ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2011. Вып. 41

УДК 531.38

©2011. **И.Н. Гашененко, Д.Н. Ткаченко**

СТЕПЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

Методами степенной геометрии [1] вычислены степенные разложения решений уравнений движения тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки. При этом предполагается, что постоянный вектор гиростатического момента направлен вдоль одной из главных осей инерции, которой принадлежит центр масс гиростата. Получены условия существования степенных асимптотик решений в тех случаях, когда независимая переменная стремится к нулю и к бесконечности. Построено 22 семейства степенных разложений и изучены их свойства.

Ключевые слова: *динамика твердого тела, гиростат, степенная геометрия, асимптотические разложения, степенные асимптотики.*

Введение. Движение тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mu(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость теланосителя в подвижных осях, $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$ – момент количества движения гиростата относительно неподвижной точки, $\boldsymbol{\gamma}$ – орт вертикали, $\boldsymbol{\lambda}$ – постоянный гиростатический момент, μ – вес гиростата, $\mathbf{r}$ – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс гиростата. Уравнения (1) допускают три первых интеграла:

$$H \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2} A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mu\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} = h, \quad G \overset{\mathrm{def}}{=} (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = g, \quad I \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1. \tag{2}$$

В 1963 г. П.В. Харламов показал, что при ограничениях

$$A_2 \neq A_3, \ \ \mathbf{r} = (r_1, 0, 0), \ \ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$$

уравнения (1) могут быть записаны в виде системы уравнений Н. Ковалевского [2]:

$$\begin{aligned} f_1 &\overset{\mathrm{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_1 + a_2\sigma + (a_3 p + a_0)\tau' + a_4\tau + a_5 p^2 + 2a_0 p = 0, \\ f_2 &\overset{\mathrm{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + b_1 + b_2\sigma + (b_3 p - b_0)\sigma' + b_4\tau + b_5 p^2 + 2b_0 p = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $p \equiv \omega_1$ – независимая переменная, зависимыми переменными являются

$$\sigma = \frac{(A_2 - A_3)\,\omega_2^2}{A_1}, \ \tau = \frac{(A_2 - A_3)\,\omega_3^2}{A_1},$$

постоянные a_i, b_i – рациональные функции параметров $A_1, A_2, A_3, r_1, \lambda_1$, констант энергии h и площадей g.

Система (3) имеет два первых интеграла, которые следуют из (2):

$$\begin{aligned} f_3 &\overset{\text{def}}{=} \tau\,\sigma' - \sigma\tau' + c_0 + (a_1 - b_1)p - (b_3 p - b_0)\sigma + (a_3 p + a_0)\tau + \\ &\quad + \frac{1}{3}(a_5 - b_5)p^3 + (a_0 - b_0)p^2 = 0, \\ f_4 &\overset{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + \sigma(\tau')^2 + d_0 + (d_2 p + d_3)\tau\sigma' + d_4\sigma^2 + (d_5 p + d_6)\sigma\tau' + \\ &\quad + (d_7\tau + d_8 p^2 + d_9 p + d_{10})\sigma + d_{11}\tau^2 + (d_{12}p^2 + d_{13}p + d_{14})\tau + \\ &\quad + d_{15}p^4 + d_{16}p^2 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

В системе уравнений (3) и интегралов (4) сделаем замену

$$x = A_1/A_3,\ \ y = A_2/A_3,\ \ z = h/A_3,\ \ \eta = \lambda_1/A_3,\ \ l = g/A_3,\ \ \xi = \mu r_1/A_3,$$

тогда коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i примут вид

$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{\eta}{y},\ a_1 = -\frac{z}{y},\ a_2 = \frac{x}{y-1},\ a_3 = \frac{x-2}{y},\ a_4 = \frac{2xy + 2 - x - 2y}{(y-1)\,y}, \\ &a_5 = \frac{3x - 2y}{y},\ b_0 = \eta,\ b_1 = -z,\ b_2 = \frac{2y^2 + 2x - 2y - xy}{y-1},\ b_3 = 2y - x, \\ &b_4 = \frac{x}{y-1},\ b_5 = 3x - 2,\ c_0 = \frac{(z\eta - 2l\xi)(y-1)}{xy},\ d_0 = \frac{(z^2 - 4\xi^2)(y-1)}{x}, \\ &d_1 = y^2,\ d_2 = 4(x-1)y,\ d_3 = 4y\eta,\ d_4 = \frac{y^2 x}{y-1},\ d_5 = 4(y-x),\ d_6 = -4\eta, \\ &d_7 = \frac{2xy}{y-1},\ d_8 = 2(2x^2 - 3xy + 2y^2),\ d_9 = 8\eta(x-y),\ d_{10} = 2(2\eta^2 - yz), \\ &d_{11} = \frac{x}{y-1},\ d_{12} = 2(2x^2 - 3x + 2),\ d_{13} = 8\eta(x-1),\ d_{14} = 2(2\eta^2 - z), \\ &d_{15} = (y-1)x,\ d_{16} = 2(1-y)z. \end{aligned} \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения (3), (4) имеют симметрию

$$(p, \sigma, \tau, x, y, z, l, \xi) \to \left(\bar{p}, -\bar{\tau}, -\bar{\sigma}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \frac{1}{\bar{y}}, \frac{\bar{z}}{\bar{y}}, \frac{\bar{l}}{\bar{y}}, \frac{\bar{\xi}}{\bar{y}}\right). \tag{6}$$

В изучении уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки успехи традиционно связываются с нахождением интегрируемых случаев и частных решений. П.В. Харламов в работе [3] исследовал условия существования полиномиальных решений уравнений (3) и нашел два новых решения, которые обобщают решения В.А. Стеклова и Н. Ковалевского. Новые возможности изучения уравнений динамики твердого тела дает степенная геометрия. К настоящему времени она систематически применялась для изучения уравнений Н. Ковалевского. Разработанные А.Д. Брюно [1] общие методы и алгоритмы степенной геометрии получили успешное применение в вычислениях степенных, степенно-логарифмических и более сложных разложений решений систем дифференциальных уравнений вида (3). Ранее в работах А.Д. Брюно, В.В. Лунева, И.Н. Гашененко, А.Б. Арансона при отсутствии гиростатического момента ($\boldsymbol{\lambda} = 0$) были вычислены все степенные асимптотики и степенные разложения этой системы в случаях, когда независимая переменная p стремилась к нулю, к бесконечности и к отличной от нуля и бесконечности константе [5, 6]. Более того, в [7, 8] были найдены все точные решения системы Н. Ковалевского, представляемые конечными суммами рациональных степеней переменной p. Теперь появилась возможность получить аналогичные результаты и для уравнений (3), описывающих движение гиростата.

Цель работы – для решений $\sigma(p)$, $\tau(p)$ системы уравнений (3) в случае общего положения при $p \to 0$ и при $p \to \infty$ найти: а) все степенные асимптотики $\sigma = \sigma_0 p^\alpha$, $\tau = \tau_0 p^\beta$, $\sigma_0, \tau_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$; б) все степенные разложения вида

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \sum_s \sigma_s\, p^{\alpha+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s\, p^{\beta+s},$$

где $\alpha, \beta, s \in \mathbb{C}$, значения s не имеют точек накопления на $\mathbb{C}$, постоянные коэффициенты $\sigma_s, \tau_s \in \mathbb{C}$, $\sigma_0\tau_0 \neq 0$.

1. Разложения решений системы (3) **при** $p \to 0$**.** В случае $p \to 0$ или $p \to \infty$ решения вида $\sigma = \sigma_0 p^\alpha + ...$, $\tau = \tau_0 p^\beta + ...$ имеют асимптотики

$$\sigma = \sigma_0 t^{\omega\alpha} + ..., \quad \tau = \tau_0 t^{\omega\beta} + ..., \quad p = t^\omega, \ \ t \to \infty,$$

где $\omega = -1$, если $p \to 0$ и $\omega = +1$, если $p \to \infty$. Поэтому степенным решениям системы (3) соответствуют значения показателей $P \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2, p_3) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega\alpha, \omega\beta, \omega)$ их асимптотик на плоскости $p_3 = -1$ (если $p \to 0$) и $p_3 = +1$ (если $p \to \infty$).

1°. Вычислим семейство $\mathcal{F}_1(P)$ для $P = -(0, 1, 1)$. Пусть $c_0 \neq 0$, тогда укороченная система уравнений и интегралов имеет вид

$$\widetilde{f}_{1,1} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \tfrac{1}{2}\sigma'\tau' = 0, \quad \widetilde{f}_{2,1} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \tfrac{1}{2}\sigma'\tau' - b_0\sigma' = 0, \tag{7}$$

$$\widetilde{f}_{3,1} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\,\sigma' - \sigma\tau' + c_0 + b_0\sigma = 0, \qquad \widetilde{f}_{4,1} \stackrel{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 = 0. \tag{8}$$

Соответствующие укороченные решения

$$\sigma = \sigma_0, \quad \tau = \tau_0 p \tag{9}$$

являются решениями системы (7), (8). Подстановка (9) в уравнения (7),(8) дает тождества для $\widetilde{f}_{1,1}$, $\widetilde{f}_{2,1}$, $\widetilde{f}_{4,1}$, а из $\widetilde{f}_{3,1}$ получим условие на параметры $b_0\sigma_0 + c_0 - \sigma_0\tau_0 = 0$, позволяющее выразить константу одного из первых интегралов, например, $l = (\eta - \tau_0)xy\sigma_0/(2(y-1)\xi) + z\eta/(2\xi)$.

Для вычисления остальных членов разложения будем использовать систему двух независимых уравнений. Подставим первые члены разложения (6) в матрицу производных Фреше для двух уравнений укороченной системы (7) и умножим результат справа на диагональную матрицу $\mathrm{diag}[p^{s+\omega\alpha}, p^{s+\omega\beta}]$, а слева – на диагональную матрицу $\mathrm{diag}[p^{-s-\omega g_1}, p^{-s-\omega g_2}]$, где степени g_1, g_2 вычисляются по формулам [1]. В результате получим характеристическую матрицу $\mathcal{N}(s)$:

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} s(2s-1)\tau_0/2 & 0 \\ s(\tau_0 - 2b_0)/2 & s(s+1)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Определитель $\nu(s) = \det \mathcal{N}(s)$ – характеристический полином укороченной системы, корни

$$s_1 = -1, \;\; s_2 = s_3 = 0, \;\; s_4 = \frac{1}{2}$$

уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами степенной асимптотики (9). Напомним [1], что собственное число s_i называется критическим, если $\omega \mathrm{Re} s_i < 0$. В рассматриваемом случае $s_4 = 1/2$ является критическим. Решения полной системы (3) разлагаются по возрастающим степеням p :

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \, p^{\frac{k}{2}}, \;\; \tau = \tau_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \, p^{\frac{2+k}{2}}, \tag{10}$$

где коэффициенты $\sigma_0, \tau_0, \sigma_1$– произвольны,

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1(2\eta - \tau_0)}{3\sigma_0}, \quad \sigma_2 = \frac{2z}{y\tau_0} + \frac{(\tau_0 - 2\eta)}{12\tau_0\sigma_0}\sigma_1^2 - \frac{2\eta}{y} - \frac{2x\sigma_0}{(y-1)\tau_0},$$

$$\tau_2 = \frac{x}{2} - y + \frac{[\tau_0(y-1) + 2\eta]z}{2\sigma_0\tau_0 y} - \frac{(\eta + 4\tau_0)(2\eta - \tau_0)\sigma_1^2}{24\tau_0\sigma_0^2} - \frac{x\eta}{(y-1)\tau_0} - \frac{(2\eta - \tau_0)\eta}{2y\sigma_0}.$$

Константа z удовлетворяет уравнению $y^2x(y-1)\tau_0\sigma_1^2 + 4(y-1)^2(z^2 - 4\xi^2) - 8y\sigma_0 x(y-1)z + 4y^2x^2\sigma_0^2 + 4x(2\eta - \tau_0)^2(y-1)\sigma_0 = 0$. Кроме того, произвольными параметрами разложения (10) являются x, y, η. Разложения (10) с шагом $\triangle = 1$ представляют двухпараметрическое (по σ_0, τ_0) семейство решений, аналитических по p.

Если $c_0 = d_0 = 0$, то из полученных общих формул следуют равенства

$$z = 2\xi, \quad l = \eta, \quad \tau_0 = \eta, \quad \eta y^2(y-1)\sigma_1^2 + 4y^2x\sigma_0^2 + 4(y-1)(\eta^2 - 4y\xi)\sigma_0 = 0.$$

В этом случае решения образуют однопараметрическое семейство с параметром σ_0.

Семейство разложений (10) обозначим через $\mathcal{F}_1$.

2°. Точке $P = (0, 0, -1)$ соответствуют укорочения

$$\widetilde{f}_{1,3} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau\sigma'' + \tfrac{1}{2}\sigma'\tau' = 0, \quad \widetilde{f}_{2,3} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma\tau'' + \tfrac{1}{2}\sigma'\tau' = 0, \tag{11}$$
$$\widetilde{f}_{3,3} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau\,\sigma' - \sigma\tau' = 0, \qquad \widetilde{f}_{4,3} \stackrel{\mathrm{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + \sigma(\tau')^2 = 0.$$

Решение системы (11) есть

$$\sigma = \sigma_0 \neq 0, \quad \tau = \tau_0 \neq 0. \tag{12}$$

Характеристическая матрица первых двух уравнений (11) записывается в виде

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} s(s-1)\tau_0 & 0 \\ 0 & s(s-1)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Как и в случае $\eta = 0$, рассматриваемая система (3), (4) имеет четырехпараметрическое (по $\sigma_0, \tau_0, \sigma_1, \tau_1$) семейство $\mathcal{F}_3$ аналитических решений вида

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k\, p^k, \qquad \tau = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k\, p^k. \tag{13}$$

Значения констант первых интегралов (2) определены формулами

$$l = \frac{\eta z}{2\xi} + \frac{(y\sigma_0 + \tau_0)x\eta}{2\xi(y-1)} + \frac{(\sigma_1\tau_0 - \sigma_0\tau_1)xy}{2\xi(y-1)},$$

$$(y-1)^2(z^2 - 4\xi^2) - 2x(y-1)(y\sigma_0 + \tau_0)z +$$
$$+4x(\tau_0 + \sigma_0)(y-1)\eta^2 + 4x(y-1)(\sigma_1\tau_0 y - \sigma_0\tau_1)\eta +$$
$$x(\sigma_0\tau_1^2 y + 2xy\tau_0\sigma_0 + x\tau_0^2 - \sigma_0\tau_1^2 - y^2\sigma_1^2\tau_0 + xy^2\sigma_0^2 + y^3\sigma_1^2\tau_0) = 0.$$

3°. Для $P = -(2/3, 2/3, 1)$ найдем семейство $\mathcal{F}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(P)$, которое существует только при $c_0 = 0$. Укороченная система уравнений имеет вид

$$\widetilde{f}_{1,4} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \tfrac{1}{2}\sigma'\tau' = 0, \qquad \widetilde{f}_{2,4} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \tfrac{1}{2}\sigma'\tau' = 0, \tag{14}$$
$$\widetilde{f}_{3,4} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\,\sigma' - \sigma\tau' = 0, \qquad \widetilde{f}_{4,4} \stackrel{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + \sigma(\tau')^2 + d_0 = 0.$$

На укороченном решении

$$\sigma = \sigma_0 p^{2/3}, \quad \tau = \tau_0 p^{2/3} \tag{15}$$

для степенных разложений по возрастающим степеням p получаем матрицу

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} s(s+2/3)\tau_0 & s\sigma_0/3 \\ s\tau_0/3 & s(s+2/3)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственные числа s_i в этом случае неположительны (см. таблицу). Решения системы (3) допускают разложение вида

$$\sigma = \sigma_0 p^{2/3} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\, p^{\frac{2+k}{3}}, \;\; \tau = \tau_0 p^{2/3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k\, p^{\frac{2+k}{3}}, \tag{16}$$

где начальные коэффициенты таковы: σ_0, τ_0- произвольны,

$$\tau_1 = 3\eta(\tau_0 + 3y\sigma_0)/(4y\sigma_0), \quad \sigma_1 = -3\eta(y\sigma_0 + 3\tau_0)/(4\tau_0 y),$$

$$\tau_2 = 3(4y-1)z/(10y\sigma_0) + 9\eta^2(5\tau_0 - y\sigma_0)(7\tau_0 + 5y\sigma_0)/(320y^2\sigma_0^2\tau_0),$$

$$\sigma_2 = 3(4-y)z/(10y\tau_0) - 9\eta^2(\tau_0 - 5y\sigma_0)(5\tau_0 + 7y\sigma_0)/(320y^2\tau_0^2\sigma_0).$$

При этом интегралы (2) дают соотношения

$$l = z\eta/(2\xi), \quad 9(y-1)(z^2 - 4\xi^2) + 4x\tau_0\sigma_0(y^2\sigma_0 + \tau_0) = 0.$$

Таблица. Собственные числа степенных асимптотик

k	α	β	ω	s_1	s_2	s_3	s_4
1	0	1	-1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$
3	0	0	-1	0	0	1	1
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1	-1	$-\frac{1}{3}$	0	0
5	0	3	-1	-3	-2	0	0
7	0	2	-1	-3	-2	$-2-\sqrt{\varphi_1}$	$-2+\sqrt{\varphi_1}$
9	0	$\frac{4}{3}$	-1	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
11	$\frac{1}{2}$	1	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
13	1	1	-1	$-\frac{1}{2}-\sqrt{\varphi_3}$	$-\frac{1}{2}+\sqrt{\varphi_3}$	-1	-1
14	α_0	2	1	$-2+\frac{\alpha}{2}$	0	$-1-\alpha$	-2α
16	2	$\frac{y}{y-1}$	1	$\frac{3}{2}\beta-2$	0	$-\beta$	-2β
18	2	$\frac{y}{y-1}$	1	0	0	$2-\frac{5}{2}\beta$	-2β
20	2	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1-2y}{y-1}$
22	2	2	1	$-\frac{1}{2}+\sqrt{\varphi_4}$	$-\frac{1}{2}-\sqrt{\varphi_4}$	-3	-4

4°. Исследуем множество точек $P = -(0, \beta, 1)$, $\beta > 2$, тогда укороченные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &\widetilde{f}_{1,5} \stackrel{\text{def}}{=} a_2\sigma + a_1 = 0, \qquad \widetilde{f}_{2,5} \stackrel{\text{def}}{=} -b_0\sigma' = 0, \\ &\widetilde{f}_{3,5} \stackrel{\text{def}}{=} b_0\sigma + c_0 = 0, \qquad \widetilde{f}_{4,5} \stackrel{\text{def}}{=} d_4\sigma^2 + d_{10}\sigma + d_0 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Ищем решение системы уравнений (17) в виде

$$\sigma = \sigma_0, \quad \tau = \tau_0 p^\beta, \quad \beta > 2,$$

непосредственной подстановкой в (17) находим выражения

$$\sigma_0 = \frac{(y-1)\xi^2}{x\eta^2}, \ \ z = \frac{y\xi^2}{\eta^2}, \ \ l = \frac{\xi y}{\eta}. \tag{18}$$

Для вычисления следующих членов разложения введем новую переменную $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0$. В соответствии с алгоритмами степенной геометрии запишем уравнения $f_i(\widetilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1,4}$, и исследуем степенные разложения решений этих уравнений. Анализ всех возможных вариантов сводится к изучению разложений для множества точек $P_1 = -(1, \beta, 1)$, $\beta > 2$, когда укороченная система

$$\begin{gathered}\widetilde{\widetilde{f}}_{1,5} \stackrel{\text{def}}{=} a_2\widetilde{\sigma} + 2a_0 p = 0, \quad \widetilde{\widetilde{f}}_{2,5} \stackrel{\text{def}}{=} -b_0\widetilde{\sigma}' + b_2\sigma_0 + b_1 = 0,\\ \widetilde{\widetilde{f}}_{3,5} \stackrel{\text{def}}{=} b_0\widetilde{\sigma} + (a_1 - b_1 - b_3\sigma_0)p = 0, \ \ \widetilde{\widetilde{f}}_{4,5} \stackrel{\text{def}}{=} (d_{10} + 2d_4\sigma_0)\widetilde{\sigma} + d_9\sigma_0 p = 0\end{gathered} \tag{19}$$

имеет решение

$$\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}_0 p, \quad \tau = \tau_0 p^\beta, \quad \beta > 2.$$

Это возможно только при условиях

$$\widetilde{\sigma}_0 = 2(1-y)\eta/x/y, \quad \xi^2 y(x-y) - \eta^4 = 0. \tag{20}$$

Из второго соотношения (20) следует важное ограничение $x > y$ $(A_1 > A_2)$, которое существенно упрощает дальнейшее исследование. В частности, доказано, что $\beta = 3$ и разложения решений системы (3) следует искать в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \widetilde{\sigma}_0 p + \sum_s \sigma_s\, p^{1+s}, \ \ \tau = \tau_0 p^3 + \sum_s \tau_s\, p^{3+s}.$$

Для этого случая вычислим все степенные разложения и объединим их в семейство $\mathcal{F}_5 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(-(0,3,1))$:

$$\sigma = \sigma_0 + \widetilde{\sigma}_0 p + \widetilde{\widetilde{\sigma}}_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\, p^{2+k}, \ \ \tau = \tau_0 p^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k\, p^{3+k}, \tag{21}$$

где

$$\tau_0 = -\frac{2(x-y)^2 x}{((x-y)^2 + 2x - y)\eta}, \ \ \widetilde{\widetilde{\sigma}}_0 = \frac{(1-y)(4y-3x)}{xy} + \frac{6(1-y)(x-y)}{((x-y)^2 + 2x - y)y}.$$

Корни $s_1 = -3$, $s_2 = -2$ уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами рассматриваемой асимптотики.

5°. Уравнениям (3), (4) в точке $P = -(0, 2, 1)$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{gathered}\widetilde{f}_{1,7} \stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_1 + a_2\sigma = 0, \qquad \widetilde{f}_{2,7} \stackrel{\text{def}}{=} -b_0\sigma' = 0,\\ \widetilde{f}_{3,7} \stackrel{\text{def}}{=} b_0\sigma + c_0 = 0, \ \ \widetilde{f}_{4,7} \stackrel{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + d_4\sigma^2 + d_{10}\sigma + d_0 = 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Система (22) при выполнении условий

$$\sigma_0 = \frac{(y-1)\xi^2}{x\eta^2}, \quad l = \frac{y\xi}{\eta}, \quad z = \frac{y\xi^2}{\eta^2} \tag{23}$$

имеет степенное решение $\sigma = \sigma_0, \quad \tau = \tau_0 p^2$.

Введем новые переменные $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0, \widetilde{\tau} = \tau - \tau_0 p^2$ и запишем преобразованные уравнения $f_i(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, p) = 0,\ i = \overline{1,4}$. Для этих уравнений исследуем возможность существования степенных решений с асимптотикой $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}_0 p^\alpha, \quad \tau = \widetilde{\tau}_0 p^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 2$. Подстановкой асимптотик в уравнение $f_2(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, p) = 0$ получим с учетом $\eta \neq 0$ важное ограничение $\alpha \geq 1$.

Если $\tau_0 \neq -1$, то для множества точек $P_1 = -(1, \beta, 1), \quad \beta > 2$, укороченная система преобразованных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\widetilde{f}}_{1,7} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_0 p^2\, \widetilde{\sigma}'' + \tau_0 p\, \widetilde{\sigma}' + a_2 \widetilde{\sigma} + 2a_0(1+\tau_0)p = 0,\\
&\widetilde{\widetilde{f}}_{2,7} \stackrel{\text{def}}{=} -b_0 \widetilde{\sigma}' + b_1 + (b_2 + 2\tau_0)\sigma_0 = 0,\\
&\widetilde{\widetilde{f}}_{3,7} \stackrel{\text{def}}{=} b_0 \widetilde{\sigma} + [a_1 - b_1 - (b_3 + 2\tau_0)\sigma_0]p = 0,\\
&\widetilde{\widetilde{f}}_{4,7} \stackrel{\text{def}}{=} (d_{10} + 2d_4\sigma_0)\widetilde{\sigma} + (d_9 + 2d_6\tau_0)\sigma_0 p = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Подставим в (24) укороченное решение $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}_0 p,\ \widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}_0 p^\beta$, найдем выражения

$$\widetilde{\sigma}_0 = \frac{2(1-y)(\tau_0+1)\eta}{(y\tau_0 - \tau_0 + x)y}, \quad \eta^4 = \frac{(y\tau_0 - \tau_0 + x)(x - y - \tau_0)\xi^2 y}{(\tau_0+1)x}.$$

Разложения из $\mathcal{F}_7$ могут быть различных видов, подробное описание этого семейства степенных разложений будет выполнено в отдельной работе. В частности, семейству $\mathcal{F}_7$ принадлежат разложения вида

$$\sigma = \sigma_0 + \widetilde{\sigma}_0 p + \widetilde{\widetilde{\sigma}}_0 p^2 + \sum_s \sigma_s\, p^{2+s}, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \widetilde{\tau}_0 p^3 + \sum_s \tau_s\, p^{3+s}, \quad s > 0. \tag{25}$$

Собственными числами в этом случае являются $s_1 = -3,\ s_2 = -2$,

$$s_3 = -2 - \sqrt{\varphi_1},\ s_4 = -2 + \sqrt{\varphi_1},\ \varphi_1 = -1/\tau_0 - (x+1-y)^2/[\tau_0(\tau_0+1)(y-1)].$$

Если $x + 1 - y = 0,\ \tau_0 = -1$, то в (25) следует положить $\widetilde{\sigma}_0 = 0$, а выражение φ_1 преобразуется к виду $\varphi_1 = 1 + \eta^4/(\xi^2 y) > 0$.

6°. Для изучения степенных разложений, соответствующих множеству точек $P = -(0, \beta, 1), \quad \beta \in (1, 2)$, также следует ввести новую переменную $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0$, где $\sigma_0 = -c_0/b_0$. Дальнейший анализ всех возможных вариантов сводится к изучению разложений системы $f_i(\widetilde{\sigma}, \tau, p) = 0,\ i = \overline{1,4}$, для одной точки $P_1 = -(1/3, 4/3, 1)$. Тогда укороченная система примет вид

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\widetilde{f}}_{1,9} \stackrel{\text{def}}{=} \tau \widetilde{\sigma}'' + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}'\tau' = 0, \quad \widetilde{\widetilde{f}}_{2,9} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 \tau'' - b_0 \widetilde{\sigma}' = 0,\\
&\widetilde{\widetilde{f}}_{3,9} \stackrel{\text{def}}{=} b_0 \widetilde{\sigma} - \sigma_0 \tau' = 0, \quad \widetilde{\widetilde{f}}_{4,9} \stackrel{\text{def}}{=} d_1 \tau (\widetilde{\sigma}')^2 + d_0 + d_{10}\sigma_0 + d_4 \sigma_0^2 = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Подставим в (26) укороченное решение $\widetilde{\sigma}=\widetilde{\sigma}_0 p^{1/3}$, $\tau=\tau_0 p^{4/3}$, получим соотношения

$$3b_0\widetilde{\sigma}_0-4\tau_0\sigma_0=0,\quad d_1\widetilde{\sigma}_0^2\tau_0+9(d_4\sigma_0^2+d_{10}\sigma_0+d_0),$$

из которых с учетом $\sigma_0=-c_0/b_0$ следуют выражения констант l,z,σ_0 через независимые параметры $\widetilde{\sigma}_0,\tau_0$.

Характеристическую матрицу первых двух уравнений (26) запишем в виде

$$\mathcal{N}(s)=\begin{pmatrix} s(s+1/3)\tau_0 & s\widetilde{\sigma}_0/6\\ -\eta(s+1/3) & (s+4/3)(s+1/3)\sigma_0\end{pmatrix}.$$

Корни $s_1=-1$, $s_2=-2/3$, $s_3=-1/3$, $s_4=0$ уравнения $\nu(s)=0$ являются собственными числами рассматриваемой асимптотики. Итак, решения системы (3) допускают разложение с шагом $\triangle=1/3:$

$$\sigma=\sigma_0+\widetilde{\sigma}_0p^{1/3}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\,p^{\frac{1+k}{3}},\;\;\tau=\tau_0p^{4/3}+\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\,p^{\frac{4+k}{3}}.\tag{27}$$

Полученное двухпараметрическое (по $\widetilde{\sigma}_0,\tau_0$) семейство разложений (27) обозначим через $\mathcal{F}_9$.

7°. Для точки $P=-(1/2,1,1)$ найдем семейство $\mathcal{F}_{11}\stackrel{\rm def}{=}\mathcal{F}(P)$, которое существует только при $c_0=0$. Укороченная система уравнений имеет вид

$$\widetilde{f}_{1,11}\stackrel{\rm def}{=}\tau\sigma''+\tfrac{1}{2}\sigma'\tau'=0,\qquad \widetilde{f}_{2,11}\stackrel{\rm def}{=}\sigma\tau''+\tfrac{1}{2}\sigma'\tau'-b_0\sigma'=0,\tag{28}$$
$$\widetilde{f}_{3,11}\stackrel{\rm def}{=}\tau\,\sigma'-\sigma\tau'+b_0\sigma=0,\qquad \widetilde{f}_{4,11}\stackrel{\rm def}{=}d_1\tau(\sigma')^2+d_0=0.$$

На укороченном решении

$$\sigma=\sigma_0p^{1/2},\quad \tau=\tau_0p\tag{29}$$

для степенных разложений по возрастающим степеням p получим матрицу

$$\mathcal{N}(s)=\begin{pmatrix} s(s+1/2)\tau_0 & s\sigma_0/4\\ 0 & (s+1)(s+1/4)\sigma_0\end{pmatrix}.$$

Собственные числа s_i в этом случае неположительны. Решения системы (3) допускают однопараметрическое семейство разложений вида

$$\sigma=\sigma_0p^{1/2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\,p^{\frac{1+k}{2}},\;\;\tau=\tau_0p+\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\,p^{\frac{2+k}{2}},\tag{30}$$

где σ_0- произвольная постоянная,

$$\tau_0=2\eta,\quad \sigma_1=(9z-yz-18\eta^2)/(9y\eta),\quad \tau_1=8z/(9\sigma_0).$$

Из интегралов (2) найдем соотношения

$$l = z\eta/(2\xi), \quad xy^2\eta\sigma_0^2 + 2(4\xi^2 - z^2)(1-y) = 0.$$

8°. Наконец, положим $c_0 = d_0 = 0$. Только точка $P = -(1,1,1)$ не была рассмотрена нами ранее. Вычислим соответствующее семейство $\mathcal{F}_{13} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}(P)$. Укороченная система уравнений и интегралов имеет вид

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_{1,13} \overset{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_0\tau' + a_1 = 0,\\
&\widetilde{f}_{2,13} \overset{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' - b_0\sigma' + b_1 = 0,\\
&\widetilde{f}_{3,13} \overset{\text{def}}{=} \tau\,\sigma' - \sigma\tau' + (a_1 - b_1)p + b_0\sigma + a_0\tau = 0,\\
&\widetilde{f}_{4,13} \overset{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + \sigma(\tau')^2 + d_{10}\sigma + d_{14}\tau + d_3\tau\sigma' + d_6\sigma\tau' = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Укороченные решения

$$\sigma = \sigma_0 p, \quad \tau = \tau_0 p \tag{32}$$

являются решениями системы (31). При этом коэффициенты σ_0, τ_0 найдем из уравнений, полученных подстановкой (32) в (31):

$$\tau_0 = 2(\sigma_0\eta + 2\xi)/\sigma_0, \quad (\sigma_0\eta + 2\xi)(y\sigma_0 + 2\eta) - 2\sigma_0\xi = 0.$$

Запишем характеристическую матрицу первых двух уравнений (31):

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} (s+1)(s+1/2)\tau_0 & -a_1(s+1)/\tau_0 \\ (\tau_0/2 - b_0)(s+1) & (s+1)(s+1/2)\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами асимптотики (32) являются

$$s_1 = -1/2 - \sqrt{\varphi_3},\ s_2 = -1/2 + \sqrt{\varphi_3},\ s_3 = s_4 = -1,$$

где $\varphi_3 = (y\sigma_0 + 2\eta)^2/(4y\sigma_0^2) > 0$.

2. Разложения решений системы (3) **при** $p \to \infty$**.** Если для показателей степеней асимптотик принять не ограничивающее общности предположение $\alpha > \beta$, то анализ всех возможных степенных разложений уравнений (3) сводится к изучению трех случаев: *а)* $\alpha > 2, \beta = 2$; *б)* $\alpha = 2, \beta < 2$; *в)* $\alpha = \beta = 2$. Рассмотрим эти случаи.

1°. Вычислим семейство $\mathcal{F}_{14}(P)$ для $P = (\alpha, 2, 1)$, $\alpha > 2$. Тогда укороченная система уравнений и интегралов имеет вид

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_{1,14} \overset{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_2\sigma = 0, \quad \widetilde{f}_{2,14} \overset{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + b_2\sigma + b_3 p\sigma' = 0,\\
&\widetilde{f}_{3,14} \overset{\text{def}}{=} \tau\,\sigma' - \sigma\tau' - b_3 p\sigma = 0, \quad \widetilde{f}_{4,14} \overset{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + d_4\sigma^2 = 0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Укороченные решения
$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha, \quad \tau = \tau_0 p^2 \tag{34}$$
являются решениями системы (33). Подстановкой (34) в уравнения (33) найдем соотношения
$$(y-1)\tau_0\alpha^2 + x = 0, \;\; (\alpha-2)\tau_0 + x - 2y = 0,$$
$$[y-2+(y-1)\alpha]x + (1-y)[2y(1+\alpha)+(\alpha+2)\tau_0] = 0,$$
позволяющие выразить τ_0, α через x, y :
$$\tau_0 = \frac{2y-x}{\alpha-2}, \;\; \alpha = \alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x \pm \sqrt{\varphi_2}}{2(y-1)(x-2y)}, \;\; \varphi_2 = x(16y^2 - 8xy + 9x - 16y). \tag{35}$$
Полученные формулы имеют тот же вид, что и для семейства $\mathcal{F}_9$ степенных асимптотик решений уравнений Н. Ковалевского (см. [5]).

Корни $s_1 = -2 + \alpha/2$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1 - \alpha$, $s_4 = -2\alpha$ уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами асимптотики (34). Детальное исследование этого семейства степенных разложений можно найти в работе [10, §6].

2°. Найдем условия существования степенных разложений, соответствующих множеству точек $P = (2, \beta, 1)$, $\beta < 2$. Для этого запишем укороченную систему дифференциальных уравнений
$$\begin{aligned} &\widetilde{f}_{1,16} \stackrel{\text{def}}{=} a_2\sigma + a_5 p^2 = 0, \quad \widetilde{f}_{2,16} \stackrel{\text{def}}{=} b_2\sigma + b_3 p\sigma' + b_5 p^2 = 0, \\ &\widetilde{f}_{3,16} \stackrel{\text{def}}{=} -b_3 p\,\sigma + \frac{1}{3}(a_5 - b_5)p^3 = 0, \;\; \widetilde{f}_{4,16} \stackrel{\text{def}}{=} d_4\sigma^2 + d_8 p^2\sigma + d_{15}p^4 = 0. \end{aligned} \tag{36}$$
Асимптотики $\sigma = \sigma_0 p^2$, $\tau = \tau_0 p^\beta$, $\beta < 2$, являются решениями уравнений (36) только тогда, когда выполнены условия
$$x = y, \quad \sigma_0 = (1-y)/y. \tag{37}$$
Введем новую переменную $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0 p^2$. Преобразуем уравнения (3), (4) к виду $f_i(\widetilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1,4}$, и исследуем степенные разложения решений этих уравнений для множества точек $P_1 = (\alpha, \beta, 1)$, $\alpha < 2, \beta < 2$. Пусть $2 > \beta > \alpha > 1$, тогда укороченная система имеет вид
$$\begin{aligned} &\widetilde{\widetilde{f}}_{1,16} \stackrel{\text{def}}{=} (a_3 + \sigma_0)p\tau' + (a_4 + 2\sigma_0)\tau = 0, \;\; \widetilde{\widetilde{f}}_{2,16} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2\tau'' + \sigma_0 p\tau' + b_4\tau = 0, \\ &\widetilde{\widetilde{f}}_{3,16} \stackrel{\text{def}}{=} -\sigma_0 p^2\tau' + (a_3 + 2\sigma_0)p\tau = 0, \quad \widetilde{\widetilde{f}}_{4,16} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2(\tau')^2 + d_{11}\tau^2 = 0. \end{aligned} \tag{38}$$
Только при условии $\beta = y/(y-1)$ уравнения (38) имеют степенное решение $\tau = \tau_0 p^\beta$. Система (38) не содержит $\widetilde{\sigma}$, поэтому является вырожденной. Найдем линейную комбинацию уравнений $f_i(\widetilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, чтобы получить уравнение, содержащее $\widetilde{\sigma}$. Положим
$$f_5(\widetilde{\sigma}, \tau, p) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(\widetilde{\sigma}, \tau, p)p + \frac{\eta}{y-2}\, f_1(\widetilde{\sigma}, \tau, p) + \frac{1}{y-1}\, f_3(\widetilde{\sigma}, \tau, p) = 0. \tag{39}$$

Тогда точкам $P_2 = (1, y/(y-1), 1)$, $y > 2$, соответствует укороченное уравнение

$$\tilde{\tilde{f}}_{5,16} \stackrel{\mathrm{def}}{=} p\tau\tilde{\sigma}'' + \frac{1}{2}p\tilde{\sigma}'\tau' + \frac{1}{y-1}\tau\tilde{\sigma}' + \frac{(y-3)\eta}{(y-2)y}p\tau' - \frac{1}{y-1}\tilde{\sigma}\tau' + \frac{2\eta}{(y-2)y}\tau = 0,$$

из которого следует $\tilde{\sigma}_0 = -2\eta(y-1)/(y-2)/y$.

Снова в уравнениях (3), (4) введем новую переменную, пусть

$$\tilde{\tilde{\sigma}} = \sigma - \sigma_0 p^2 - \tilde{\sigma}_0 p.$$

Для системы двух укороченных уравнений

$$\begin{aligned} &\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{2,16} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_0 p^2\tau'' + \sigma_0 p\tau' + b_4\tau = 0, \\ &\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{5,16} \stackrel{\mathrm{def}}{=} p\tau\tilde{\tilde{\sigma}}'' + \frac{1}{2}p\tilde{\tilde{\sigma}}'\tau' + \frac{1}{y-1}\tau\tilde{\tilde{\sigma}}' - \frac{1}{y-1}\tilde{\tilde{\sigma}}\tau' - \frac{2\eta^2}{(y-2)^2}p = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

находим условие

$$\tau_0\tilde{\tilde{\sigma}}_0 y(y-4)(y-2)^2 - 4\eta^2(y-1)^2 = 0,$$

при выполнении которого (40) имеет укороченное решение

$$\tilde{\tilde{\sigma}} = \tilde{\tilde{\sigma}}_0 p^{2-\beta}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta, \quad \beta = y/(y-1), \quad y > 2. \tag{41}$$

Для степенных разложений по убывающим степеням p на укороченном решении получим матрицу

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -s(s+2\beta)/\beta \\ (s+\beta)(s+2-3\beta/2)\tau_0 & (4-3\beta)(s+\beta)\tilde{\tilde{\sigma}}_0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с методами степенной геометрии [5], условия существования полученного семейства степенных разложений $\mathcal{F}_{16}$ вида

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \tilde{\sigma}_0 p + \tilde{\tilde{\sigma}}_0 p^{2-\beta} + \sum_s \sigma_s\, p^{2-\beta+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s\, p^{\beta+s}, \quad s < 0,$$

требуют дополнительного уточнения, но на примерах $y = 3, y = 5/2$ несложно показать, что трехпараметрические семейства разложений с шагом $\triangle = 1/2$ и $\triangle = 1/3$ в этом случае существуют.

3°. Найдем новое семейство разложений $\mathcal{F}_{18}$, используя при этом формулы предыдущего пункта, выписанные до уравнений (40). Теперь вместо асимптотики (40) будем искать укороченное решение в виде

$$\tilde{\tilde{\sigma}} = \tilde{\tilde{\sigma}}_0 p^{\beta/2}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta, \quad \beta = y/(y-1), \quad y \in (2, 4). \tag{42}$$

Оно удовлетворяет соответствующей системе укороченных уравнений

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{2,18} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2 \tau'' + \sigma_0 p \tau' + b_4 \tau = 0,\\
&\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{5,18} \stackrel{\text{def}}{=} p\tau \tilde{\tilde{\sigma}}'' + \frac{1}{2} p \tilde{\tilde{\sigma}}' \tau' + \frac{1}{y-1} \tau \tilde{\tilde{\sigma}}' - \frac{1}{y-1} \tilde{\tilde{\sigma}} \tau' = 0.
\end{aligned} \qquad (43)$$

Характеристическая матрица системы (43) имеет вид

$$\mathcal{N}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -s(s+2\beta) \\ s(s-2+5\beta/2)\tau_0 & s(1-3\beta/4)\tilde{\tilde{\sigma}}_0 \end{pmatrix}.$$

Корни $s_1 = 2 - 5\beta/2$, $s_2 = s_3 = 0$, $s_4 = -2\beta$ уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами асимптотики (42). Семейство степенных разложений $\mathcal{F}_{18}$ вида

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \tilde{\sigma}_0 p + \tilde{\tilde{\sigma}}_0 p^{\beta/2} + \sum_s \sigma_s \, p^{\beta/2+s}, \ \ \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s \, p^{\beta+s}, \ \ s < 0,$$

существует для некоторых значений $y \in (2, 4)$, в частности, для $y = 3$ получим четырехпараметрическое семейство разложений с шагом $\triangle = 1/4$.

4°. Продолжим изучение случая, рассмотренного в п. 2°. Пусть выполнены условия (37), тогда введем новую переменную $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0 p^2$ и преобразуем уравнения (3), (4) к виду $f_i(\tilde{\sigma}, \tau, p) = 0$, $i = \overline{1,4}$. Исследуем степенные разложения решений этих уравнений для точки $P_1 = (1, 1, 1)$. Укороченная система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{f}}_{1,20} \stackrel{\text{def}}{=} (a_3 + \sigma_0) p\tau' + (a_4 + 2\sigma_0)\tau + a_2 \tilde{\sigma} + 2a_0 p = 0,\\
&\tilde{\tilde{f}}_{2,20} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2 \tau'' + \sigma_0 p \tau' + b_2 \tilde{\sigma} + b_4 \tau + b_3 p \tilde{\sigma}' + 2b_0(1-\sigma_0) = 0,\\
&\tilde{\tilde{f}}_{3,20} \stackrel{\text{def}}{=} -\sigma_0 p^2 \tau' + (a_3 + 2\sigma_0) p\tau - b_3 p \tilde{\sigma} + [a_0 + b_0(\sigma_0 - 1)] p^2 = 0,\\
&\tilde{\tilde{f}}_{4,20} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 p^2 (\tau')^2 + d_{11} \tau^2 + d_7 \tau \tilde{\sigma} + d_4 \tilde{\sigma}^2 + d_6 \sigma_0 p^2 \tau' + (d_{16} + d_{10}\sigma_0) p^2 = 0.
\end{aligned}$$

С использованием уравнения (39) находим значения коэффициентов

$$\tilde{\sigma}_0 = -2\eta/y, \ \ \tau_0 = 2\eta \qquad (44)$$

укороченных решений $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 p$, $\tau = \tau_0 p$. Корни $s_1 = 0$, $s_2 = -1/2$, $s_3 = -1$, $s_4 = (1-2y)/(y-1)$ уравнения $\nu(s) = 0$ являются собственными числами рассматриваемой асимптотики. Дальнейший анализ показал, что в данном случае существуют только разложения с шагом $\triangle = 1/2$ по убывающим степеням p :

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \tilde{\sigma}_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \, p^{\frac{2-k}{2}}, \ \ \tau = \tau_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \, p^{\frac{2-k}{2}}. \qquad (45)$$

Двухпараметрическое семейство разложений (45) обозначим через $\mathcal{F}_{20}$.

5°. Уравнениям (3) в точке $P = (2, 2, 1)$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{1,22} &\stackrel{\text{def}}{=} \tau\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_2\sigma + a_3 p\tau' + a_4\tau + a_5 p^2 = 0, \\ \widetilde{f}_{2,22} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + b_2\sigma + b_3 p\sigma' + b_4\tau + b_5 p^2 = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Система (46) при выполнении условий

$$\sigma_0 = (x-1)/(x-2y), \quad \tau_0 = (y-x)/(x-2) \tag{47}$$

имеет степенное решение $\sigma = \sigma_0 p^2, \quad \tau = \tau_0 p^2$. Характеристическая матрица в этом случае вычисляется так же, как и при $\eta = 0$. Используя результат [5], находим

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\varphi_4}, \;\; s_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\varphi_4}, \;\; s_3 = -3, \;\; s_4 = -4, \tag{48}$$

где $\varphi_4 = (4x^2 - 8xy + 17y - 8x)/y$. Корни s_3, s_4 являются критическими, они не опасны, так как соответствуют константам двух интегралов. Степенные разложения рассматриваемого семейства $\mathcal{F}_{22}$ могут быть различных видов. В частности, разложения по целым степеням p имеют вид

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\, p^{2-k}, \;\; \tau = \tau_0 p + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k\, p^{2-k}, \tag{49}$$

где

$$\tau_1 = -\frac{2(x+y^2-3y)\eta}{(2y-x)(x-2)^2}, \;\; \sigma_1 = -\frac{2(xy-3y+1)\eta}{(x-2)(2y-x)^2},$$

σ_3, σ_4– произвольны, остальные коэффициенты однозначно определяются из системы линейных уравнений. Ряд (49) содержит две произвольные константы σ_3, σ_4, является единственным и аналитическим по p^{-1}.

Заключение. В настоящей работе методами степенной геометрии вычислены и изучены степенные разложения решений уравнений движения тяжелого несимметричного гиростата с неподвижной точкой. Получены результаты, которые развивают предложенные П.В. Харламовым [3], Е.И. Харламовой и Г.В. Мозалевской [4] методы поиска точных решений, задаваемых системой алгебраических инвариантных соотношений. Найдены точные условия существования важнейших классов решений системы уравнений (1).

Симметричные семейства $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{10}, \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{19}, \mathcal{F}_{21}$ получим из семейств $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{16}, \mathcal{F}_{18}, \mathcal{F}_{20}$ преобразованием (6). Таким образом, получено 22 семейства степенных разложений уравнений Ковалевского-Харламова (3),(4). Аналоги семейств $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_5 - \mathcal{F}_{10}$ были вычислены в работах [6, 9] для уравнений Н. Ковалевского ($\eta = 0$) в случае, когда независимая переменная стремится к произвольной константе p_0.

Согласно общей теории, разработанной А.Д. Брюно [11], формальные разложения из семейств $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_9 - \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{22}$ сходятся для достаточно малых p, если $\omega = -1$, и для достаточно больших $|p|$, если $\omega = 1$. Для остальных семейств разложения могут расходиться.

Переменные исходной системы (1) выражаются через p, σ, τ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 \equiv p, \quad \omega_2^2 = x\sigma/(y-1), \quad \omega_3^2 = x\tau/(y-1),\\
&\gamma_1 = [x(y\sigma + \tau)/(y-1) + xp^2 - z]/(2\xi),\\
&\gamma_2 = \sqrt{x\sigma/(y-1)}[\tau' + 2(y-x)p - 2\eta]/(2\xi),\\
&\gamma_3 = -\sqrt{x\tau/(y-1)}[\sigma' y + 2(x-1)p + 2\eta]/(2\xi).
\end{aligned} \tag{50}$$

Переменные p, t связаны соотношением $\displaystyle\int dp/\sqrt{\sigma\tau} = t + \mathrm{const}$. По формулам (50) из любого решения системы (3) можно получить решение уравнений (1). Разложениям решений системы (3) по степеням p соответствуют разложения решений системы (1) по степеням времени t. Если $\alpha + \beta \neq 2$, то характер разложения сохраняется, т.е. степенное разложение по p переходит в степенное по t, а степенно-логарифмическое – в степенно-логарифмическое [5]. В частности, указанные в этой статье семейства $\mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{13}$ являются степенными, но соответствующие им семейства разложений уравнений (1) не будут степенными. Для остальных семейств переменная p разлагается по степеням t, а из формул (50) следует, что ω_i, γ_i также разлагаются по степеням t. Показатели Ковалевской семейств разложений системы (1) несложно вычислить, зная собственные числа s_i степенных асимптотик.

1. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. – М.: Физматлит, 1998. – 288 с.
2. *Kowalewski N.* Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt// Math. Ann. – 1908. – **65**. – S. 528–537.
3. *Харламов П.В.* Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку// Прикл. математика и механика. – 1963. – **20**, вып. 1. – С. 26–34.
4. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
5. *Брюно А.Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы// Прикл. математика и механика. – 2007. – **71**, вып. 2. – С. 192–227.
6. *Арансон А.Б., Брюно А.Д.* Степенные разложения сдвинутых решений системы Н. Ковалевского. – М., 2010. – 32 с. – (Препринт /Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, № 48).
7. *Брюно А.Д., Гашененко И.Н.* Конечные решения уравнений Н. Ковалевского// Механика твердого тела. — 2005. — Вып. 35. — С. 31–37.
8. *Брюно А.Д., Гашененко И.Н.* Простые точные решения уравнений Н. Ковалевского// Докл. РАН. – 2006. – **409**, № 4. – С. 439–442.

9. *Арансон А.Б.* Вычисление степенных разложений решений модифицированной системы ОДУ Н. Ковалевского алгоритмами степенной геометрии// Программирование. — 2011. — № 2. — С. 39–53.
10. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Локальные разложения модифицированных движений твердого тела. – М., 2001.– 40 с. – (Препринт /Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, № 73).
11. *Брюно А.Д.* Степенные разложения решений системы алгебраических и дифференциальных уравнений// Докл. РАН. – 2001. – **380**, № 3. – С. 298–304.

I.N. Gashenenko, D.N. Tkachenko

Power expansions of solutions of the equations of motion of a gyrostat

By applying methods of power geometry [1], we obtain power expansions of solutions of the equations of motion of a heavy gyrostat around a fixed point, under the assumption that the constant vector of the gyrostatic momentum is directed along one of the principal axes of inertia, on which the center of mass of the gyrostat lies. We establish conditions for the existence of power asymptotics of solutions in the cases when the independent variable tends to zero or infinity, construct 22 families of power expansions and analyze their properties.

Keywords: *dynamics of a rigid body, gyrostat, power geometry, asymptotical expansions, power asymptotics.*

І.М. Гашененко, Д.М. Ткаченко

Степеневі розклади розв'язків рівнянь руху гіростата

Методами степеневої геометрії [1] обчислено степеневі розклади розв'язків рівнянь руху важкого гіростата навколо нерухомої точки. При цьому передбачається, що постійний вектор гіростатичного моменту спрямований уздовж однієї з головних осей інерції, якій належить центр мас гіростата. Отримано умови існування степеневих асимптотик розв'язків у тих випадках, коли незалежна змінна наближається до нуля і до нескінченності. Побудовано 22 сім'ї степеневих розкладів та вивчено їх властивості.

Ключові слова: *динаміка твердого тіла, гіростат, степенева геометрія, асимптотичні розклади, степеневі асимптотики.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 10.09.11
gashenenko@iamm.ac.donetsk.ua, dntkachenko@mail.ru