

УДК 62-50

©2011. Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО КВАЗИТВЕРДОГО ТЕЛА В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободно-го твердого тела. Предполагается, что тело содержит сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил вязкого трения. Считается, что тело динамически несимметрично. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

**Ключевые слова:** *оптимальное торможение, вращение, твердое тело.*

**Введение.** Анализ движения гибридных систем, т.е. объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Он может быть проведен в рамках теории сингулярно-возмущенных задач. Получены важные результаты для систем, содержащих квазитвердые тела. Предполагается, что поступательно-вращательные движения таких систем близки (при некоторых условиях) движению абсолютно твердых тел. Влияние неидеальностей сводится к эффектам типа “временных погранслоев” и к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях Эйлера углового движения некоторого фиктивного твердого тела после завершения переходных процессов.

Аналізу пассивних рухів твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, в опротивляючій середі уделялось більше уваження [1–6]. Проблема управління обертаннями квазитвердих тіл при допомозі сосредоточених (прилежених к корпусу) моментів сил менше досліджена. Удалось виділити клас систем, приводящих к гладким управляючим впливам и даючих можливість застосування методів сингулярних возмущень без накоплення погрешностей типу “погранслоев”, возникающих в случае разрывных, в частности, релейных управлений [7–9].

Нижче досліджується задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного тела со сферической полостью, заповненою жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Управление обертаннями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю; он может быть реализован посредством верньерных реактивных двигателей [7]. Рассматриваемая модель обобщает результаты, полученные ранее в [7–12]. В статье [8] изучена задача оптимального торможения вращений динамически симметричного тела, содержащего вязкоупругий элемент и полость, заповненную жидкостью. В

работе [9] исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и подвижной массой, соединенной с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. В [10] рассмотрена задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. При этом на твердое тело действует малый тормозящий момент сил вязкого трения внешней среды. В [11] исследована задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного тела в среде с сопротивлением. В статье [12] изучена оптимальная стабилизация вращений гиростата с вязкоупругим элементом в сопротивляющейся среде.

В монографии [7] получены приближенные решения возмущенных задач оптимального по быстродействию торможения вращений твердых тел относительно центра масс, в том числе объектов с внутренними степенями свободы, имеющих приложения в динамике космических и летательных аппаратов. Изучено торможение тел, имеющих полость с вязкой жидкостью. Рассмотрены случаи осесимметричного и несимметричного в невозмущенном состоянии тел со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Проведен анализ торможения возмущенных вращений твердого тела, близкого к сферическо-симметричному, под действием момента сил линейного сопротивления среды.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается динамически несимметричное твердое тело, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству  $A_1 > A_2 > A_3$ . На основе подхода [7] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [1, 4, 5, 7]

$$J\dot{\omega} + [\omega \times J\omega] = \mathbf{M}^u + \mathbf{M}^r + \mathbf{M}^c. \quad (1)$$

Здесь  $\omega = (p, q, r)$  – вектор абсолютной угловой скорости;  $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции тела,  $\mathbf{M}^u$  – вектор управляющего момента сил;  $\mathbf{M}^r$  – момент сил диссипации;  $\mathbf{M}^c$  – момент сил вязкой жидкости в полости тела. Кинетический момент тела определяется стандартным образом

$$\mathbf{G} = J\omega, \quad \mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3), \quad G_1 = A_1 p, \quad G_2 = A_2 q, \quad G_3 = A_3 r,$$

где  $G = |\mathbf{G}| = (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2)^{\frac{1}{2}}$  – его величина.

Для упрощения задачи в систему (1) далее вносятся структурные ограничения, в частности, предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил  $\mathbf{M}^u$  принадлежит шару [7]. Это допущение не противоречит распределению масс и форме твердого тела и часто применяется в исследованиях задач управления ориентацией. Считается также, что диагональный тензор момента сил внешнего сопротивления пропорционален тензору момента сил

инерции, т.е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту

$$\mathbf{M}^r = -\lambda J\omega. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda$  – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Соппротивление, действующее на тело, представлено парой приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами  $\lambda A_1 p$ ,  $\lambda A_2 q$ ,  $\lambda A_3 r$  [4, 5]. Такое предположение не является противоречивым.

Далее предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е.  $\vartheta \gg 1$  ( $\vartheta^{-1} \sim \varepsilon \ll 1$ ). Форма полости считается близкой к сферической, тогда, следуя [1], для тензора вязких сил  $\tilde{P}$  имеем выражение

$$\tilde{P} = P \text{diag}(1, 1, 1), \quad P = \frac{8\pi\rho a^7}{525\vartheta}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$ ,  $\vartheta$  – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно,  $a$  – радиус полости.

Тензор  $\tilde{P}$ , зависящий только от формы полости, характеризует внутренний диссипативный момент сил в квазистатическом приближении, обусловленный вязкой жидкостью в полости. Для простоты в уравнениях (1) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной  $P > 0$ . Компоненты этого тензора имеют вид  $\tilde{P}_{ij} = P\delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера (такой вид тензор  $\tilde{P}$  имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил  $\mathbf{M}^u$  ограничены сферой

$$\mathbf{M}^u = b\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1, \quad b = b(t, \mathbf{G}), \quad 0 < b_* \leq b < b^* < \infty, \quad (4)$$

где  $b$  – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов  $t$ ,  $\mathbf{G}$  согласно условиям (4). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}^0$ . Далее полагаем, что  $b = b(t, \mathbf{G})$  (либо  $b = b(t)$  или  $b = \text{const}$ ).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(t_0) = \omega^0, \quad \omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (5)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза  $u = u(t, \omega)$ , соответствующую ему траекторию  $\omega(t, t_0, \omega^0)$  и время быстродействия  $T = T(t_0, \omega^0)$ , а также функцию Беллмана  $W = T(t, \omega)$ .

На основе динамического программирования и неравенства Шварца при упрощающем условии на коэффициент  $b$  ( $b(t, \mathbf{G}) = b_0(t, G)$ , нуль в индексе

далее опускается) строится синтез оптимального по быстродействию управления, которое имеет вид [7]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, \quad M_q = -b \frac{A_2 q}{G}, \quad M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (6)$$

Момент сил вязкой жидкости в полости  $\mathbf{M}^c$  с учетом внешних силовых факторов согласно [1] определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^c &= \frac{P\rho}{\nu} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}, \\ m_1 &= p \left( \lambda^2 + \frac{b^2}{G^2} \right) + \frac{2\lambda b}{G} p + \\ &+ \frac{1}{A_1} \left( \lambda + \frac{b}{G} \right) \left( 3qr(A_3 - A_2) + \frac{G\alpha_{33}}{1 - \alpha_{33}^2} q(\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2) - Gr\alpha_{32} \right) + \\ &+ \frac{p}{A_1 A_2 A_3} [q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения для  $m_2$ ,  $m_3$  получаются из  $m_1$  в (7) циклической перестановкой величин  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . При этом коэффициенты, содержащие  $\lambda$ , остаются неизменными. Направляющие косинусы  $\alpha_{ij}$  выражаются через углы Эйлера  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  по известным формулам [13].

Без учета влияния  $\mathbf{M}^u$  и  $\mathbf{M}^r$  на  $\mathbf{M}^c$  с точностью до величины первого порядка малости  $\varepsilon$  момент сил вязкой жидкости в полости имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^c &= \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \times \\ &\times \begin{pmatrix} p [q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1)] \\ q [r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_2 - A_1)(A_1 - A_3 + A_2)] \\ r [p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3)] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ограничимся указанным выражением в первом приближении. Упрощенные на основе выражения (8) уравнения управляемого движения (1) в проекциях на главные центральные оси инерции имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2) qr &= -b \frac{A_1 p}{G} - \lambda A_1 p + \frac{P}{A_1 A_2 A_3} p [q^2 A_2 (A_1 - A_2) \times \\ &\times (A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1)], \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3) pr &= -b \frac{A_2 q}{G} - \lambda A_2 q + \frac{P}{A_1 A_2 A_3} q [r^2 A_3 (A_2 - A_3) \times \\ &\times (A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_2 - A_1)(A_1 - A_3 + A_2)], \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1) pq &= -b \frac{A_3 r}{G} - \lambda A_3 r + \frac{P}{A_1 A_2 A_3} r [p^2 A_1 (A_3 - A_1) \times \\ &\times (A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Кинематические соотношения не выписываем, так как уравнения (9) образуют замкнутую систему. Уравнения (9) подвергаются дальнейшему анализу.

**2. Решение задачи оптимального торможения.** Отметим, что момент сил, обусловленный вязкой жидкостью в полости, является внутренним, а момент сил линейного сопротивления среды – внешним. Домножим первое уравнение (9) на  $G_1$ , второе – на  $G_2$ , третье – на  $G_3$  и сложим (скалярное умножение  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}$ ). Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию,

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0. \quad (10)$$

После интегрирования задачи Коши (10) из условия остановки вращений (5) имеем искомые выражения для времени быстрдействия  $T = T(t_0, G^0)$  и функции Беллмана  $T = T(t, G)$ . Напомним, что  $\mathbf{G} = J\omega$ .

В общем случае для произвольной функции  $b = b(t, G)$  в (10) аналитическое интегрирование задачи Коши затруднительно: возможно ее численное решение. Из уравнений (10) следует, что эволюция величины кинетического момента  $G$  происходит под влиянием управляющего момента и сопротивления среды. Внутренний момент сил вязкой жидкости в полости влияния не оказывает.

В предположении  $b = b(t)$ , т.е. функция  $b(t)$  не зависит от модуля  $\mathbf{G}$ , приходим к решению краевой задачи (10), (5)

$$G(t) = G^0 \exp(-\lambda(t - t_0)) - \int_{t_0}^t b(\tau) \exp(-\lambda(t - \tau)) d\tau, \quad (11)$$

где 
$$G^0 = \exp(-\lambda t_0) \int_{t_0}^T b(\tau) \exp(\lambda\tau) d\tau.$$

Решение уравнения (11) относительно неизвестной  $T$ , согласно (4), всегда существует, что приводит к построению решения задачи оптимального быстрдействия в форме синтеза. Здесь  $t$  – текущее время процесса торможения,  $T$  – время быстрдействия.

При  $b = \text{const}$  и  $t_0 = 0$  решения уравнения (10) и краевой задачи (11) записываются следующим образом:

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} [(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1). \quad (12)$$

Далее детально анализируется случай (12). Домножим первое уравнение (9) на  $p$ , второе – на  $q$ , третье – на  $r$  и сложим. В результате имеем выражение для производной от кинетической энергии  $H$

$$\dot{H} = -\frac{2bH}{G} - 2\lambda H + \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \left[ p^2 q^2 (A_1 - A_2)^2 (A_3 - A_1 - A_2) + \right. \\ \left. + p^2 r^2 (A_1 - A_3)^2 (A_2 - A_1 - A_3) + q^2 r^2 (A_2 - A_3)^2 (A_1 - A_2 - A_3) \right]. \quad (13)$$

Рассмотрим невозмущенное движение ( $b = \lambda = \varepsilon = 0$ ). Напомним, что в полости находится жидкость большой вязкости и  $\vartheta^{-1} \sim \varepsilon \ll 1$ , где  $\vartheta$  – кинематический коэффициент вязкости. При отсутствии возмущений вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Переменные  $G, H$  становятся постоянными, а  $\varphi, \psi, \theta$  – некоторые функции времени  $t$ . Медленными переменными в возмущенном движении будут  $G, H$ , а быстрыми – углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$ .

Рассмотрим движение при условии  $2HA_1 \geq G^2 > 2HA_2$ , соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции  $Oz_1$ . Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2HA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2HA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \quad (14)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную: модуль эллиптических функций, описывающих это движение, однозначно связанный с величиной кинетического момента  $G$  и кинетической энергии  $H$ .

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо в правую часть уравнения (13) и проведем усреднение по переменной  $\psi$ , а затем по времени  $t$  с учетом зависимости  $\varphi, \theta$  от  $t$ . При этом для медленных переменных  $G, H$  сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & -\frac{2bH}{G} - 2\lambda H - \frac{4PH^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 S^2(k)} \times \\ & \times \{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) [k^2 V(k) - U(k)] + \\ & + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) [(k^2 - 2)U(k) + k^2] + \\ & + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) [(1 - 2k^2)U(k) + k^2] \}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $U(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}$ ,  $S^2(k) = [A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2]^2$ ,  $V(k) = 1 + \frac{E(k)}{K(k)}$ .

Здесь  $K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [14]. Из уравнения (15) следует, что под влиянием сопротивления среды и момента сил вязкой жидкости в полости тела, а также управляющего момента происходит эволюция кинетической энергии тела  $H$ . Выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части уравнения (15) положительно (при  $A_1 > A_2 > A_3$ ), так как справедливы неравенства  $(1 - k^2)K \leq E \leq K$  [14]. Поэтому  $dH/dt < 0$  поскольку  $H > 0$ , т.е. переменная  $H$  строго убывает для любых  $k^2 \in [0, 1]$ . Заметим, что уравнение (15) при  $G \rightarrow 0$  обладает существенной особенностью.

Дифференцируя выражение (14) для  $k^2$  с учетом (15), получим диффе-

ренциальное уравнение следующего вида

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{dt} &= \frac{PG^2(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}{3A_1^2A_2^2A_3^2} \times \\ &\times \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \\ \chi &= \frac{3A_2[(A_1^2 + A_3^2) - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (15), (16) получены методом усреднения [1, 2, 15]. Это соответствует тому, что кинетическая энергия вращения тела много больше величины управляющего вектора, сопротивление среды предполагается слабым порядка малости  $\varepsilon$ , полость заполнена жидкостью большой вязкости.

Значению  $k^2 = 1$  отвечает равенство  $2HA_2 = G^2$ , что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо. Уравнение (16) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$  на сфере радиуса  $G$ . Отметим, что на эволюцию  $k^2$  оказывает влияние только момент сил вязкой жидкости в полости и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, происходит частичное разделение влияния момента сил вязкой жидкости в полости, а также управляющего момента и момента сопротивления. Анализ уравнения (16) свидетельствует об отсутствии стационарных значений  $k$ , кроме  $k = 0$  и  $k = 1$ .

**3. Численный расчет.** Проведем обезразмеривание уравнений (15), (16) и дифференциального уравнения изменения кинетического момента при  $b = \text{const}$ . В качестве характерных параметров задачи возьмем значение кинетического момента в начальный момент времени  $G_0 = G(t_0)$ , время быстродействия  $T$  из (12) и обозначим  $\tilde{G} = G/G_0$ ,  $\tilde{t} = t/T$ . Значение безразмерной кинетической энергии вводится согласно [1]:  $\tilde{H} = 2HA_1/G_0^2$ .

Получим безразмерную систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\left(\frac{b}{G_0} + \lambda\tilde{G}\right)T, \\ \frac{dk^2}{d\tilde{t}} &= \frac{PT\tilde{G}^2G_0^2(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}{3A_1^3A_2^2A_3^2} \times \\ &\times \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \\ \frac{d\tilde{H}}{d\tilde{t}} &= -T \left( \frac{2b\tilde{H}}{\tilde{G}G_0} + 2\lambda\tilde{H} + \frac{4PG_0^2\tilde{H}^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^3A_2^2A_3^2S^2(k)} \times \right. \\ &\times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) [k^2V(k) - U(k)] + \right. \\ &+ A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) [(k^2 - 2)U(k) + k^2] + \\ &\left. \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) [(1 - 2k^2)U(k) + k^2] \right\} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Выше проведено усреднение, так как из выражений (13), (14) следует, что  $H$  и  $k^2$  являются медленными переменными.

Проведем численное интегрирование системы (17) на промежутке времени  $[0, 1]$ , который соответствует полному торможению тела. Расчет соответствует начальным значениям функций  $\tilde{G}(0) = G_0 = 1$ ,  $\tilde{H}(0) = 1$  и  $k^2(0) \approx 1$ . Для моментов инерции задаются значения [1]:  $A_1 = 8$ ,  $A_2 = 6$ ,  $A_3 = 4$ . Интегрирование проводится при различных значениях  $\lambda$ ,  $b$ ,  $P$ , что позволяет провести исследование влияния различных силовых факторов на характер торможения твердого тела. Для каждого расчетного случая первоначально определялось время быстрого действия, затем в соответствующем временном диапазоне проводился расчет характеристик движения твердого тела.

На рис. 1, 2 представлен численный анализ при  $P = 10^{-1}$ ,  $b = 10^{-1}$  и  $\lambda = 0.5, 10^{-1}, 10^{-2}$  (кривые 1–3). Видно, что при уменьшении момента сил

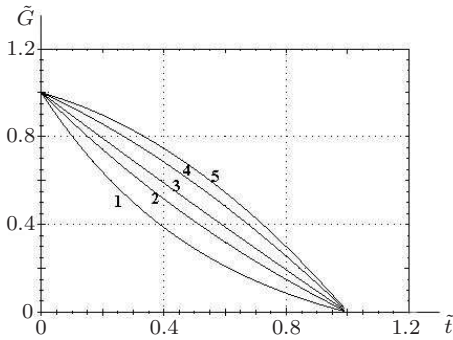


Рис. 1

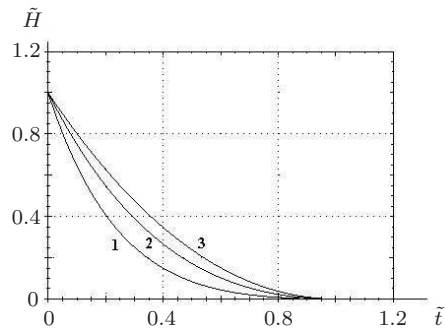


Рис. 2

сопротивления среды, торможение твердого тела происходит с меньшим градиентом, а изменение модуля кинетического момента имеет почти прямолинейный характер (кривая 3, рис. 1). На рис. 3, 4 представлены результаты

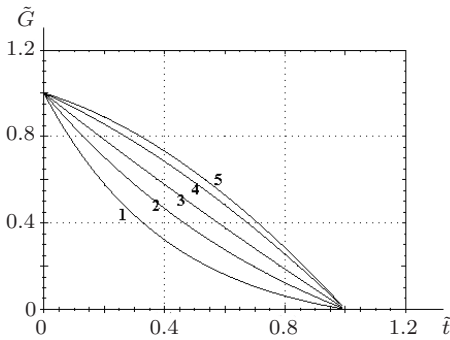


Рис. 3

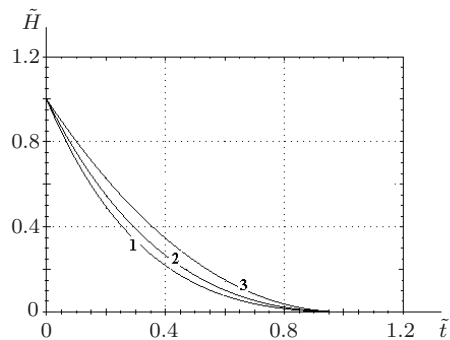


Рис. 4



расчета при  $P = 10^{-1}$ ,  $\lambda = 10^{-1}$  и  $b = 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-1}$  (кривые 1–3). Видно, что при увеличении момента управляющих сил (кривая 3, рис. 4), торможение твердого тела происходит быстрее, а изменение модуля кинетического момента носит почти прямолинейный характер при большем значении  $b$  (кривая 3, рис. 3). Изменение величины  $P$  от 1 до  $10^{-2}$  не приводит к изменению характера функций  $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{t})$  и  $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{t})$ , так как момент сил вязкой жидкости в полости не входит в первое уравнение системы (17), а его влияние на изменение кинетической энергии мало по сравнению с воздействием момента сил сопротивления и управляющего момента.

Следует отметить, что, согласно численному расчету для указанных значений величин  $\lambda$ ,  $b$ ,  $P$ , значение модуля эллиптических функций  $k^2$  убывает незначительно от величины порядка 1 до 0.9996.

**4. Решение задачи оптимального торможения в предположении  $b = b_0 + \beta t$ .** Время торможения твердого тела может быть определено согласно (10) и зависит от значений коэффициентов  $\beta$ ,  $b_0$  и  $\lambda$ , характеризующих управляющий момент и момент сил сопротивления соответственно.

Результаты проведенного численного интегрирования показали характер зависимости времени торможения от этих параметров (см. рис. 5). Кривая 1 – зависимость времени торможения от параметра  $\beta$ , кривая 2 – от параметра  $b_0$ , 3 – от параметра  $\lambda$ . Расчет времени торможения для каждой кривой проводился в диапазоне от 0.01 до 0.5 для соответствующей величины, при этом значения остальных параметров были равны 0.1. Видно, что для всех кривых время торможения минимальное для наибольших значений параметров из допустимого диапазона. Кривые 2 и 3 имеют линейный характер, а кривая 1 – экспоненциальный. Наименьшее время торможения твердого тела получено для параметра  $b_0$ , который характеризует значение управляющего момента в начальный момент времени.

Система уравнений движения (17) была численно проинтегрирована для различных значений параметров  $P$ ,  $\lambda$ ,  $b_0$  и  $\beta$  с учетом закономерности  $b = b_0 + \beta t$ .

Рис. 3 (кривые 4–5) соответствует численному расчету для постоянных параметров момента сил сопротивления и момента сил вязкой жидкости в полости  $P = 0.1$ ,  $\lambda = 0.1$  при различных значениях параметров управляющего момента. Кривая 4:  $b_0 = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ . Кривая 5:  $b_0 = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ . Характер поведения функции  $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{t})$  при данном законе изменения управляющего момента существенно отличается от характера поведения функции кинетического момента при  $b = \text{const}$ .

Проводилось численное интегрирование для постоянных параметров управляющего момента для закона  $b = b_0 + \beta t$  при различных значениях параметра момента сил сопротивления. Для  $P = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$  и  $b_0 = 0.1$  результаты численного расчета представлены на рис. 1, где кривая 4:  $\lambda = 0.1$ , кривая 5:  $\lambda = 0.01$ . Видно, что тело тормозится быстрее для больших значений коэффициента момента сил сопротивления среды. Характер убывания функции кинетического момента отличается от вида функции, представленного на рис. 3. Согласно численному анализу, можно сделать вывод о том,

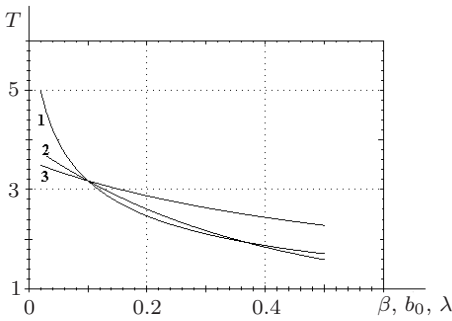


Рис. 5

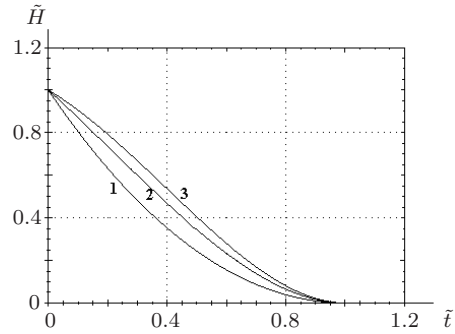


Рис. 6

что торможение тела при  $b = \text{const}$  происходит быстрее в первой половине безразмерного времени  $\tilde{t}$ , а при  $b = b_0 + \beta t$  – во второй.

На рис. 6 представлены результаты численного расчета кинетической энергии твердого тела при  $b = b_0 + \beta t$ . Приняты следующие значения параметров возмущающих моментов:  $P = 0.1$ ,  $\lambda = 0.1$ . Параметры управляющего момента имеют значения: кривая 1 –  $b_0 = 0.01$ ,  $\beta = 0.01$ , кривая 2 –  $b_0 = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ , кривая 3 –  $b_0 = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ . Характер поведения функции кинетической энергии не отличается от представленной на рис. 2. При этом функция  $\dot{H} = \dot{H}(\tilde{t})$  при  $b = b_0 + \beta t$  убывает с меньшими градиентами.

**Заключение.** Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного квазитвердого тела в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана), эволюции модуля эллиптических функций  $k^2$ , безразмерных кинетической энергии и кинетического момента. Установлены качественные свойства оптимального движения.

1. Черноушко Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – 5, вып.6. – С. 1049–1070.
2. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Механика твердого тела. – 2007. – вып. 37. – С. 126–139.
3. Акуленко Л. Д., Лещенко Д.Д., Черноушко Ф.Л. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 5–13.
4. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
5. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т.II. – М.: Наука, 1983. – 544 с.
6. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.
7. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

8. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 2. – С. 115–122.
9. Лещенко Д.Д. Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Там же. – 1996. – № 1. – С. 80–85.
10. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде // Там же. – 2010. – №2. – С. 56–60.
11. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений динамически несимметричного тела в сопротивляющейся среде // Там же. – 2011. – № 1. – С. 16–21.
12. Зинкевич Я.С., Козаченко Т.С., Рачинская А.Л., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений симметричного гиростата с подвижной массой в среде с сопротивлением // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 152–161.
13. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
15. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.

L.D. Akulenko, D.D. Leshchenko, A.L. Rachinskaya

#### Optimal deceleration of rotation of asymmetric quasi-solid body in a resistant medium

The problem of time-optimal deceleration of rotation of a free solid body is studied. It is assumed that the body contains spherical cavity filled with highly viscous liquid. Low decelerating torque of viscous friction also acts on the solid body. The body is assumed to be dynamically asymmetric. The optimal control law for deceleration of rotation of the solid body in the form of synthesis, the optimal time, and the phase trajectories are determined.

**Keywords:** *optimal deceleration, rotation, solid body.*

Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинська

#### Оптимальне за швидкодією гальмування несиметричного квазітвердого тіла в середовищі з опором

Досліджено задачу про оптимальне за швидкодією гальмування обертань вільного твердого тіла. Передбачається, що тіло містить сферичну порожнину, яка заповнена рідиною великої в'язкості. Крім того, на тверде тіло діє малий гальмуючий момент в'язкого тертя. Вважається, що тіло динамічно несиметричне. Визначено оптимальний закон керування для гальмування обертань твердого тіла в формі синтезу, час швидкодії та фазові траєкторії.

**Ключові слова:** *оптимальне гальмування, обертання, тверде тіло.*

*Ин-т проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия*

Получено 14.09.11

*Гос. академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина*

*Одесский национальный ун-т им. И.И. Мечникова, Украина*

leshchenko\_d@ukr.net, rachinskaya@onu.edu.ua