

УДК 531.38

©2011. А.А. Илюхин, С.А. Шретер

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПЛАСТИНКИ В АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Представлены два метода приближенного построения решения нелинейной задачи изгиба упругого тонкого стержня под воздействием аэродинамических сил: гамильтонов подход и представление решения в виде отрезка ряда по скорости потока. Основная идея первого метода состоит в сведении исходного уравнения Эйлера–Кирхгофа к системе уравнений гамильтонова типа с последующей нормализацией функции Гамильтона с учетом определенного числа членов (в зависимости от необходимой точности). В рамках этого подхода осуществлен поиск решения краевой двухточечной задачи с помощью прямого и обратного преобразования Биркгофа. Идея второго подхода – запись уравнения равновесия относительно изменения обобщенной координаты и представление решения в виде отрезка ряда по скорости набегающего потока. Проведено сравнение результатов обоих методов.

**Ключевые слова:** гамильтонов подход, преобразование Биркгофа, изгиб стержня, математическая модель.

Специфика задач механики гибких стержней состоит в том, что граничные условия в них задаются в нескольких точках оси стержня. Представление уравнения изгиба упругого стержня в гамильтоновой форме позволяет привлечь для решения задач статики гибких стержней аппарат гамильтоновой механики. При аналитическом построении приближенного решения приходится вычислять постоянные интегрирования, исходя из граничных условий. Поэтому в работе предложено строить обратное преобразование Биркгофа для упрощения решения краевой двухточечной задачи. Указан и программно реализован алгоритм численного построения зависимости угла атаки пластинки от скорости набегающего потока. Уточнены коэффициенты в решении, полученном в [9].

Рассмотрена задача об изгибе потоком воздуха стержня, жестко закрепленного нижним концом, к верхнему концу которого жестко прикреплена абсолютно твердая пластинка. Предполагается, что поток воздействует только на пластинку, изгиб стержня происходит в одной плоскости. Начальное положение стержня определяется заданием угла  $\psi$ .

Цель работы состоит в том, чтобы, получив решение уравнения равновесия, установить зависимость между аэродинамическими силами и углом поворота пластинки (так называемым текущим углом атаки  $\alpha_T$ ), тем самым построить математическую модель эксперимента по обдуву тела в аэродинамической трубе.

**1. Вывод уравнения равновесия.** Отличие пластинки (как и тела любой другой формы) от точки в том, что направление силы воздействия  $\mathbf{R}$  потока на пластинку может не совпадать с направлением вектора скорости  $\mathbf{V}$  потока, поэтому вектор  $\mathbf{R}$  представляют [1] в виде суммы двух векторов:  $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ , где  $\mathbf{S}$  – сила сопротивления и  $\mathbf{P}$  – подъем-

ная сила,  $\mathbf{S} \parallel \mathbf{V}, \mathbf{P} \perp \mathbf{V}$ . Для аэродинамических сил взяты зависимости:  $\mathbf{S} = \frac{\rho}{2}s(\alpha)V\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{P} = \frac{\rho}{2}p(\alpha)(\mathbf{i} \times \mathbf{V})$ , где  $\rho$  – плотность воздуха,  $\alpha$  – первоначальный угол атаки;  $\mathbf{i}, \mathbf{i} \perp \mathbf{V}$  – единичный вектор, лежащий в плоскости пластинки. Функции  $s(\alpha), p(\alpha)$  – коэффициенты аэродинамических сил, зависят от формы и размеров пластинки и определяются экспериментально. Общие свойства этих функций:  $s(\alpha) \geq s_0 > 0$ , а  $p(\alpha)$  меняет свой знак при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$  ( $p(0) = p(\pi/2) = 0$ ). Эти коэффициенты принято нормировать на площадь пластинки. К стержню, кроме силы  $\mathbf{R}$ , приложен момент в точке  $\mathbf{K}$  крепления пластинки и стержня:

$$M = \frac{\rho}{2}d(\alpha)(pV\cos\alpha + sV^2\sin\alpha).$$

Здесь  $d(\alpha)$  – расстояние от центра давления до точки  $\mathbf{K}$ . Для записи уравнения равновесия необходимо знать проекцию внешних сил на направление касательной к оси стержня  $\boldsymbol{\tau}$  и нормали  $\mathbf{n}$ . Если единичные векторы  $\mathbf{i}_v$  – вдоль скорости,  $\mathbf{i}_p$  – вдоль подъемной силы, то с помощью замены  $\mathbf{i}_v = -\boldsymbol{\tau}\cos\theta + \mathbf{n}\sin\theta$ ,  $\mathbf{i}_p = \boldsymbol{\tau}\sin\theta + \mathbf{n}\cos\theta$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= S\mathbf{i}_v = \frac{\rho}{2}s(\alpha_T)V^2\mathbf{i}_v = \left(-\frac{\rho}{2}s(\alpha_T)V^2\cos\theta\right)\boldsymbol{\tau} + \left(\frac{\rho}{2}s(\alpha_T)V^2\sin\theta\right)\mathbf{n}, \\ \mathbf{P} &= P\mathbf{i}_p = \frac{\rho}{2}p(\alpha_T)V\mathbf{i}_p = \left(\frac{\rho}{2}p(\alpha_T)V\sin\theta\right)\boldsymbol{\tau} + \left(\frac{\rho}{2}p(\alpha_T)V\cos\theta\right)\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Воспользуемся точным уравнением упругого равновесия при плоском изгибе и для первоначально прямого стержня ( $\psi = \text{const}$ ) постоянного сечения ( $B = \text{const}$ ) запишем уравнение равновесия в виде [2]

$$\frac{dM_3}{dl} + R_2 = 0.$$

Здесь  $M_3 = B\chi$  – проекция внутреннего момента на бинормаль,  $\chi = \frac{d\theta}{dl}$ ,  $R_2$  – проекция силы  $\mathbf{R}$  на нормаль. Подставив все проекции, получим уравнение равновесия Эйлера–Кирхгофа представленной системы:

$$B\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{\rho}{2}sV^2\sin\theta + \frac{\rho}{2}pV\cos\theta = 0. \quad (1)$$

**2. Гамильтонов подход.** Математическая общность уравнений движения маятника с уравнением изгиба упругого стержня [3] позволяет осуществить переход от уравнения равновесия (1) к уравнениям Гамильтона. Однако в рассматриваемом случае аэродинамические силы не обладают свойством консервативности, какое присутствует при кинетической аналогии Кирхгофа, когда внешние силы являются неизменными, т.е. не зависят от деформации стержня. При описании движения твердого тела в поле силы тяжести вектор силы сохраняет длину и направление в неподвижном пространстве, поэтому нет возможности непосредственно воспользоваться аналогией уравнения (1)

с уравнением колебания маятника [4]. Для преобразования уравнения равновесия (1) к системе двух уравнений Гамильтона поступим формально: выберем обобщенную координату  $\theta$ , укажем сопряженный координате импульс  $p_\theta$ , и приведем соответствующую такому выбору функцию Гамильтона. Через обобщенную координату  $\theta(l)$  обозначен угол наклона касательной деформированной оси стержня к оси  $Ox$  ( $Ox \parallel \mathbf{V}$ ). Введя сопряженные переменные  $\theta$  и  $p_\theta = B \frac{d\theta}{dl}$ , вместо уравнения равновесия (1) получим систему двух уравнений

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{B} p_\theta, \quad \frac{dp_\theta}{dl} = -\frac{1}{2} \rho s V^2 \sin \theta - \frac{1}{2} \rho p V \cos \theta. \quad (2)$$

Если взять функцию Гамильтона  $H$  в виде

$$H = \frac{1}{2B} p_\theta^2 - \frac{1}{2} \rho s V^2 \cos \theta + \frac{1}{2} \rho p V \sin \theta, \quad (3)$$

то уравнения (2) будут уравнениями Гамильтона [5] с функцией (3).

Сделаем каноническую замену  $\zeta = \theta + \delta$ ,  $p_\zeta = p_\theta$ , где  $\cos \delta = \frac{V}{\sqrt{V^2 + (p/s)^2}}$ . Тогда уравнения (2) примут вид

$$\frac{d\zeta}{dl} = \frac{p_\zeta}{B}, \quad \frac{dp_\zeta}{dl} = -\frac{1}{2} R \sin \zeta, \quad (4)$$

где  $R = \rho s V \sqrt{V^2 + (p/s)^2}$ , а функция Гамильтона (3) в новых канонических переменных будет такова:

$$H = \frac{p_\zeta^2}{2B} - \frac{1}{2} R \cos \zeta. \quad (5)$$

Система (4) допускает тривиальное решение  $\zeta = 0$ ,  $p_\zeta = 0$ . Решение, отличное от тривиального, найдем методом нормальных форм. Разложим функцию Гамильтона (5) в ряд по степеням канонических переменных  $\zeta$ ,  $p_\zeta$ , удерживая в разложении члены до четвертого порядка включительно.

$$H = H_2 + H_4, \quad H_2 = \frac{p_\zeta^2}{2B} + \frac{1}{4} R \zeta^2, \quad H_4 = -\frac{1}{48} R \zeta^4. \quad (6)$$

Введем безразмерные величины

$$p'_\zeta = \frac{p_\zeta}{\sqrt{BR}}, \quad l' = l \sqrt{\frac{R}{2B}}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \quad H' = \frac{H}{R}, \quad H'_i = \frac{H_i}{R} \quad (i = 2, 4).$$

Опуская штрихи, представим разложение (6) в безразмерном виде и в результате получим нормализованную функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} (p_\zeta^2 + \zeta^2) - \frac{1}{12} \zeta^4. \quad (7)$$

Для последующих преобразований удобнее ввести комплексно сопряженные канонические переменные  $p = p_\zeta + i\zeta$ ,  $q = p_\zeta - i\zeta$ , причем необходимо учесть валентность такого преобразования  $\overline{H} = -2iH$ . Здесь  $\overline{H}$  – новая функция Гамильтона, которая в переменных  $p$  и  $q$  примет вид

$$\overline{H} = -i \left[ pq - \frac{1}{96}(p^4 - 4p^3q + 6p^2q^2 - 4pq^3 + q^4) \right]. \quad (8)$$

Предполагаем, что в системе (4) нет резонансов второго и третьего порядков [6]. При отсутствии соответствующих резонансов функцию Гамильтона (8) каноническим преобразованием приводим к нормальной форме в членах до четвертого порядка [7]. В качестве канонического преобразования выберем преобразование Биркгофа [8] с порождающей функцией  $S_4$ :

$$p = u + \frac{\partial S_4(u, v)}{\partial v}, \quad q = v - \frac{\partial S_4(u, v)}{\partial u},$$

$$S_4 = S_{04}v^4 + S_{13}uv^3 + S_{22}u^2v^2 + S_{31}u^3v + S_{40}u^4.$$

Специальным выбором коэффициентов порождающей функции

$$S_4 = \frac{1}{96} \left( \frac{1}{4} v^4 - 2uv^3 + 2u^3v - \frac{1}{4} u^4 \right)$$

приводим функцию (8) к нормальному виду в переменных  $u$  и  $v$ :

$$H_* = -i \left( uv - \frac{1}{16} u^2 v^2 \right). \quad (9)$$

Следует напомнить, что функция  $H_*$ , определяемая равенством (9), не тождественна функции  $\overline{H}$ , преобразованной к переменным  $u$  и  $v$ . Необходимо учитывать, что приведение функции Гамильтона исходной системы (2) к нормальной форме осуществлено только в членах до четвертого порядка включительно [7]. Поэтому рассматриваемая система с функцией Гамильтона (9) является приближением исходной системы (2).

Соответствующая система дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона (9) допускает общий интеграл  $r = uv = \text{const}$ , что дает возможность представить точное решение этой системы в явном виде

$$v = (a + ib) e^{iml}, \quad u = (a - ib) e^{-iml}, \quad \text{где } m = i \frac{\partial H_*}{\partial (uv)} = \text{const},$$

где  $m$  зависит как от параметров стержня, так и от граничных условий [7]:

$$m = i \left( -i + i \frac{1}{8} uv \right) = 1 - \frac{1}{8} uv = 1 - \frac{1}{8} (a^2 + b^2).$$

Запишем результирующее преобразование к исходным переменным  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  и подставим найденные зависимости для  $u$  и  $v$ . В результате получим зависимости  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  от дуговой координаты  $l$ :

$$p'_\zeta = \left( a - \frac{1}{16} (a^2 + b^2) a \right) \cos ml + \left( -b + \frac{1}{16} (a^2 + b^2) b \right) \sin ml +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{32}a(a^2 - 3b^2) \cos 3ml + \frac{1}{32}b(b^2 - 3a^2) \sin 3ml, \\
 \zeta' = & \left( -b - \frac{1}{16}(a^2 + b^2)b \right) \cos ml + \left( -a - \frac{1}{16}(a^2 + b^2)a \right) \sin ml + \\
 & + \frac{1}{96}b(b^2 - 3a^2) \cos 3ml + \frac{1}{96}a(-a^2 + 3b^2) \sin 3ml.
 \end{aligned}$$

Таким образом, найдено решение поставленной задачи:

$$\alpha_T = \alpha_0 + \sqrt{2}\zeta'(L) - \delta - \psi.$$

Для определения постоянных интегрирования  $a$  и  $b$  воспользуемся граничными условиями

$$\begin{aligned}
 l = 0 : \quad & \theta = \psi; \\
 l = L : \quad & B \left( \frac{d\theta}{dl} \right) = \frac{1}{2}\rho d (sV^2 \sin \alpha_T + pV \cos \alpha_T).
 \end{aligned}$$

Перепишем граничные условия в новых переменных  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$ :

$$\zeta' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\psi + \delta), \quad p'_\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{d}{L} Y \sin(\alpha_0 - \psi + \sqrt{2}\zeta'), \quad \text{где } Y = L\sqrt{\frac{R}{2B}}. \quad (10)$$

Заменим уравнения получившейся системы для  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  приближенными, которые получаются после разложения до третьего порядка по  $a$  и  $b$  всех входящих в равенства и зависящих от них величин. Воспользуемся граничными условиями и будем иметь систему уравнений для нахождения неизвестных постоянных интегрирования  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{b}{96}(96 + 9a^2 + 5b^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\psi + \delta), \\
 & \left( \frac{1}{16}\sin Y + \frac{1}{8}Y \cos Y - \frac{3}{32}\sin 3Y \right) a^2 b + \left( -\frac{1}{16}\cos Y + \frac{1}{8}Y \sin Y - \frac{3}{32}\cos 3Y \right) ab^2 + \\
 & + \left( -\frac{1}{16}\cos Y + \frac{1}{8}Y \sin Y + \frac{1}{32}\cos 3Y \right) a^3 + \left( \frac{2}{32}\sin Y + \frac{1}{8}Y \cos Y + \frac{1}{32}\sin 3Y \right) b^3 + \\
 & + a \cos Y - b \sin Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{d}{L} Y \sin(\alpha_0 - \psi + \sqrt{2}\zeta'), \quad \zeta' = -b \cos Y - a \sin Y - \\
 & - \left( \frac{1}{16}\cos Y + \frac{1}{8}Y \sin Y + \frac{1}{32}\cos 3Y \right) a^2 b - \left( \frac{1}{16}\sin Y - \frac{1}{8}Y \cos Y - \frac{1}{32}\sin 3Y \right) ab^2 + \\
 & + \left( -\frac{1}{16}\sin Y + \frac{1}{8}Y \cos Y - \frac{1}{96}\sin 3Y \right) a^3 + \left( -\frac{1}{16}\cos Y - \frac{1}{8}Y \sin Y + \frac{1}{96}\cos 3Y \right) b^3.
 \end{aligned}$$

**3. Обратное преобразование Биркгофа.** Построенное приближенное решение задачи явным образом зависит от постоянных интегрирования  $a$  и  $b$ . Но непосредственная подстановка граничных значений в построенное решение приводит к нелинейному алгебраическому уравнению относительно  $a$  и  $b$ . Интересно, что для нахождения постоянных интегрирования нет необходимости решать полученную нелинейную систему, если известны значения всех исходных переменных при  $l = 0$ . При решении каждой конкретной задачи, из общего решения необходимо знать зависимость постоянных интегрирования  $a$  и  $b$  от задаваемых величин. Такую зависимость дает преобразование, обратное уже выполненному. Поэтому явный вид  $a$  и  $b$  можно получить, используя обратное преобразование Биркгофа [7]

$$u = p - \frac{1}{96} (q^3 - 6pq^2 + 2p^3), \quad v = q + \frac{1}{96} (-2q^3 + 6p^2q - p^3).$$

Возвращаясь к переменным  $p'_\zeta$ ,  $\zeta'$ , получим систему для нахождения неизвестных постоянных интегрирования  $a$  и  $b$ , где  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  вычисляются при  $l = 0$ :

$$\begin{aligned} a - ib &= p'_\zeta + i \zeta' - \frac{1}{96} ((p'_\zeta - i \zeta')^3 - 6(p'_\zeta + i \zeta')(p'_\zeta - i \zeta')^2 + 2(p'_\zeta + i \zeta')^3), \\ a + ib &= p'_\zeta - i \zeta' - \frac{1}{96} (2(p'_\zeta - i \zeta')^3 - 6(p'_\zeta + i \zeta')^2 (p'_\zeta - i \zeta') + (p'_\zeta + i \zeta')^3). \end{aligned}$$

Если же значения  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  заданы в некоторой текущей точке  $l = l_T$ , то правые части необходимо поделить соответственно на  $e^{-iml}$  и  $e^{iml}$ . Однако, в этом случае возникают определенные трудности при вычислении  $a$  и  $b$ , так как  $m$  зависит от  $a$  и  $b$ . Поэтому задача нахождения постоянных интегрирования решается значительно проще, когда  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  заданы при  $l = 0$  [7]. В том случае, когда значения  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  не заданы одновременно в одной точке, необходимо решать нелинейную систему. Данную систему предлагается решать методом последовательных приближений. Идея метода состоит в выборе некоторого нулевого приближения величины  $\alpha_{T_0}$ , которое соответствует текущей скорости потока. Далее, решаем систему: по найденному значению  $\zeta'$  в точке крепления стержня с пластинкой (за счет жесткости крепления) находим значение  $\alpha_{T_1}$  и используем его в качестве приближения на следующем шаге итерации. Как показывают вычисления, каждый шаг итерации уточняет значение угла на один знак после запятой.

На рис. ?? представлены графические зависимости  $\theta = \theta(l)$  при разных значениях скорости потока для полученного решения при следующих параметрах стержня и пластинки:

$$\rho = 1.293 \text{ кг/м}^3, \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{6}, \quad L = 0.3 \text{ м}, \quad d = 0.05 \text{ м}, \quad B = 11.34 \text{ кг} \cdot \text{м}^3 / \text{с}^2.$$

**4. Решение в виде отрезка ряда по скорости потока.** Если записать уравнение равновесия (1) относительно изменения угла наклона касательной к оси стержня  $\nu = \theta - \psi$ , то получим

$$B \frac{d^2 \nu}{dl^2} + \frac{\rho}{2} s (\alpha_T) V^2 \sin(\psi + \nu) + \frac{\rho}{2} p (\alpha_T) V \cos(\psi + \nu) = 0. \quad (11)$$

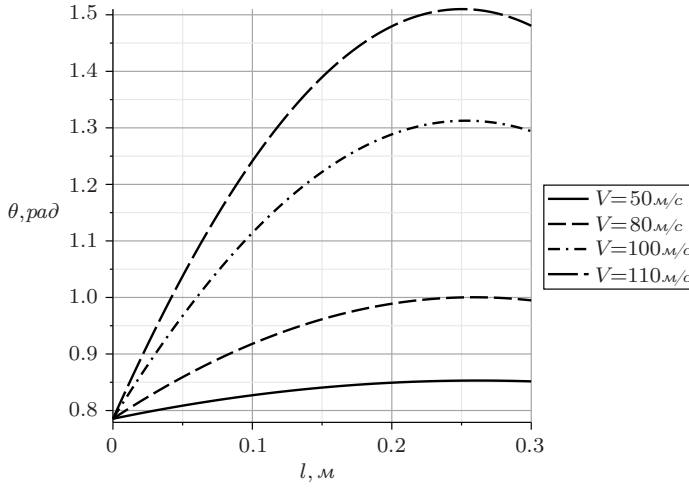


Рис. 1. Графики зависимости  $\theta = \theta(l)$ .

Граничные условия задачи таковы:

$$l = 0 : \nu = 0; \quad l = L: B \frac{d\nu}{dl} \Big|_k = M. \quad (12)$$

Предположим, что решение граничной задачи (11), (12) представимо в виде степенного ряда по  $V$ :

$$\nu(l, V) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(l) V^n. \quad (13)$$

Наша задача – получить зависимость угла атаки  $\alpha_T = \alpha_0 + \nu_k$  от скорости набегающего потока.

Заменим уравнение равновесия (11) приближенным и, подставив ряд (13), получим, после группировки коэффициентов по степеням  $V$ , уравнение

$$\frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^3 q_j V^j = 0,$$

где коэффициенты  $q_j$  равны

$$\begin{aligned} V : & \quad q_1 = \frac{2B}{\rho} \frac{d^2 \mu_1}{dl^2} + p \cos \psi = 0, \\ V^2 : & \quad q_2 = \frac{2B}{\rho} \frac{d^2 \mu_2}{dl^2} + s \sin \psi - p \mu_1 \sin \psi = 0, \\ V^3 : & \quad q_3 = \frac{2B}{\rho} \frac{d^2 \mu_3}{dl^2} - \frac{1}{2} p \mu_1^2 \cos \psi + s \mu_1 \cos \psi - p \mu_2 \sin \psi = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

а граничные условия к полученным дифференциальным уравнениям таковы

$$l = 0 : \mu_n = 0, \quad n = 1, 2, 3; \quad (15)$$

$$l = L : \begin{cases} V: & \frac{d\mu_1}{dl} = \frac{\rho}{2B} dp \cos \alpha_0, \\ V^2: & \frac{d\mu_2}{dl} = \frac{\rho}{2B} d(s - p\mu_1) \sin \alpha_0, \\ V^3: & \frac{d\mu_3}{dl} = \frac{\rho}{2B} d \left[ (s - \frac{\rho}{2}\mu_1) \mu_1 \cos \alpha_0 - p\mu_2 \sin \alpha_0 \right]. \end{cases} \quad (16)$$

Теперь, имея дифференциальные уравнения второго порядка (14) и два граничных условия (15), (16) на каждое из уравнений, можем найти коэффициенты  $\mu_n$  ряда (13). Таким образом, может быть получена приближенная зависимость угла атаки от скорости набегающего потока:  $\alpha_T = \alpha_0 + \mu_1 V + \mu_2 V^2 + \mu_3 V^3$ , где все  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) вычислены при  $l = L$ :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\rho}{2B} p \cos \psi \frac{L^2}{2} + \frac{\rho}{2B} p d \cos \alpha_0 L, \\ \mu_2 &= -\left(\frac{\rho}{2B}\right)^2 p^2 \cos \psi \sin \psi \frac{5L^4}{4!} + \left(\frac{\rho}{2B}\right)^2 p^2 d (\cos \alpha_0 \sin \psi - 3 \sin(\psi + \alpha_0)) \frac{L^3}{3!} + \\ &+ \frac{\rho}{2B} (s \sin \psi - \frac{\rho}{2B} p^2 d^2 \sin 2\alpha_0) \frac{L^2}{2!} + \frac{\rho}{2B} d s \sin \alpha_0 L, \\ \mu_3 &= \left(\frac{\rho}{2B}\right)^3 p^3 \cos \psi (-94 \cos^2 \psi + 61) \frac{L^6}{6!} + \\ &+ \left(\frac{\rho}{2B}\right)^3 p^3 d (45 \cos^2 \psi \sin \alpha_0 + 16 \cos \alpha_0 - 49 \cos^2 \psi \cos \alpha_0) \frac{L^5}{5!} + \\ &+ \left(\frac{\rho}{2B}\right)^2 p \left(\frac{\rho p^2 d^2}{2B} (4 \sin 2\alpha_0 \sin \psi - 27 \cos \psi \cos^2 \alpha_0 + 12 \cos \psi) + 5s \cos 2\psi\right) \frac{L^4}{4!} + \\ &+ \left(\frac{\rho}{2B}\right)^2 dp (5s \cos(\psi + \alpha_0) - 3 \frac{\rho}{2B} d^2 p^2 \cos \alpha_0 (-\frac{3}{2} \cos^2 \alpha_0 + 1)) \frac{L^3}{3!} + \\ &+ \left(\frac{\rho}{2B}\right)^2 p d^2 s \cos 2\alpha_0 L^2. \end{aligned}$$

В коэффициенты  $\mu_n$  входят параметры  $p$  и  $s$ , зависящие от угла  $\alpha_T$ , значение которого было определено ранее в гамильтоновом подходе для каждого шага алгоритма. Стоит отметить, что поток воздуха оказывает стабилизирующее воздействие на пластинку, если с ростом скорости потока воздуха угол атаки уменьшается [9]. Укажем скорости, при которых реализуется разделяющий случай:  $V_1 = \frac{-\mu_2 + \sqrt{\mu_2^2 - 3\mu_3\mu_1}}{3\mu_3}$ ,  $V_2 = \frac{-\mu_2 - \sqrt{\mu_2^2 - 3\mu_3\mu_1}}{3\mu_3}$ . Здесь  $V_1, V_2$  – скорости, при которых  $d\alpha/dV = 0$ .

**5. Сравнение результатов.** Для сравнения результатов решений, полученных двумя способами (1-м – с использованием гамильтонова подхода и 2-м – представление решения в виде отрезка ряда по скорости), на рис. 2 представлены графические зависимости  $\theta = \theta(l)$ , а в таблице – зависимости в радианах (1, 2 строки) и градусах (3, 4 строки) угла поворота пластинки  $\alpha_T$  от скорости потока  $V$ . Значения  $\alpha_T$  в первой и третьей строчках получены 1-м способом, во второй и четвертой строчках – 2-м способом.

Таблица

| № | $V, \text{ м/с}$         | 40    | 50    | 60    | 70    | 80    | 90    | 100   | 110   |
|---|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | $\alpha_T, \text{ рад}$  | 0.566 | 0.591 | 0.621 | 0.668 | 0.733 | 0.837 | 1.032 | 1.219 |
| 2 | $\alpha_T, \text{ рад}$  | 0.591 | 0.627 | 0.672 | 0.742 | 0.829 | 0.964 | 1.201 | 1.422 |
| 3 | $\alpha_T, \text{ град}$ | 32.41 | 33.79 | 35.58 | 38.31 | 42.01 | 47.96 | 59.13 | 69.85 |
| 4 | $\alpha_T, \text{ град}$ | 33.86 | 35.97 | 38.50 | 42.51 | 47.51 | 55.25 | 68.81 | 81.47 |



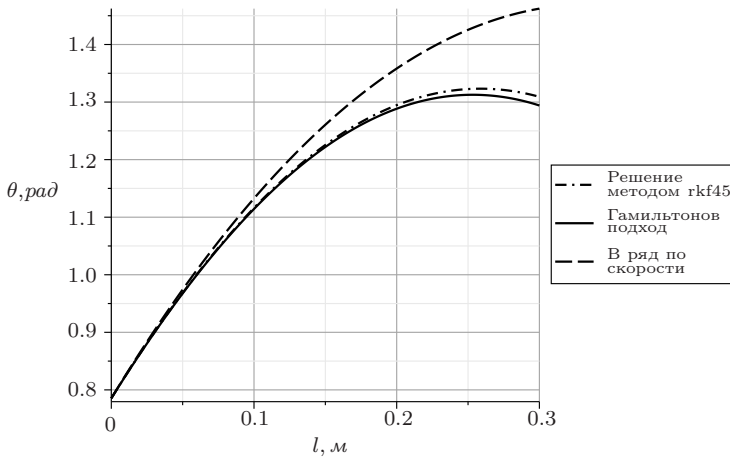


Рис. 2. Сравнение решений  $\theta = \theta(l)$  при  $V = 100$  м/с.

Для построения графиков и таблицы вычисления производились для следующих параметров стержня, пластинки и потока:  $\rho = 1.293 \text{ кг/м}^3$ ,  $\psi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $L = 0.3 \text{ м}$ ,  $d = 0.05 \text{ м}$ ,  $B = 11.34 \text{ кг}\cdot\text{м}^3/\text{с}^2$ ,  $p = 0.012 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $s = 0.033 \text{ м}^2$ ,  $V = 100 \text{ м/с}$ .

**Выводы.** Из таблицы видно, что при малых скоростях потока (до 40 м/с) расхождение решений, полученных обоими методами, достаточно мало (порядка 0.5–1.5 градуса). С ростом же скорости потока решения начинают сильно отклоняться друг от друга. Это видно, как и по значениям, приведенным в таблице, так и наглядно на рис. 2. Для того, чтобы выяснить, какой из методов решения при больших скоростях “ближе к истине”, было проведено сравнение решения  $\theta$ , полученного с помощью гамильтонова подхода и численным методом rkf45 (Рунге–Кутта–Фельберга 4–5 порядка). Сравнение показало “хорошую” близость решений даже при больших скоростях (порядка 100 м/с). Из всего вышесказанного следует, что гамильтонов подход дает достаточно близкое к “истинному” решение, но при математическом моделировании заставляет каждое решение получать с помощью последовательных итераций, что не всегда удобно для реализации. Второй подход, через представление решения в виде отрезка ряда по скорости, при моделировании дает аналитические формулы для всех решений, однако его применение целесообразно лишь при малых скоростях потока. Из сравнения решений, полученных тремя различными методами, можно сделать вывод: решение, полученное численным интегрированием, всегда можно сделать сколь угодно близким к точному. Тогда решение, полученное на основе гамильтонова подхода, дает заниженное значение угла  $\theta$ , в том числе и для угла атаки  $\alpha$ . Соответственно значения углов, вычисленных с помощью отрезка ряда по степеням скорости, будут больше точных значений.

1. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 86 с.
2. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: ЧеРо, 1999. – 572 с.
4. Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я. Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 288 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2002. – 264 с.
6. Арнольд В.И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1979. – 304 с.
7. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев: Наук. думка, 1979. – 216 с.
8. Биркгоф Г.Д. Динамические системы. – М.; Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.
9. Илюхин А.А., Ступко С.А. Приближенное решение задачи о равновесии пластинки на упругом стержне в потоке воздуха // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 242–245.

**A.A. Plyukhin, S.A. Schreter**

### **Mathematical modeling of the behavior of a plate in a wind tunnel**

The paper presents two methods for constructing approximate solutions of the nonlinear problem of bending of an elastic thin rod shape under the influence of aerodynamic forces, they are the Hamiltonian approach and the representation of the solution in the form of a segment of the power series in the flow rate. The main idea of the first method consists in reducing the source of the Euler–Kirchhoff system to equations of Hamiltonian type with subsequent normalization of the Hamiltonian in a certain number of members (depending on the desired accuracy). In this approach, the search of the solution to the two-point boundary value problem is carried out by means of direct and inverse transformation of Birkhoff. The idea of the second approach is to write the equations of equilibrium for a change of the generalized coordinates and to represent the solution in the form of a segment of the power series in the free stream velocity. The results of both methods are compared.

**Keywords:** *Hamiltonian approach, Birkhoff transformation, bending of the rod, the mathematical model.*

**О.О. Ілюхін, С.О. Шретер**

### **Математичне моделювання поведінки пластинки в аеродинамічній трубі**

Представлено два методи наближеної побудови розв'язку нелінійної задачі вигину пружного тонкого стержня під впливом аеродинамічних сил: гамільтонів підхід і зображення розв'язку у вигляді відрізка ряду по швидкості потоку. Основна ідея першого методу полягає у зведенні вихідного рівняння Ейлера–Кірхгофа до системи рівнянь гамільтонова типу з наступною нормалізацією функції Гамільтона з урахуванням визначеного числа членів (в залежності від необхідної точності). У рамках цього підходу здійснено пошук розв'язку граничної двоточкової задачі за допомогою прямого та оберненого перетворення Біркгофа. Ідея другого підходу – запис рівняння рівноваги відносно зміни узагальненої координати і зображення розв'язку у вигляді відрізка ряду по швидкості набігаючого потоку. Проведено порівняння результатів обох методів.

**Ключові слова:** *гамільтонів підхід, перетворення Біркгофа, вигин стержня, математична модель.*

Таганрогский гос. пед. ин-т им. А.П. Чехова, Россия  
aleilyukhin@yandex.ru, sergshre@yandex.ru

Получено 11.11.11