УДК 531.38

 О.С. Волкова

О ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ ЛИНЕЙНЫМИ ПО КОМПОНЕНТАМ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ИНВАРИАНТНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

Изучается движение в поле силы тяжести гиростата, имеющего неподвижную точку. Предполагается, что направление переменного гиростатического момента фиксировано во вращающемся базисе. Показано, что для уравновешенного гиростата класс движений, характеризующихся двумя линейными инвариантными соотношениями, исчерпывается движениями с перманентной осью вращения. Для тяжелого гиростата получены новые семейства решений с одним либо двумя линейными инвариантными соотношениями уравнений движения.

Ключевые слова: *гиростат с неподвижной точкой, переменный гиростатический момент, линейное инвариантное соотношение.*

Введение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из тела-носителя S, имеющего неподвижную точку, и жестко закрепленных на нем тел S^i, $i = 1, 2, .. n$, для каждого из которых общая с носителем ось будет главной центральной осью инерции. Предположим также, что несомые тела обладают динамической симметрией относительно своей оси крепления. В случаях, когда угловые скорости тел S^i – заданные функции времени либо известна составляющая момента сил, действующих на S^i со стороны S, относительно их общей оси, уравнения движения такой системы имеют вид (см. [1])

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – обобщенный тензор инерции, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела-носителя в подвижном базисе, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали, $\boldsymbol{e}$ – вектор, направленный вдоль барицентрической оси, $\boldsymbol{\lambda}$ – переменный гиростатический момент. Другие конструкции гиростатов как систем, суммарный момент количества движения которых представим в виде суммы $\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$, приведены в [2]. В частности, гиростатом будет твердое тело с маховиками, вращающимися с постоянной или переменной угловой скоростью. Такие системы рассматривали А.И. Лурье, К. Магнус, Й. Виттенбург и другие.

Уравнения (1) допускают два первых интеграла

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = g, \quad |\boldsymbol{\nu}|^2 = 1. \tag{2}$$

Параметр $|\boldsymbol{e}|$, равный произведению веса гиростата на расстояние от центра масс до неподвижной точки, не существенен. Для уравновешенного гиростата $|\boldsymbol{e}| = 0$, в ином случае замена $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = |\boldsymbol{e}|^{-1/2}\boldsymbol{\omega}$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = |\boldsymbol{e}|^{-1/2}\boldsymbol{\lambda}$, $\tilde{t} = |\boldsymbol{e}|^{1/2}t$ позволяет ввести единичный вектор $\tilde{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}/|\boldsymbol{e}|$.

Предположим, что $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, где $\lambda(t)$ – непрерывная и ограниченная вместе со своей производной функция времени. Будем исследовать движения гиростата, при которых проекция его угловой скорости на некоторую фиксированную в подвижном базисе плоскость остается постоянной. Тогда для любых единичных векторов $\boldsymbol{\gamma_1}$ и $\boldsymbol{\gamma_2}$ из этой плоскости выполняется $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma_1}) = c_1$, $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma_2}) = c_2$, где c_1, c_2– постоянные. Случай $c_1 = c_2 = 0$ соответствует движениям с перманентной осью вращения, которые изучались ранее в работах [3, 4]. Здесь же будем считать, что $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Положим

$$\boldsymbol{\beta_1} = \frac{(c_1 - c_2\cos\psi)\boldsymbol{\gamma_1} + (c_2 - c_1\cos\psi)\boldsymbol{\gamma_2}}{\sin\psi\sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\psi}}, \quad \boldsymbol{\beta_2} = \frac{c_2\boldsymbol{\gamma_1} - c_1\boldsymbol{\gamma_2}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\psi}},$$

где через ψ обозначен угол между $\boldsymbol{\gamma_1}$ и $\boldsymbol{\gamma_2}$. Очевидно, что $|\boldsymbol{\beta_1}| = |\boldsymbol{\beta_2}| = 1$, $\boldsymbol{\beta_1} \perp \boldsymbol{\beta_2}$, а система (1) допускает инвариантные соотношения

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta_1}) = c, \ \ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta_2}) = 0, \ \ \text{где} \ \ c = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\psi}}{\sin\psi}. \tag{3}$$

В классической постановке ($\boldsymbol{\lambda} = 0$) двум линейным инвариантным соотношениям соответствуют решение Д.К. Бобылева – В.А. Стеклова [5, 6] и решение задачи о движении физического маятника. При $\boldsymbol{\lambda} = \text{const}$ решение уравнений (1) с двумя линейными по $\boldsymbol{\omega}$ инвариантными соотношениями получено П.В. Харламовым [7]. Два линейных по $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ инвариантных соотношения уравнений Кирхгофа – Пуассона изучались С.В. Скрыпник с учетом гидродинамической аналогии: в [8] соответствующие результаты П.В. Харламова для задачи о движении тела в жидкости [9] перенесены на задачу о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил. В настоящей работе будем считать, что гиростатический момент зависит от времени, т.е. $\lambda(t) \neq \text{const}$, а инвариантные соотношения имеют вид (3) и не содержат компонент орта вертикали $\boldsymbol{\nu}$. Тогда вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяет разложению

$$\boldsymbol{\omega} = c\boldsymbol{\beta_1} + \omega\,(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}), \quad \omega = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \neq \text{const}, \tag{4}$$

поскольку равномерные вращения здесь не рассматриваются.

Обозначим через $\boldsymbol{K}$ суммарный момент количества движения $\boldsymbol{J\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}$. Из разложения (4) следует, что $\boldsymbol{K} = \omega\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}) + \lambda\boldsymbol{\alpha} + c\boldsymbol{J\beta_1}$. Значит, должно выполняться хотя бы одно линейное по $\boldsymbol{K}$ соотношение, а именно:

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\sigma}) = c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\sigma}) \ \ \text{при} \ \ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \times \boldsymbol{\alpha} \neq 0 \tag{5}$$

и

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{r}) = c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{r}), \ \ (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}) = c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}) \ \ \text{при} \ \ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \parallel \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{r}. \tag{6}$$

Введем x, y, z – проекции $\boldsymbol{K}$ на векторы $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\beta_1}$ соответственно и перепишем в этих обозначениях динамические уравнения системы (1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cy - \omega z + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2}), \\ \dot{y} &= -cx + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}), \\ \dot{z} &= \omega x + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Кинематические уравнения с учетом разложения (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&(\dot{\boldsymbol{\nu}},\boldsymbol{\beta_1})=\omega(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta_2}),\\&(\dot{\boldsymbol{\nu}},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=-c(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta_2}),\\&(\dot{\boldsymbol{\nu}},\boldsymbol{\beta_2})=c(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})-\omega(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta_1}).\end{aligned}\tag{8}$$

Отметим, что $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta_2})\neq 0,$ иначе из (8) следовало бы $\dot{\boldsymbol{\nu}}=0$ и $\boldsymbol{\omega}\parallel(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}).$

1. Два линейных инвариантных соотношения в задаче о движении уравновешенного гиростата. Изучим движение гиростата с гиростатическим моментом $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ в случае Л. Эйлера – Н.Е. Жуковского. Пусть центр масс системы совпадает с неподвижной точкой, т.е. $|\boldsymbol{e}|=0.$ Тогда, вдобавок к первым интегралам (2), уравнения движения допускают интеграл

$$x^2+y^2+z^2=k^2=\mathrm{const},\tag{9}$$

выражающий постоянство модуля момента количества движения $\boldsymbol{K}.$

***Утверждение* 1.** *Для уравновешенного гиростата класс движений, характеризующийся инвариантными соотношениями* (3), *исчерпывается движениями с перманентной осью вращения.*

Доказательство. Пусть $c\neq 0.$ Отдельно рассмотрим два случая:

a) $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\parallel\boldsymbol{\alpha}.$ Обозначив $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\omega+\lambda$ через $p,$ запишем

$$\begin{aligned}&x=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_2})p+c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}),\\&y=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})p+c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}),\\&z=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1})p+c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_1}).\end{aligned}\tag{10}$$

Левая часть интеграла (9) представляет собой квадратичную функцию $p:$

$$p^2+2c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\alpha})p+c^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1})^2=k^2,$$

следовательно, $p=\mathrm{const},$ $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0,$ а из (7) и $x=y=z=0.$ Согласно (10), p выражается через c только при $\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}\parallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}).$ Но поскольку $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\times\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}=\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\beta_2}\det\boldsymbol{J}\neq 0,$ это условие невыполнимо.

b) $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\nparallel\boldsymbol{\alpha}.$ Пусть сначала $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_2})=0:$ в этом случае

$$(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}),\boldsymbol{\beta_1})\dot{y}\equiv(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}),\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\dot{z}.$$

Подстановка полученного тождества в систему (7) снова приводит к тривиальному решению $x=y=z=0.$ Относительно переменных λ и ω равенства $x=0,$ $y=0$ – это система линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами, определитель которой $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_1})\neq 0,$ иначе выполнялось бы $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\perp(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}).$ Значит, λ и ω – постоянные величины.

Теперь предположим, что $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_2})\neq 0.$ Тогда

$$x\equiv Ay+Bz+C,\tag{11}$$

где $A = -(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})/(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})$, $B = -(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1})/(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})$, $C = c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1})/(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})$.

Обратимся к системе (7). Поскольку $x = 0$ влечет за собой $y = z = 0$, а значит, и λ, $\omega = \mathrm{const}$, будем считать, что $x \neq 0$. На промежутках знакопостоянства функции $x(t)$ произведем замену $t \to \tau$: $\dot{\tau} = x$. Теперь систему (7) можно проинтегрировать:

$$y = -c\tau, \quad z = \int \omega(\tau)\, d\tau, \quad x^2 = k^2 - y^2 - z^2.$$

Первый интеграл (9) перепишем с учетом равенства (11):

$$(A^2 + 1)y^2 + (B^2 + 1)z^2 + 2AByz + 2C(Ay + Bz) = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Зная зависимости $y(\tau)$ и $y(\omega, \lambda)$, $z(\tau)$ и $z(\omega, \lambda)$, исключим λ и выразим $\omega(\tau)$:

$$\omega(\tau) = \frac{-1}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})} \left[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \int \omega(\tau)\, d\tau + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1}) c\tau + c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2}) \right]. \tag{13}$$

Из уравнения (13) находим:

$$z(\tau) = \int \omega(\tau)\, d\tau = z_0 - \frac{c\tau[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})\tau + 2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})]}{2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})} \quad \text{при } (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = 0 \text{ и}$$

$$z(\tau) = \int \omega(\tau)\, d\tau = \tilde{z}_0 - \frac{c\tau(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1}) + \omega_0 \exp \frac{-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\tau}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})}}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})} \quad \text{при } (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \neq 0.$$

Постоянные z_0, ω_0 здесь произвольны за исключением единственного ограничения $\omega_0 \neq 0$, а $\tilde{z}_0$ зависит от остальных параметров. При $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2}) \neq 0$ и $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = 0$ обязательно $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1}) \neq 0$, поэтому в первом случае $z(\tau)$ содержит τ^2, а $(B^2+1)z^2$ – соответственно τ^4. Степень остальных слагаемых в левой части (12) меньше, а следовательно, (12) не может выполняться тождественно по τ. При $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2}) \neq 0$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \neq 0$ тождественное выполнение (12) противоречит трансцендентности функции $\exp \frac{-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\tau}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})}$.

Таким образом, предположение $c \neq 0$ приводит к противоречию. $\square$

2. Два линейных инвариантных соотношения в задаче о движении тяжелого гиростата. В этом случае вспомогательную переменную времени τ выберем так, чтобы проинтегрировать кинематические уравнения (8):

$$t \to \tau\colon\ \dot{\tau} = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2}) \ \text{ при } (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2}) \gtrless 0.$$

Тогда

$$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -c\tau, \ \ (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1}) = \int \omega(\tau)\, d\tau, \tag{14}$$

$$\dot{\tau} = \pm \sqrt{1 - c^2\tau^2 - \left(\int \omega(\tau)\, d\tau \right)^2}, \tag{15}$$

причем зависимость $\omega(\tau)$ предстоит найти из условий совместности системы (1) относительно функции $\lambda(\tau)$.

После исключения λ из уравнений (1) система сводится к двум интегро-дифференциальным уравнениям на функцию $\omega(\tau)$. Как следствие из них, мы можем получить алгебраические соотношения, представляющие собой многочлены по ω и τ с коэффициентами, зависящими от параметров. В общем случае проверка существования функции $\omega(\tau)$, удовлетворяющей обоим соотношениям, пока не проведена ввиду сложности вычислений.

Исследуем частный случай, при котором проекция суммарного момента количества движения на барицентрическую ось остается постоянной, т.е. выполняется $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{const}$. Рассмотрены будут два варианта: когда соотношение $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{const}$ *совпадает* с каким-либо из линейных по $\boldsymbol{K}$ соотношений (5),(6) либо когда оно выполняется *вдобавок* к этим соотношениям.

В качестве вспомогательного утверждения приведем без доказательства

Предложение 1. *Если во время движения тяжелого гиростата с гиростатическим моментом* $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha} \neq \mathrm{const}$ *выполняются условия* (3) *и* $\dot{\boldsymbol{K}} = 0$, *то это движение – маятниковое вращение вокруг вертикали.*

Докажем основное утверждение работы.

Утверждение 2. *Движения тяжелого гиростата с гиростатическим моментом* $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, *характеризующиеся инвариантными соотношениями* (3) *и дополнительным условием* $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{const}$, *возможны только при выполнении*

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\beta_2}) = 0, \quad \boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\beta_2}. \tag{16}$$

Доказательство. Итак, пусть $(\dot{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{e}) = 0$. При $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\beta_2}$ из (7) следует $(\dot{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{e}) = x(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\omega}) = 0$, откуда при $c|\boldsymbol{e}| \neq 0$ получаем $x = 0$. Предположим, что $\boldsymbol{e} \not\perp \boldsymbol{\beta_2}$. Здесь уместно отступить от изложенной выше общей схемы исследования. Начнем с рассмотрения случая

A) $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \perp \boldsymbol{e}$. Из проекции динамического уравнения (1) на вектор $\boldsymbol{e}$ выразим $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\alpha})$ и продифференцируем по ω:

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{(\boldsymbol{J\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha})}, \;\; (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha}) \not\equiv 0 \text{ при } \boldsymbol{e} \not\perp \boldsymbol{\beta_2}; \tag{17}$$

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\alpha})'_\omega = \frac{-(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e})(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha})} + \frac{c(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_2})(\boldsymbol{J\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha})^2}.$$

Проекции на $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha}$ позволяют выразить $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e})$ и $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha})$:

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\alpha})'_\omega \dot{\omega} - (\boldsymbol{J\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}), \\ &(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}) = -(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e})\dot{\omega} + (\boldsymbol{J\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha})^{-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Умножив динамическое уравнение (1) скалярно на $\boldsymbol{\omega}$ и разделив обе стороны на $\dot{\omega}$ ($\omega \neq \mathrm{const}$), получим

$$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})'_\omega = (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\alpha})'_\omega(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) - (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e})(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\alpha}). \tag{19}$$

При $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=0$ интегрирование (19) дает многочлен 3-й степени по ω; в ином случае $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})$ – выражение вида $\dfrac{p_1(\omega)\ln(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})+p_3(\omega)}{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})}$, где p_1, p_3 – многочлены по ω соответственно 1-й и 3-й степени. Теперь из геометрического интеграла $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha})^2+(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e})^2+(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})^2=1$ получаем уравнение вида

$$a(\omega)\dot{\omega}^2+b(\omega)\dot{\omega}+c(\omega)=0, \tag{20}$$

коэффициенты которого здесь приводить не будем.

Второе уравнение для $\dot{\omega}$ получим из равенства $(\dot{\boldsymbol{\nu}},\boldsymbol{\omega})=0$. Принимая во внимание (18),(19) и $(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha})'_\omega+(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e})'_\omega+(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})'_\omega=0$, имеем

$$(\boldsymbol{J\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})\dot{\omega}'_\omega=2c(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})\dot{\omega}+f(\omega), \tag{21}$$

где

$$f(\omega)=\frac{1}{c(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_2})}\left[2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})+(\boldsymbol{J\omega}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\right]\left[(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})^2-\boldsymbol{\omega}^2\right](\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})-$$
$$-(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha})\left(\boldsymbol{J\omega}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})\right).$$

Левая часть (21) может обращается в нуль только при $(\boldsymbol{J\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})=0$. Но тогда $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})=0$, $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{\alpha})=0$ по формуле (17), а $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e})=\mathrm{const}$ по предположению. Следовательно, $\dot{\boldsymbol{K}}=0$. Согласно Предложению 1, движение в этом случае будет происходить вокруг перманентной оси, т.е. $c=0$ в инвариантных соотношениях (3), что не рассматривается.

Таким образом, для функции $\dot{\omega}(\omega)$ имеем алгебраическое (20) и линейное дифференциальное (21) уравнения. Общее решение однородной части уравнения (21) имеет вид $\tilde{w}_0(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})^2(\boldsymbol{J\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})^{-2}$, а общее решение неоднородного уравнения представимо суммой

$$\dot{\omega}=\frac{p_2(\omega)\ln(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})+p_5(\omega)}{(\boldsymbol{J\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})^2}, \tag{22}$$

где p_2, p_5 – многочлены по ω не выше 2-й и 5-й степени соответственно. Подставим (22) в уравнение (20) и потребуем, чтобы полученное равенство выполнялось тождественно по ω. Отдельно рассмотрим возможности $\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$ и $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$.

a) $\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$. В этом случае всегда выполняется $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})\not\perp(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$. Если дополнительно $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=0$, то числитель в (20) будет многочленом 12-й степени по ω, старший коэффициент которого исчезает только при $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}$. Но коэффициент при ω^{10} в этом случае строго больше нуля.

При $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\neq0$ числитель в (20) – квадратичная функция относительно $\ln(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})$, коэффициенты которой – полиномы по ω. Коэффициент при $\omega^{14}\ln^0(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})$ равен нулю, только если $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=0$. Но тогда коэффициент при $\omega^{12}\ln^0(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})$ будет строго положительным.

b) $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$. В этом случае необходимо потребовать $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})\not\perp\boldsymbol{\beta_1}$, иначе $\dot{\boldsymbol{K}}=0$. Если при этом $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=0$, то (20) – полином 6-й степени по ω. Его старший член равен нулю только при $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}$, но тогда коэффициент при ω^4 равен сумме квадратов, один из которых в нуль не обращается. Если же $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\neq 0,$ то левая часть (20) квадратична по $\ln(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})$. Равенство нулю коэффициента при $\omega^6\ln^0(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})$ можно обеспечить только за счет требования $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=0.$ Тогда коэффициент при $\omega^4\ln^2(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})$ исчезает в единственном случае: когда $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=0$. Но при условии b) это равенство невыполнимо.

Таким образом, предположение $\boldsymbol{e}\not\perp\boldsymbol{\beta_2}$ приводит к противоречию.

B) $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\not\perp\boldsymbol{e}$. В этом случае дополнительное к (6) соотношение $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e})=\mathrm{const}$ влечет за собой $\dot{\boldsymbol{K}}=0$. Применяя Предложение 1 заключаем, что при ненулевой постоянной c решений нет.

C) $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\nparallel\boldsymbol{e}$. Как уже было показано, $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{\beta_2}$ приводит к $\boldsymbol{K}\perp\boldsymbol{\beta_2}$. Пусть теперь $\boldsymbol{e}\not\perp\boldsymbol{\beta_2}$. Тогда проекции динамического уравнения на $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\omega}$ образуют полную систему. Рассмотрим первую из них с учетом $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e})=K_0$:

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})+(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})\lambda=0\ \text{ при }\ (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})\lambda=K_0. \tag{23}$$

Отметим, что $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})\neq 0$, иначе выполнялось бы и $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=0$. Исключив из (23) λ и получив квадратное уравнение относительно ω, потребуем, чтобы его коэффициенты были нулевыми. Старший коэффициент исчезает при

$$((\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\sigma})\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})=0. \tag{24}$$

Далее, аналогично доказательству случая A), из проекций на $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ получаем

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\frac{\omega^2}{2}+c(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_1})\omega+h,\\&(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\alpha},(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\sigma})\times\boldsymbol{e})+K_0(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma}).\end{aligned} \tag{25}$$

С учетом выражений (14) и равенства (24), из уравнений (25) выразим $\tau(\omega)$:

$$(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\sigma},\,\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta_1})c\tau=(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_2})-(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_2}).$$

Коэффициент $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta_1})\neq 0$, поскольку вместе с (24) это привело бы к $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{\beta_2}$. Таким образом, τ – квадратичная функция ω. Значит, $\int\omega\,d\tau= =\int\omega\tau'(\omega)\,d\omega$– многочлен от ω не выше 3-й степени. Воспользовавшись разложением $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_2})\dot\tau=(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})+(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})c\tau-(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1})\int\omega\,d\tau$ и учтя выражение (15) для $\dot\tau$, получим многочлен 6-й степени от ω, который тождественно в нуль не обращается. Отсюда делаем вывод, что предположение $\boldsymbol{e}\not\perp\boldsymbol{\beta_2}$ не верно.

Таким образом, $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{K}\perp\boldsymbol{\beta_2}$. Утверждение доказано. □

Условиям (16) соответствуют три различных семейства решений.

1) Решение существует при условиях $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{\beta_2}\parallel\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_2}\perp\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$,

$$\lambda(\tau)=-(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}),\boldsymbol{\alpha})\omega(\tau)+(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_2})\tau+\lambda_0,\ \ \lambda_0=\mathrm{const},$$

а функция $\omega(\tau)$ задана уравнением

$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_2})\tau+\lambda_0](\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\omega})+c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\omega})=\\&\qquad=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\int\omega\,d\tau+(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1})c\tau.\end{aligned} \tag{26}$$

При $\boldsymbol{e} \nparallel \boldsymbol{\beta_1}$ из (26) получаем

$$\omega(\tau) = \frac{\omega_0}{[(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\tau - c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1}) - \lambda_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})]^2} - \frac{c(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})}, \ \omega_0 = \mathrm{const}.$$

Зависимость компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ от τ вычисляется по формулам (14), а функция $\tau(t)$ определяется эллиптической квадратурой (15).

При $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta_1}$ из перечисленных выше условий на параметры следует, что все три вектора $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}$ направлены вдоль главных осей эллипсоида инерции. Уравнение (26) при этом вырождается в алгебраическое,

$$\omega(\tau) = \frac{2\tau(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1}) + \lambda_0}{J_1}; \quad \lambda(\tau) = \frac{(J_1 - 2J_3)(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})\tau + \lambda_0(J_1 - J_3)}{J_1}.$$

Положив $J_1 = 2J_3$, $\lambda_0 = 0$, получим известное решение Бобылева – Стеклова задачи о движении твердого тела. При $J_1 \neq 2J_3$ функции $\lambda(\tau)$, $\omega(\tau)$ линейны по τ, зависимость $\tau(t)$ – эллиптическая.

2) Набор условий $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta_2} \parallel \boldsymbol{J\beta_2}$, $(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})|\boldsymbol{\sigma}| \neq 0$ обеспечивает существование решения с

$$\lambda(\tau) = \frac{-(\boldsymbol{Je}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\tau}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})} + \lambda_0, \quad \omega(\tau) = \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})\tau}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})} + \omega_0,$$

причем постоянные λ_0 и ω_0 здесь однозначно определены параметрами гиростата и инвариантными соотношениями (3):

$$\lambda_0 = \frac{2c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})^2} - \frac{c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1}) + \omega_0(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})},$$

$$\omega_0 = c\left(\frac{2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})} + \frac{(\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})}\right).$$

3) Условия $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta_1} \perp \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\beta_2}$, $(\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1}) \neq 0$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2}) \neq 0$ приводят к

$$\lambda(\tau) = \frac{(\boldsymbol{J\beta_2}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})\tau}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1})} + \lambda_0, \ \omega(\tau) = \frac{-(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})\tau}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1})} + \omega_0, \text{ где}$$

$$\lambda_0 = -\frac{(\boldsymbol{J\beta_2}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\omega_0 + c(\boldsymbol{J\beta_2}, \boldsymbol{\beta_1})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})}, \ \omega_0 = \frac{c(\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1})}.$$

Требование $(\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1})$ эквивалентно условию

$$3(\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = 2\,[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{J} - (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{J\beta_2})], \tag{27}$$

которое не противоречит равенству $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = 0$. Например, если $\boldsymbol{\beta_1} \perp \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \not\perp \boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta_2}$, то $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1}) \neq 0$, $\lambda \neq \mathrm{const}$, а (27) принимает вид $(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1}) = 2(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}), \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})$.

Поскольку в случаях 2), 3) функция $\omega(\tau)$ линейна по τ, то уравнение (15), задающее зависимость $\tau(t)$, интегрируется в эллиптических функциях; проекции $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1})$, $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})$ вычисляются по формулам (14).

Решения 1)–3) обладают некоторыми общими свойствами, которые следуют из $(\dot{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\beta_2}) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_2}) = 0$ и без этих условий выполняться не могут. Показано, что:

а) все решения с инвариантными соотношениями (3), при которых три компоненты вектора $\boldsymbol{K}$ линейны по τ, описываются наборами условий 1)–3);

б) все решения с инвариантными соотношениями (3), при которых $\lambda(\tau) = c_1\omega(\tau) + c_2$, $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, описываются наборами условий 2), 3) и 1) с дополнительным ограничением $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \parallel (\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})$.

3. Одно линейное инвариантное соотношение в задаче о движении тяжелого гиростата. Получим аналогичные результаты и для задачи с ровно одним инвариантным соотношением $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}) = 0$: выпишем все решения при условиях $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = K_0$, $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\beta}$.

Кинематические уравнения запишем в виде

$$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) = \dot{\tau}, \ \ (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e}) = \int_{\tau_0}^{\tau} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})\, d\tau + \nu_0, \ \ (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta}) = -\int_{\tau_0}^{\tau} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e})\, d\tau + \nu_0^*, \quad (28)$$

$$\dot{\tau} = \pm\sqrt{1 - \left(\int_{\tau_0}^{\tau} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})\, d\tau + \nu_0\right)^2 - \left(\int_{\tau_0}^{\tau} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e})\, d\tau - \nu_0^*\right)^2}. \quad (29)$$

I) Если выполняется $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \perp (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})$, $K_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}) \neq 0$, то

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})\tau - K_0(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})}, \ \ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta}) = \frac{3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})K_0^{-1}\tau^2 - 4(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})\tau + \omega_0}{2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})},$$

$$\lambda = \frac{-3(\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})K_0^{-1}\tau^2 + 2[2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})]\tau + \lambda_0}{2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})},$$

где $\lambda_0 = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})[2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})K_0 - \omega_0]$. Таким образом, $\lambda-$ квадратичная функция τ, а квадратура (29), задающая $\tau(t)-$ гиперэллиптическая. Отметим, что выражение $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$ при заданных условиях в нуль не обращается.

Зависимость от τ компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ вычисляется согласно (28). Постоянную ν_0 можно выбирать произвольно, а ν_0^* связана с остальными параметрами соотношением

$$\nu_0^* = [\tau(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) - K_0(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})]_{\tau=\tau_0}.$$

II) Если же выполнено $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{e}$, $(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}) \neq 0$, то

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = \frac{K_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})}{2(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})} + c_0(\tau + a)^{-2}, \ \ a = \frac{(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{e})K_0}{(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})}, \ \ c_0 = \mathrm{const},$$

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta}) = \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})\tau - K_0(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{e})(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e})}{(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})},$$

$$\lambda = \frac{-(\boldsymbol{Je}, \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta})\tau + K_0(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{Je}\times\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e})}{(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta})}.$$

В случае, когда постоянная c_0 принимает нулевое значение, имеем второе инвариантное соотношение $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{const}$, и выписанное выше решение соответствует решению 2) из пункта 2.

III) Следующий набор условий на параметры и начальные значения

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta})) \parallel \boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{e},\ \ K_0 = 0,\ \ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq 0,\ \ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}) \nparallel \boldsymbol{\alpha}$$

обеспечивает существование решения вида

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = c_0\tau^{-2},\ \ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}) = \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\tau - c_0(\boldsymbol{Je}, \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha})\tau^{-2}}{(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta})},\ \ c_0 = \mathrm{const},$$

$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta})\tau + c_0(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta})\tau^{-2}}{(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta})}.$$

Положив и в этом случае $c_0 = 0$, приходим к маятниковому вращению гиростата с переменным $\boldsymbol{\lambda}$ вокруг неглавной горизонтальной оси (см. [4]). При $c_0 \neq 0$ функция $\tau(t)$, аналогично случаям A),B), задается обращением гиперэллиптического интеграла. Если дополнительно выполняется $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{Je}$, имеем вырожденный случай: зависимость $\tau^2(t)$ – эллиптическая.

Вопрос об ограниченности функций $\lambda(t), \dot{\lambda}(t)$ в общем случае пока остается открытым. Приведем результаты численного моделирования для некоторых конкретных наборов параметров, удовлетворяющих условиям I)–III).

I) Пусть $\boldsymbol{\beta} = (0, 0, 1),\ J_1 = 2,\ J_2 = 3,\ J_3 = 4,\ \alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_3 = 0,$

$$e_1 = \frac{J_1\alpha_2}{\sqrt{J_1^2\alpha_2^2 + J_2^2\alpha_1^2}},\ \ e_2 = -\frac{J_2\alpha_1}{\sqrt{J_1^2\alpha_2^2 + J_2^2\alpha_1^2}},\ \ e_3 = 0,$$

$$\tau_0 = -0.1,\ \ \omega_0 = 7\sqrt{13/2},\ \ K_0 = 0.1,\ \ \nu_0 = -0.35.$$

Графики функций $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ и $\nu_1(t), \nu_2(t)$ приведены на рис. 1 *а*), *б*).

II) Пусть $\boldsymbol{\beta} = (0, 0, 1),\ J_1 = 2,\ J_2 = 3,\ J_3 = 4,\ \alpha_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{30}},\ \alpha_2 = \sqrt{\dfrac{29}{30}},$

$$e_1 = \frac{J_2\alpha_1}{\sqrt{J_1^2\alpha_2^2 + J_2^2\alpha_1^2}},\ \ e_2 = \frac{J_1\alpha_2}{\sqrt{J_1^2\alpha_2^2 + J_2^2\alpha_1^2}},\ \ e_3 = 0,\ \ \alpha_3 = 0,$$

$$\tau_0 = -2,\ \ c_0 = -0.05,\ \ K_0 = 0.1,\ \ \nu_0 = 0.9.$$

Соответствующие зависимости $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\nu_1(t), \nu_2(t)$ изображены на рис. 1 *в*), *г*).

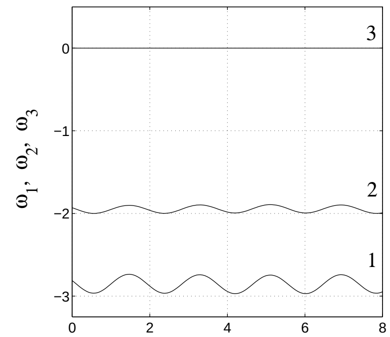
III) Пусть $\beta_1 = \sqrt{1 - \dfrac{J_1(J_2 - J_3)}{J_3(J_2 - J_1)}\beta_3^2},\ \beta_2 = \beta_3\sqrt{\dfrac{J_2(J_1 - J_3)}{J_3(J_2 - J_1)}},\ \beta_3 = 0.1,$

$$\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = \frac{-J_2\beta_3}{\sqrt{J_2^2\beta_3^2 + J_3^2\beta_2^2}},\ \ \alpha_3 = \frac{J_3\beta_2}{\sqrt{J_2^2\beta_3^2 + J_3^2\beta_2^2}},$$

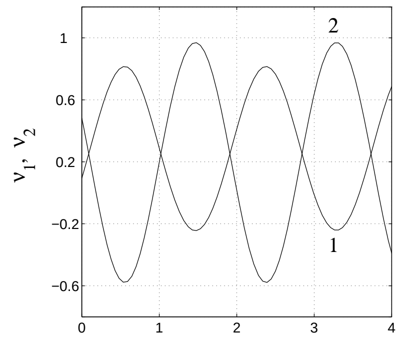
$$J_1 = 3,\ J_2 = 2,\ J_3 = 4,\ \ e_1 = 0,\ e_2 = \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}},\ e_3 = \frac{-\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}},$$

$$\tau_0 = 10,\ \ c_0 = -2,\ \ K_0 = 0,\ \ \nu_0 = 0.4.$$

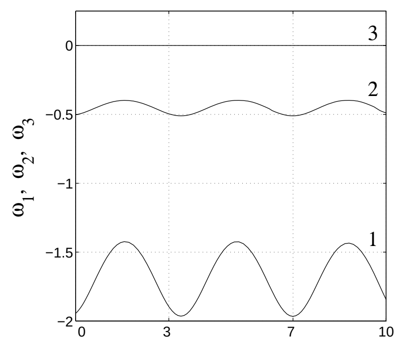
На рис. 1 $\partial), e)$ приведены графики функций $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ и $\nu_1(t), \nu_2(t)$.



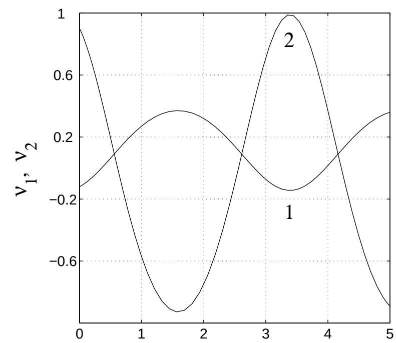
а) $\boldsymbol{\omega}(t)$ *в случае I*



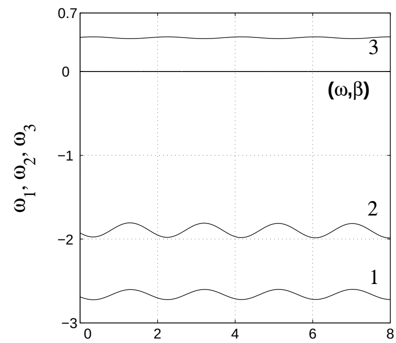
б) $\nu_1(t), \nu_2(t)$ *в случае I*



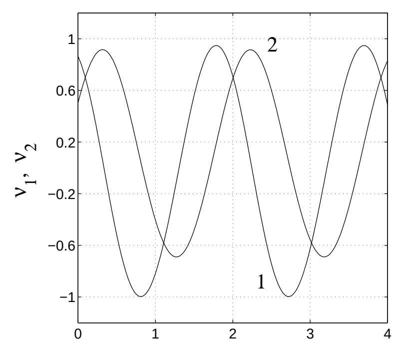
в) $\boldsymbol{\omega}(t)$ *в случае II*



г) $\nu_1(t), \nu_2(t)$ *в случае II*



д) $\boldsymbol{\omega}(t)$ *в случае III*



е) $\nu_1(t), \nu_2(t)$ *в случае III*

Рис. 1. Зависимость $\boldsymbol{\omega}$ *и* ν_1, ν_2 *от времени.*

Поскольку λ – линейная комбинация $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e})$ и $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\beta})$, а значит, и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, то в указанных случаях функция $\lambda(t)$ также будет ограниченной.

Заключение. Таким образом, задача о движении *уравновешенного* гиростата в случае, когда проекция угловой скорости на некоторую фиксированную в подвижном пространстве плоскость остается постоянной, решена полностью. Для *тяжелого* гиростата проведен полный анализ при дополнительном предположении $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{const}$; выписаны точные решения 1)–3) уравнений движения. Решения I)–III) с подобными свойствами найдены и в задаче только с одним инвариантным соотношением $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}) = 0$.

1. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел// Механика твердого тела – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
2. *Харламов П.В.* Гіростати // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 37-40.
3. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата// Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5 – С. 825–826.
4. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом// Механика твердого тела. – 2009. – **39**. – С. 42–49.
5. *Стеклов В.А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку// Тр. отд. физ. наук О–ва любителей естествознания. – 1896. – **8**, вып. 2. – С. 19–21.
6. *Бобылев Д.К.* Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки// Там же. – С. 21–25.
7. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд–во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
8. *Скрыпник С.В.* Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики// Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
9. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела// Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 3. – С. 567–572.

O.S. Volkova

On gyrostat motions characterized by linear in angular velocity invariant relations

The paper concerns a motion of a nonautonomous gyrostat with fixed point in the gravity field under the assumption that the direction of variable gyrostatic momentum is fixed in the rotating frame. For the balanced gyrostat it is shown that motions characterized by two linear invariant relations represent rotations about a permanent axis. The exact solutions of the motion equations are obtained for a heavy gyrostat in the case of one or two linear in angular velocity invariant relations.

Keywords: *gyrostat with fixed point, variable gyrostatic momentum, linear invariant relation.*

О.С. Волкова

Рухи гіростата, що характеризуються лінійними за компонентами кутової швидкості інваріантними співвідношеннями

Вивчається рух гіростата з нерухомою точкою в полі сили тяжіння. Припускається, що напрямок змінного гіростатичного моменту фіксовано у пов'язаному із корпусом гіростата базисі. Показано, що для зрівноваженого гіростата клас рухів, які характеризуються двома лінійними інваріантними співвідношеннями, вичерпується рухами з перманентною віссю обертання. Для важкого гіростата отримано нові сім'ї рухів з одним або двома лінійними інваріантними співвідношеннями рівнянь руху.

Ключові слова: *гіростат з нерухомою точкою, змінний гіростатичний момент, лінійне инваріантне співвідношення.*

Ин-т прикл. математики и механики НАНУ, Донецк
volkova@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 14.04.11