УДК 531.36

©2011. **С.Р. Амбарцумян**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ q ПАР ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Исследуется устойчивость по действующей силе системы нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка в критическом случае, когда характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения системы имеет q пар чисто мнимых корней и $(n-2q)$ корней с отрицательными вещественными частями. С помощью построения функции Ляпунова доказана теорема об асимптотической устойчивости по действующей силе тривиального решения рассматриваемой системы. Приведен пример, подтверждающий достоверность полученных результатов.

Ключевые слова: *устойчивость, критический случай, функция Ляпунова.*

1. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i = \Phi_i(y_1, ..., y_n) \qquad (i = 1, ..., n), \tag{1}$$

где $\Phi_i(y_1, ..., y_n) : R^n \to R^1$ – аналитические функции в R^n и $\Phi_i(0, ..., 0) = 0$ $(i = 1, ..., n)$. Известно [1, с. 57], что в этом случае систему (1) можно привести к виду

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k + Y_i(y_1, ..., y_n) \quad (i = 1, ..., n), \tag{2}$$

линейным приближением которой будет система

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k \quad (i = 1, ..., n). \tag{3}$$

Пусть корни характеристического уравнения системы (3) удовлетворяют условиям

$$\lambda_i = \mathrm{i}\,\alpha_i, \quad \lambda_{q+i} = -\mathrm{i}\,\alpha_i, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda_k < 0 \quad (i = 1, ..., q;\ k = 2q+1, ..., n), \tag{4}$$

где $\alpha_i \neq 0$ – действительные числа, $i = 1, ..., q$. Тогда имеем q пар чисто мнимых корней $\pm\mathrm{i}\,\alpha_i$ и $n-2q$ корней с отрицательными вещественными частями. В этом случае известно [1, с. 74], что только с помощью линейного приближения (3) невозможно решить задачу устойчивости системы (2), т.е. имеет место критический случай.

Тогда при условии (4) с помощью неособого преобразования систему (3) можно привести к виду [1, с. 118]:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\alpha_i y_i \quad (i = 1, ..., q), \\ \dot{y}_i = \alpha_i x_i, \\ \dot{z}_j = a_{j1} z_1 + ... + a_{j(n-2q)} z_{n-2q} \quad (j = 1, ..., n-2q), \end{cases} \tag{5}$$

а систему (2), следуя Ляпунову [1, с. 153] – к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\alpha_i y_i + X_i(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-2q}) \quad (i = 1, ..., q), \\ \dot{y}_i = \alpha_i x_i + Y_i(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-2q}), \\ \dot{z}_j = a_{j1} z_1 + ... + a_{j(n-2q)} z_{n-2q} + Z_j(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-2q}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = 1, ..., n-2q), \end{cases} \tag{6}$$

где вектор-функции X_i, Y_i, Z_i – аналитические функции в R^n и $X_i(0, ..., 0) = Y_i(0, ..., 0) = Z_j(0, ..., 0) = 0 \quad (i = 1, ..., q; \ j = 1, ..., n-2q)$ содержат члены не ниже второго порядка переменных $x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-2q}$ [2, с. 102].

Понятие устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений в критических случаях, когда на систему на конечном промежутке времени действуют интегрально малые возмущающие силы (устойчивость по действующей силе) [3,4], имеет теоретическое и прикладное значение в разных областях современной науки и техники.

В работах [3,4] приведены необходимые и достаточные условия, при которых системы линейных дифференциальных уравнений неустойчивы по действующей силе. В [5] получены необходимые и достаточные условия, при которых приводимая система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами устойчива, асимптотически устойчива и неустойчива по действующей силе.

В [6–10] найдены достаточные условия, при которых системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка и n-го порядка при паре чисто мнимых корней, а также при k нулевых и q пар чисто мнимых корней будут устойчивыми, асимптотически устойчивыми или неустойчивыми по действующей силе. Отметим, что рассматриваемые случаи существенно отличаются друг от друга и один из другого не следует.

Попытаемся определить достаточные условия, накладываемые на функции $X_i, Y_i, Z_j \quad (i = 1, ..., q; \ j = 1, ..., n-2q)$, при которых тривиальное решение системы (6) будет асимптотически устойчивым по действующей силе [3].

Рассмотрим систему (6). Пусть функции $X_i(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-2q})$ и $Y_i(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-2q}) \quad (i = 1, ..., q)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, ..., q). \tag{7}$$

Тогда существуют некоторые аналитические функции $H_i(x_i, y_i)$, разложение которых по степеням переменных $x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q$ начинается с членов не ниже третьего порядка, такие, что

$$\begin{cases} X_i = -\dfrac{\partial H_i}{\partial y_i}, \\ \\ Y_i = \dfrac{\partial H_i}{\partial x_i} \end{cases} \qquad (i = 1, ..., q), \tag{8}$$

Пусть для системы (6) существует определенно-положительная функция

$$V = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{q}\Big(x_i^2 + y_i^2 + \frac{2}{\alpha_i}H_i(x_i, y_i)\Big) + \sum_{j=1}^{n-2q}\sum_{s=1}^{n-2q} b_{js}z_j z_s\right], \tag{9}$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \quad \lim_{\|r\|\to\infty} V = \infty, \tag{10}$$

где $\|r\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{r}$, а $\mathbf{r} = (x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-2q})$ – n-мерный вектор-столбец;

$$2) \quad R = \sum_{j=1}^{n-2q}\sum_{s=1}^{n-2q} b_{js}z_s Z_j \tag{11}$$

является знакопостоянной отрицательной функцией, причем область $R = 0$ – многообразие точек, не содержащее целых полутраекторий системы (6) при $0 \le t < \infty$. Здесь неизвестные постоянные коэффициенты b_{js} при любой определенно-отрицательной квадратичной форме $W(z_1, ..., z_{n-2q})$ можно определить из условия

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n-2q}\sum_{s=1}^{n-2q} b_{js}z_j z_s,\right)\Bigg|_{(12)} = W(z_1, ..., z_{n-2q})$$

единственным образом, так как система

$$\dot{z}_j = a_{j1}z_1 + ... + a_{j(n-2q)}z_{j\,(n-2q)} \quad (j = 1, ..., n-2q) \tag{12}$$

асимптотически устойчива [11, с.107].

Тогда производная по времени функции V в силу системы (6) будет

$$\begin{aligned}\dot{V}\Big|_{(6)} = \sum_{i=1}^{q}\Bigg[&-\alpha_i x_i y_i + x_i X_i + \alpha_i x_i y_i + y_i Y_i + \frac{1}{\alpha_i}Y_i(-\alpha_i y_i + X_i) - \\ &- \frac{1}{\alpha_i}X_i(\alpha_i x_i + Y_i)\Bigg] + \sum_{j=1}^{n-2q}\sum_{s=1}^{n-2q} b_{js}z_s Z_j + W(z_1, ..., z_{n-2q}) = \\ &= R(x_1, ..., x_q, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-2q}) + W(z_1, ..., z_{n-2q}).\end{aligned}$$

При условиях (7), (8), (10), (11) функция $\dot{V}\Big|_{(6)}$ является знакопостоянной отрицательной функцией при $\|r\| < \infty$. Следовательно, для системы (6) выполняются все условия теоремы Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости в целом [1, с. 463]. Тогда тривиальное решение системы

(6) асимптотически устойчиво в целом, а значит, и асимптотически устойчиво по действующей силе [4]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если для системы* (6) *выполнены условия* (7), (8) *и для нее существует определенно-положительная функция* V *в виде* (9) *такая, что имеют место условия* (10) *и* (11), *то тривиальное решение системы* (6) *асимптотически устойчиво по действующей силе.*

Отметим, что полученный результат совпадает с результатам теоремы 1, доказанной в [9] при $q = 1$.

Пример. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_2 - c_1 x_2^3 - b_1 x_1^2 x_2 x_3 x_4, \qquad \dot{x}_2 = \alpha_1 x_1 + a_1 x_1^3 + b_1 x_1 x_2^2 x_3 x_4,\\
&\dot{x}_3 = -\alpha_2 x_4 - c_2 x_4^3 - b_2 x_1 x_2 x_3^2 x_4, \qquad \dot{x}_4 = \alpha_2 x_3 + a_2 x_3^3 + b_2 x_1 x_2 x_3 x_4^2, \qquad (13)\\
&\dot{x}_5 = -2x_5 + x_6 - \Big(x_5 + \frac{1}{3}x_6\Big)^3 - \frac{1}{27}\Big(4x_5 + 5x_6\Big)^3 (x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2) x_2^2 x_4^2,\\
&\dot{x}_6 = \qquad -x_6 - \frac{1}{27}\Big(x_5 + 4x_6\Big)^3 - \frac{1}{27}\Big(4x_5 + 5x_6\Big)^3 (x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2) x_2^2 x_4^2,
\end{aligned}
$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ – действительные числа; $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – неотрицательные постоянные числа.

Нетрудно проверить, что если для линейного приближения уравнений системы (13) возьмем функцию Ляпунова в виде

$$
\begin{aligned}
V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \frac{1}{4\alpha_1}(a_1 x_1^4 + 2b_1 x_1^2 x_2^2 + c_1 x_2^4) + \\
+ \frac{1}{4\alpha_2}(a_2 x_3^4 + 2b_2 x_3^2 x_4^2 + c_2 x_4^4) + \frac{1}{6}\big(3x_5^2 + 2x_5 x_6 + 4x_6^2\big),
\end{aligned} \qquad (14)
$$

то тогда функция R из условия (11) определится следующим образом:

$$
R = -\Big(x_5 + \frac{1}{3}x_6\Big)^4 - \frac{1}{81}\Big(x_5 + 4x_6\Big)^4 - \frac{1}{81}\Big(4x_5 + 5x_6\Big)^4 (x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2) x_2^2 x_4^2
$$

и будет являться знакопостоянной отрицательной функцией.

Очевидно, что функция V удовлетворяет также условия (10), (11). Следовательно, для системы (13) все условия теоремы 1 об асимптотической устойчивости по действующей силе выполнены. Тогда тривиальное решение системы (13) асимптотически устойчиво по действующей силе.

1. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука,1966. – 530 с.
2. *Каменков Г.В.* Избранные труды. – М.: Наука. – 1971. – Т. 1. – 260 с.
3. *Габриелян М.С., Шагинян С.Г.* О неустойчивости систем дифференциальных уравнений при интегрально малых возмущениях // Уч. записки ЕГУ. – 1989. – № 1. – С. 27–32.
4. *Шагинян С.Г.* Об одной задаче теории устойчивости // Там же. – 1986. – № 2. – С. 39–45.

5. *Шагинян С.Г.* Об устойчивости по действующей силе системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами// Там же. – 2002. – № 3. – С. 31–34.
6. *Амбарцумян С.Р.* Об одном способе решения задачи устойчивости по действующей силе при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка // Естествен. и техн. науки. – Москва, 2002. – № 3. – С. 8–10.
7. *Амбарцумян С.Р.* Об одной задаче устойчивости в критическом случае при паре чисто мнимых корней // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 117–120.
8. *Амбарцумян С.Р.* К задаче устойчивости по действующей силе в критическом случае при k нулевых и q пар чисто мнимых корней // Актуальные проблемы соврем. науки. – Москва, 2003. – № 4. – С. 115–118.
9. *Амбарцумян С.Р.* Асимптотическая устойчивость по действующей силе в критическом случае при паре чисто мнимых корней // XI междунар. конф. “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (Москва, 2010 г.): Тез. докл. – М., 2010. – С. 14–15.
10. *Амбарцумян С.Р.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости по действующей силе в критическом случае при k нулевых и q пар чисто мнимых корней // Динамические системы. – Симферополь, 2010. – Вып. 28. – С. 171–176.
11. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.;Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.

S.R. Hambardzumyan

On the stability of a system of non-linear differential equations in the critical case at q pairs of imaginary roots

The stability by acting force of the zero solution of a n-th order nonlinear system in critical case of q pairs of imaginary roots is studied. Theorem of the asymptotic stability by acting force of the trivial solution is proved. The illustrative example is proposed.

Keywords: *stability, critical case, Liapounoff's functions.*

С.Р. Амбарцумян

Про стійкість системи нелінійних диференціальних рівнянь у критичному випадку при q пар чисто уявних коренів

Досліджується стійкість за діючою силою системи нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку в критичному випадку, коли характеристичне рівняння відповідного лінійного наближення системи має q пар чисто уявних коренів і $(n-2q)$ коренів з від'ємними дійсними частинами. За допомогою побудови функції Ляпунова доведено теорему про асимптотичну стійкість за діючою силою тривіального розв'язку розглядуваної системи. Наведено приклад, що підтверджує вірогідність отриманих результатів.

Ключові слова: *стійкість, критичний випадок, функція Ляпунова.*

Гос. аграрный ун-т, Ереван, Армения
samvelham@yahoo.com

Получено 29.06.11