}dx+$ $+\int_\Omega\widetilde{\psi}^2_{n_2}dx.$

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (11), (12) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (12).

Решив задачу нахождения функции $z(\widetilde{\psi}_n; x,t)\in W(0,T)$, удовлетворяющей $\forall\, w(x)\in\upsilon_0$ тождествам

$$\left(\rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w\right)+a(z,w)=l(w),\quad t\in(0,T], \tag{113}$$

$$(\rho z, w)(0)=(\rho\widetilde{\psi}_{n_1}, w)(0), \tag{114}$$

$$\left(\rho\frac{\partial z}{\partial t}, w\right)(0)=(\rho\widetilde{\psi}_{n_2}, w)(0), \tag{115}$$

получим

$$AJ'_{u_n} = \{z_i(J'_{u_n})\}_{i=1}^{N}, \qquad (116)$$

где $z_i(J_{u_n}{}') = z(\widetilde{\psi}_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (116), можем реализовать метод скорейшего спуска (11), (13) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (103)–(105), (10). Имея J'_{u_n}, p_{n-1}, $J'_{u_{n-1}}$, можем определить направление спуска p_n с помощью формул (14). Это позволит решить задачу определения функции $z(p_n) = z(p_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\ w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w\right) + a(z, w) = l(w), \quad t \in (0, T],$$

$$(\rho z, w)(0) = (\rho p_{n_1}, w)(0), \qquad (117)$$

$$\left(\rho \frac{\partial z}{\partial t}, w\right)(0) = (\rho p_{n_2}, w)(0),$$

где $p_n = (p_{n_1}, p_{n_2})$.

На основании решения $z(p_n)$ задачи (117) получим вектор

$$Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^{N}, \qquad (118)$$

где $z_i(p_n) = z(p_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (118), можем использовать метод сопряженных градиентов (11), (14) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (103)–(105), (10).

6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (100), (39)–(43), (101), (102) при известных следах ее решения (9). Задача (100), (39)–(43), (101), (102), (9) состоит в нахождении вектора $u \in \mathrm{U}$, при котором решение $y = y(u)$ задачи (103)–(105) удовлетворяет равенствам (9). Вектор u и множество U определены в разд. 5.

Вместо множества U используем его подмножество $H_m = H_m^1 \times H_m^2$ с соответствующими базисами $\{\varphi_i^j(x)\}_{i=1}^{m_j}$, $j = 1, 2$, $m = m_1 + m_2$.

Для каждого приближения $u_n = \widetilde{u}_n \in H_m \subset \mathrm{U}$ задачи (103)–(105), (10) введем в рассмотрение сопряженную задачу (109), т.е. задачу (110), (111). Выбирая в тождествах (110), (111) вместо функции w разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (106)–(108) и того, что $\widetilde{u}_n = (\widetilde{u}_n^1, \widetilde{u}_n^2)$, где $\widetilde{u}_n^j = \sum\limits_{i=1}^{m_j} a_i^j \varphi_i^j(x)$, $a_i^j \in R^1$, имеем

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{N} \rho_j (y(u_n) - f_j, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_j)} dt =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m_1} \Delta a_i^1 \left(\rho\varphi_i^1, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)(0) + \sum_{i=1}^{m_2} \Delta a_i^2 (\rho\varphi_i^2, \psi)(0).$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n,$$

где $\widetilde{\psi}_n = (\widetilde{\psi}_{n_1}, \widetilde{\psi}_{n_2})$, $\widetilde{\psi}_{n_j} = \{\widetilde{\psi}^i_{n_j}\}_{i=1}^{m_j}$, $j = 1, 2$, $\widetilde{\psi}^i_{n_1} = -\left(\rho\varphi^1_i, \dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)(0)$, $\widetilde{\psi}^i_{n_2} =$ $= (\rho\varphi^2_i, \psi)(0)$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_j} (\widetilde{\psi}^i_{n_j})^2$.

Замечание 7. В случае разрывных функций u_1, u_2 начальных условий (101), (102) можно использовать множества H^j_m, $j = 1, 2$, разрывных функций φ^j_i, т.е. предположим: $H^j_m = H^{j_1}_m \times H^{j_2}_m$, базис множества H^{jl}_m составляют функции $\{\varphi^{jl}_i(x)\}_{i=1}^{m_{jl}}$, $\sum_{l=1}^{2} m_{jl} = m_j$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{N} \rho_j (y(u_n) - f_j, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_j)} dt =$$

$$= -\sum_{l=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_{1l}} \Delta a^{1l}_i \left(\rho\varphi^{1l}_i, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{L_2(\Omega_l)}(0) + \sum_{l=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_{2l}} \Delta a^{2l}_i (\rho\varphi^{2l}_i, \psi)(0).$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \tag{119}$$

где $\widetilde{\psi}_n = (\widetilde{\psi}_{n_1}, \widetilde{\psi}_{n_2})$, $\widetilde{\psi}_{nj} = (\widetilde{\psi}_{nj1}, \widetilde{\psi}_{nj2})$, $\widetilde{\psi}_{njl} = \{\widetilde{\psi}^i_{njl}\}_{i=1}^{m_{jl}}$, $\widetilde{\psi}^i_{n1l} =$ $= -\left(\rho\varphi^{1l}_i, \dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{L_2(\Omega_l)}(0)$, $\widetilde{\psi}^i_{n2l} = (\rho\varphi^{2l}_i, \psi)_{L_2(\Omega_l)}(0)$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \sum_{l=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_{jl}} (\widetilde{\psi}^i_{njl})^2$.

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (11), (12) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (12). Решив задачу нахождения функции $z(\widetilde{\psi}_n; x, t) \in W(0, T)$, удовлетворяющей $\forall\, w(x) \in v_0$ тождествам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w\right) + a(z, w) = l(w), \quad t \in (0, T],$$

$$(\rho z, w)(0) = \sum_{l=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_{1l}} \widetilde{\psi}^i_{n1l} (\rho\varphi^{1l}_i, w)_{L_2(\Omega_l)}(0),$$

$$\left(\rho \frac{\partial z}{\partial t}, w\right)(0) = \sum_{l=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_{2l}} \widetilde{\psi}^i_{n2l} (\rho\varphi^{2l}_i, w)_{L_2(\Omega_l)}(0),$$

определим

$$AJ'_{u_n} = \{z_i(J'_{u_n})\}_{i=1}^{N}, \tag{120}$$

где $z_i(J'_{u_n}) = z(\widetilde{\psi}_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (120), можем реализовать метод скорейшего спуска (11), (13) для определения $(n+1)$-го приближения $u_{n+1} \in H_m = (H^{11}_m \times H^{12}_m) \times (H^{21}_m \times H^{22}_m)$ решения u задачи (103)–(105), (10). Можем определить направление спуска p_n с помощью формул (14). Это позволит решить задачу определения функции $z(p_n) = z(p_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w\right) + a(z, w) = l(w), \quad t \in (0, T],$$

$$(\rho z, w)(0) = \sum_{l=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_{1l}} p_{n1l}^{i} (\rho \varphi_i^{1l}, w)_{L_2(\Omega_l)}(0),$$

$$\left(\rho \frac{\partial z}{\partial t}, w\right)(0) = \sum_{l=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_{2l}} p_{n2l}^{i} (\rho \varphi_i^{2l}, w)_{L_2(\Omega_l)}(0).$$

На основании решения $z(p_n)$ данной задачи получим вектор

$$Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^{N}, \tag{121}$$

где $z_i(p_n) = z(p_n; x, t)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (121), можем использовать метод сопряженных градиентов (11), (14) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (103)–(105), (10).

7. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРА СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ

Пусть на области Ω_T определено гиперболическое уравнение (100). На границе Γ_T заданы краевые условия (39)–(41). При $t = 0$ имеем начальные условия (44), (45), где $[y_0]|_\gamma = [y_1]|_\gamma = 0$. На γ_T определены условия сопряжения сосредоточенной массы

$$[y] = 0, \tag{122}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i)\right] = u \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad u = \text{const} \geq 0. \tag{123}$$

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных областях γ_i, разбивающих область Ω на $N+2$ связных ограниченных строго липшицевых областей Ω_j, известны следы решения $y = y(u)$ начально-краевой задачи (100), (39)–(41), (44), (45), (122), (123), заданные равенствами (9).

Определение 12. При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U} = R_+$ обобщенным решением начально-краевой задачи (100), (39)–(41), (44), (45), (122), (123) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a_0\left(u; \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, w\right) + a(y, w) = l(w), \quad t \in (0, T], \tag{124}$$

$$a_0(u; y, w)(0) = a_0(u; y_0, w), \tag{125}$$

$$a_0\left(u; \frac{\partial y}{\partial t}, w\right)(0) = a_0(u; y_1, w), \tag{126}$$

где

$$W(0, T) = \{v(x, t) \in L^2(0, T; V): \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; L_2(\Omega)), \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \in$$

$$\in L^2(0,T;L_2(\Omega))\cap L^2(0,T;L_2(\gamma))\},$$

$$V=\{v(x,t)\in\overline{V}:v|_{\Gamma_{1T}}=\varphi,\ [v]|_{\gamma_T}=0\},$$

$$\overline{V}=\{v(x,t):v|_{\Omega_l}\in W_2^1(\Omega_l),\ l=1,2,\ t\in(0,T]\},$$

$$a_0(u;y,w)=(\rho y,w)+(uy,w)_{L_2(\gamma)},$$

$$a(y,w)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}dx+\int\limits_{\Gamma_3}\alpha ywd\Gamma_3.$$

На основании начально-краевой задачи (100), (39)–(41), (44), (45), (122), (123) или обобщенной задачи (124)–(126) для приращения Δu параметра $u\in\mathrm{U}$ приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$ задачи (124)–(126) можем определить как решение следующей задачи: найти функцию $\theta=\theta(x,t)\in W_0(0,T)$, которая $\forall\ w(x)\in v_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a_0\left(u;\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},w\right)+a(\theta,w)=l_\theta(\Delta u;w),\quad t\in(0,T], \tag{127}$$

$$a_0(u;\theta,w)(0)=-\Delta u(y(u),w)_{L_2(\gamma)}(0)+\Delta u(y_0,w)_{L_2(\gamma)}, \tag{128}$$

$$a_0\left(u;\frac{\partial\theta}{\partial t},w\right)(0)=-\Delta u\left(\frac{\partial y}{\partial t}(u),w\right)_{L_2(\gamma)}(0)+\Delta u(y_1,w)_{L_2(\gamma)}, \tag{129}$$

где

$$W_0(0,T)=\{v(x,t)\in L^2(0,T;V^0):\frac{\partial y}{\partial t}\in L^2(0,T;L_2(\Omega)),$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\in L^2(0,T;L_2(\Omega))\cap L^2(0,T;L_2(\gamma))\},$$

$$V^0=\{v(x,t)\in\overline{V}:v|_{\Gamma_{1T}}=0,\ [v]|_{\gamma_T}=0\},\ l_\theta(\Delta u;w)=-\Delta u\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},w\right)_{L_2(\gamma)}.$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathrm{U}$ задачи (124)–(126), (10) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right),\quad (x,t)\in\Omega_T\setminus\gamma_d,\ \psi|_{\Gamma_{1T}}=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_{2T},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)=-\alpha\psi,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T},$$

$$[\psi]=0,\quad (x,t)\in\gamma_T\cup\gamma_{jT},\quad j=\overline{1,N}, \tag{130}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)\right]=u_n\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\quad (x,t)\in\gamma_T,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)\right] = -\rho_l(y(u_n)-f_l), \quad (x,t)\in\gamma_{lT}, \quad l=\overline{1,N},$$

$$\psi(x,T)=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,T)=0, \quad x\in\overline{\Omega}.$$

Определение 13. Обобщенным решением начально-краевой задачи (130) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in \upsilon_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$a_0\left(u; \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, w\right) + a(\psi, w) = l_\psi(w), \quad t\in(0,T],$$
$$a_0(u;\psi,w)(T)=0, \quad a_0\left(u;\frac{\partial\psi}{\partial t}, w\right)(T)=0, \tag{131}$$

где $u=u_n$, $W_d(0,T)=\{v(x,t)\in L^2(0,T;\upsilon_d): \dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\in L^2(0,T;L_2(\Omega))\cap$ $\cap L^2(0,T;L_2(\gamma))\}$, $\upsilon_d=\{v(x,t)\in \overline{V}_d: \psi|_{\Gamma_{1T}}=0, [\psi]|_{\gamma_T\cup\gamma_d}=0\}$, $\upsilon_{d_0}=\{v(x)\in$ $\in\overline{V}_{d_0}: v|_{\Gamma_1}=0, [v]|_{\gamma\cup\gamma_d}=0\}$.

Выбирая в тождествах (131) вместо функции w разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (127)–(129) имеем

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n, \tag{132}$$

где

$$\psi_n=-\int_0^T\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\psi\right)_{L_2(\gamma)}dt-\left(\frac{\partial y}{\partial t},\psi\right)_{L_2(\gamma)}(0)+(y_1,w)_{L_2(\gamma)}+$$
$$+\left(y,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{L_2(\gamma)}(0)-(y_0,w)_{L_2(\gamma)}, \quad \|J'_{u_n}\|^2=\widetilde{\psi}_n^2.$$

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (11), (12) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (12).

Решив задачу нахождения функции $z(\widetilde{\psi}_n;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in\upsilon_0$ удовлетворяет тождествам

$$a_0\left(\widetilde{\psi}_n;\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},w\right)+a(z,w)=l(w), \quad t\in(0,T],$$
$$a_0(\widetilde{\psi}_n;z,w)(0)=a_0(\widetilde{\psi}_n;y_0,w), \tag{133}$$
$$a_0\left(\widetilde{\psi}_n;\frac{\partial z}{\partial t},w)\right)(0)=a_0(\widetilde{\psi}_n;y_1,w),$$

получим

$$AJ'_{u_n}=\{z_i(J'_{u_n})\}_{i=1}^N, \tag{134}$$

где $z_i(J'_{u_n})=z(\widetilde{\psi}_n;x,t)|_{\gamma_{iT}}$, $i=\overline{1,N}$.

Учитывая (134), можем реализовать метод скорейшего спуска (11), (13) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (124)–(126) в направление спуска p_n с помощью формул (14) и решив задачу нахождения функции $z(p_n) = z(p_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\ w(x) \in \upsilon_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a_0\left(p_n; \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, w \right) + a(z, w) = l(w), \quad t \in (0, T],$$

$$a_0(p_n; z, w)(0) = a_0(p_n; y_0, w), \tag{135}$$

$$a_0\left(p_n; \frac{\partial z}{\partial t}, w \right)(0) = a_0(p_n; y_1, w),$$

получим вектор

$$Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^{N}, \tag{136}$$

где $z_i(p_n) = z(p_n)|_{\gamma_{iT}}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (136), можем реализовать метод скорейшего спуска (11), (14) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (124)–(126), (10).

8. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВЕЛИЧИНЫ РАСКЛИНИВАЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Пусть на области Ω_T определено гиперболическое уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{1i}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + \tilde{f}(x, t). \tag{137}$$

На границе Γ_T заданы смешанные краевые условия

$$\begin{gathered} y|_{\Gamma_{1T}} = \varphi, \\ \sum_{i=1}^{n} u_{1i} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) = g, \quad (x, t) \in \Gamma_{2T}, \\ \sum_{i=1}^{n} u_{1i} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) = -\alpha y + \beta, \quad (x, t) \in \Gamma_{3T}. \end{gathered} \tag{138}$$

На γ_T условия сопряжения имеют вид

$$[y] = 0, \tag{139}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} u_{1i} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) \right] = u_2, \quad u_2 \geq 0. \tag{140}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$y(x, 0) = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{141}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{142}$$

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных областях γ_i, разбивающих область Ω на $N+2$ связных ограниченных строго липшицевых областей Ω_j ($\gamma_i \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$), известны следы решения $y = y(x, t)$ начально-краевой задачи (137)–(142).

Функционал-невязка имеет вид (10).

Определение 14. При каждом фиксированном $u=(u_1, u_2)\in \mathrm{U}= =(C_+(\overline{\Omega}_{1T}))^n \times (C_+(\overline{\Omega}_{2T}))^n \times R_+$ обобщенным решением начально-краевой задачи (137)–(142) называется функция $y=y(u)=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in v_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\, w\right)+a\,(u;\,y,\,w)=l\,(u;\,w),\quad t\in(0,T], \tag{143}$$

$$(\rho y,\, w)(0)=(\rho y_0,\, w),\quad \left(\rho\,\frac{\partial y}{\partial t},\, w\right)(0)=(\rho y_1,\, w),$$

где множества $W(0,T)$, v_0 определены в разд. 7,

$$a\,(u;\,y,\,w)=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}u_{1i}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx+\int_{\Gamma_3}\alpha y w d\Gamma_3,$$

$$l\,(u;\,w)=(\widetilde{f},\,w)+(g,\,w)_{L_2(\Gamma_2)}+(\beta,\,w)_{L_2(\Gamma_3)}-\int_{\gamma}u_2 w d\gamma,$$

$$u_1=\{u_{1i}\}_{i=1}^{n}.$$

Для допустимого приращения Δu вектора $u\in\mathrm{U}$ на основании задачи (143) приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$ задачи (143) можем определить как решение следующей задачи: найти функцию $\theta=\theta(x,t)\in W_0(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in v_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\rho\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2},\, w\right)+a\,(u;\,\theta,\,w)=l_\theta\,(\Delta u;\,w),\quad t\in(0,T], \tag{144}$$

$$(\rho\theta,\, w)(0)=0,\quad \left(\rho\,\frac{\partial \theta}{\partial t},\, w\right)=0, \tag{145}$$

где

$$l_\theta\,(\Delta u;\,w)=-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\Delta u_{1i}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx-\int_{\gamma}\Delta u_2 w d\gamma. \tag{145$'$}$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathrm{U}$ задачи (143), (10) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\begin{gathered}
\rho\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{1i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right),\quad (x,t)\in\Omega_T\setminus\gamma_d,\ \psi|_{\Gamma_{1T}}=0,\\
\sum_{i=1}^{n}u_{1i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_{2T},\\
\sum_{i=1}^{n}u_{1i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)=-\alpha\psi,\quad (x,t)\in\Gamma_{3T},\ [\psi]]|_{\gamma_T}=0,\\
\left[\sum_{i=1}^{n}u_{1i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)\right]=0,\quad (x,t)\in\gamma_T,\\
[\psi]=0,\quad (x,t)\in\gamma_{jT},\quad j=\overline{1,N},\\
\left[\sum_{i=1}^{n}u_{1i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)\right]=-\rho_j\,(y(u_n)-f_j),\quad (x,t)\in\gamma_{jT},\quad j=\overline{1,N},\\
\psi\,(x,T)=0,\quad \frac{\partial \psi}{\partial t}\,(x,T)=0,\quad x\in\overline{\Omega}.
\end{gathered} \tag{146}$$

Определение 15. Обобщенным решением начально-краевой задачи (146) называется функция $\psi(x, t) \in W_d(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in \upsilon_{d_0}$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, w\right) + a(u; \psi, w) = l_\psi(w), \quad t \in (0, T], \tag{147}$$

$$(\rho\psi, w)(T) = 0, \quad \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial t}, w\right)(T) = 0.$$

Выбирая в тождествах (147) вместо функции w разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (144), (145) имеем

$$\int_0^T \sum_{j=1}^N \rho_j (y(u_n) - f_j, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_j)} dt =$$

$$= \int_0^T \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, (y(u_{n+1}) - y(u_n))\right) dt + \int_0^T a(u; y(u_{n+1}) - y(u_n), \psi) =$$

$$= -\int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^N \Delta u_{1i} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt - \int_0^T \int_\gamma \Delta u_2 \psi d\gamma dt.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \tag{148}$$

где $\widetilde{\psi}_n = (\widetilde{\psi}_{n_1}, \widetilde{\psi}_{n_2})$, $\widetilde{\psi}_{n_1} = \{\widetilde{\psi}_{n_1 i}\}_{i=1}^n$, $\widetilde{\psi}_{n_1 i} = -\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}|_{\Omega_T}$, $\widetilde{\psi}_{n_2} = -\psi|_{\gamma_T}$.

Вместо множества U можем использовать его подмножество $H_m = (H_m^1 \times H_m^2) \times R_+$ с соответствующим базисом $\{\varphi_i^j(x, t)\}_{i=1}^{m_j}$, $j = 1, 2$, $m = m_1 + m_2$. Тогда

$$u_{1i}^j = \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{1i}^j \varphi_i^j(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_{jT}, \quad \varphi_i^j \geq 0, \quad \alpha_{1i}^j \in R_+, \quad j = 1, 2. \tag{149}$$

На основании (145′), с учетом (149), имеем $l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^1(\Delta u; w)$, где

$$l_\theta^1(\Delta u; w) = -\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{m_j} \Delta\alpha_{1i}^j \int_{\Omega_j} \varphi_i^j \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx - \int_\gamma \Delta u_2 w d\gamma. \tag{150}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in H_m$ задачи (143), (10) сопряженная задача имеет вид (147). Задачи (147), (144), (145), с учетом (150), позволяют реализовать градиентные методы (11), (12); (11), (13); (11), (14) решения задачи (143), (10) при $\mathrm{U} = H_m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 49–73.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для псевдопараболических многокомпонентных распределенных систем // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 4. — С. 33–58.
3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
5. Sergienko Ivan V., Deineka Vasyl S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. — 400 p.

Поступила 03.07.2007