Д. т. н. А. А. АЩЕУЛОВ, д. ф.-м. н. И. В. ГУЦУЛ

Украина, г. Черновцы, Институт термоэлектричества,
Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича
E-mail: ilitvinchuk@mail.ru

Дата поступления в редакцию
09.07 2003 г.
Оппонент *д. ф.-м. н. З. Д. КОВАЛЮК*
(ИПМ НАНУ, г. Киев)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ЕЕ ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Решено двухмерное неоднородное уравнение теплопроводности, что позволяет проводить оценку предельных нагрузочных и прочностных параметров датчиков.

При конструировании датчиков различных измерителей лучистой энергии определенный интерес представляют эффекты, возникающие в анизотропных средах, которые обуславливают, например, появление поперечной термо-эдс, вызванной анизотропией коэффициентов термо-эдс [1] и теплопроводности [2, с. 91]. Ее исследованию посвящен ряд работ, в которых на основе закона теплопроводности [3] при различных граничных условиях [4—6] получены распределения температуры и соответствующий им электрический потенциал анизотропных пластин.

Данная работа посвящена исследованиям двухмерного распределения температуры анизотропной пластины с учетом ее оптических свойств. Рассматривается анизотропная пластина в виде прямоугольного параллелепипеда размерами $a\times b\times c$, выполненная из материала, анизотропного по коэффициентам теплопроводности ($\hat{\chi}$) и термо-эдс ($\hat{\alpha}$). Тензор $\hat{\chi}$ в лабораторной системе координат $\{x, y, z\}$, повернутой на угол φ в плоскости xOy относительно кристаллографической $\{x', y', z'\}$, имеет вид, описанный в [7].

На верхнюю грань пластины падает равномерный монохроматический лучистый поток плотностью q_0. Температура нижней грани T_0 поддерживается с помощью термостата, выполненного из материала, оптический спектральный диапазон которого совпадает с диапазоном пропускания длин волн материала пластины. Боковые грани адиабатически изолированы.

Распределение температуры в объеме пластины находится из основного уравнения теплопроводности [3, с. 125], которое в приближении $\chi_{11}>\chi_{12}$ и $\chi_{22}>\chi_{21}$ для стационарного распределения температуры $\partial T/\partial t=0$ приобретает вид

$$\chi_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\chi_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+q_v=0, \qquad (1)$$

где q_v — количество тепла, которое выделяется внутренними источниками в единице объема за единицу времени, определяемое законом Бугера-Ламберта:

$$q_v=q_0\gamma[\beta_1 e^{-\gamma(b-y)}+\beta_2 e^{-\gamma x}]. \qquad (2)$$

Здесь γ — коэффициент оптического поглощения материала пластины, а постоянные величины β_1 и β_2 могут принимать значения 0 или 1.

Запишем уравнение (1) в виде, удобном для нахождения его решения:

$$\beta_0^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q_v}{\chi_{22}}=0, \qquad (3)$$

где

$$\beta_0^2=\chi_{11}/\chi_{22}. \qquad (4)$$

Граничные условия для уравнения теплопроводности (3) данной задачи имеют вид

$$\begin{aligned}&\partial T/\partial x\big|_{x=0}=0,\;\; \partial T/\partial x\big|_{x=a}=0,\\ &T\big|_{y=0}=T_0,\;\; \partial T/\partial y\big|_{y=b}=0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Функция $\cos\lambda_n\cdot x$, которая соответствует собственному значению $\lambda_n=n\pi/a$ (где n=0, 1, 2, …), — это собственная функция задачи Штурма-Лиувиля

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\lambda^2 U=0,\;\; \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\;\; \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=a}=0. \qquad (6)$$

Система $\{\cos\lambda_n\cdot x\}_{n=0}^{\infty}$ — полная, замкнутая ортогональная система функций на отрезке $[0, a]$. Это позволяет ставить вопрос о разложении функции $U(x)$ в ряд Фурье по этой системе.

Функция $U(x)$, по своему отображению [8, с. 8]

$$\hat{F}_n[U(x)]=\int_0^a U(x)\cos(\lambda_n x)dx=U_n, \qquad (7)$$

носит название конечного прямого F_n интегрального косинус-преобразования Фурье, одновременно восстанавливается по правилу

$$U(x)=\hat{F}^{-1}[U_n]=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\cos(\lambda_n x), \qquad (8)$$

где $\partial_n=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n=1,\,2,\,...\end{cases}$,

и называется обратным $\hat{F}_n^{-1}$ интегральным косинус-преобразованием Фурье [8, с. 83].

Используя к (5) и (6) оператор $\hat{F}_n^{-1}$ по правилу (7), вследствие тождества

$$\hat{F}_n\left[\beta_0^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]\equiv\int_0^a\beta_0^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cos(\lambda_n x)dx=-\beta_0^2\lambda_n^2 T_n(y), \qquad (9)$$

где

$$T_n(y)=\int_0^a T(x,y)\cos(\lambda_n x)dx, \qquad (10)$$

получим задачу построения решения уравнения:

$$\frac{d^2T_n}{dx^2}-\beta_0^2\lambda_n^2 T_n(y)=-f_n(y), \quad y\in(0,b); \qquad (11)$$

$$f_n(y)=\frac{q_0\gamma^a}{\chi_{22}}\int_0^a[\beta_1 e^{-\gamma(b-y)}+\beta_2 e^{-\gamma x}]\cos(\lambda_n x)dx \qquad (12)$$

при граничных условиях

$$T_n\big|_{y=0}=T_{0n}; \qquad (13)$$

$$T_{0n}=\int_0^a T_0\cos(\lambda_n x)dx=\begin{cases}T_{0a}, \text{ при } & n=0;\\ 0, \text{ при } & n=1,2,...;\end{cases}$$

$$dT_n/dy\big|_{y=b}=0. \qquad (14)$$

При n=0 уравнение теплопроводности (11) приобретает вид

$$\frac{d^2T_0(y)}{dy^2}=-\frac{q_0\gamma}{\chi_{22}}\int_0^a\left[\beta_1 e^{-\gamma(b-y)}+\beta_2 e^{-\gamma x}\right]dx, \qquad (15)$$

а граничные условия (13) и (14) можно записать так:

$$T_0(y)\big|_{y=0}=T_0 a, \; dT_0(y)/dy\big|_{y=b}=0. \qquad (16)$$

Для решения уравнения (15) с использованием условий (16) имеем выражение

$$T_0(y)=T_0 a+\frac{q_0\gamma}{\chi_{22}}\left\{\beta_1\frac{e^{-\gamma b}}{\gamma}+\left[\beta_1+\beta_2\frac{b}{a}(1-e^{-\gamma a})\right]y-\right.$$

$$\left.-\beta_1\frac{e^{-\gamma(b-y)}}{\gamma}-\beta_2\frac{1-e^{-\gamma a}}{2a}y^2\right\}. \qquad (17)$$

Общее решение уравнения (11) будем искать в виде общего решения однородного и частичного решения неоднородного уравнения:

$$T_n(y)=T_n^{\text{одн.}}(y)+T_n^{\text{неодн.}}(y). \qquad (18)$$

Общее решение можно представить в следующем виде:

$$T_n^{\text{одн.}}(y)=C_{1n}\,\mathrm{ch}(\beta_0\lambda_n y)+C_{2n}\,\mathrm{sh}(\beta_0\lambda_n y). \qquad (19)$$

Поскольку правая часть уравнения (11) определяется соотношением (12), принимающим после интегрирования вид

$$f_n(y)=\beta_2\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{22}}\frac{1-(-1)^n e^{-\gamma a}}{\lambda_n^2+\gamma^2}, \qquad (20)$$

и является постоянной величиной, то для частичного решения получаем:

$$T_n^{\text{неодн.}}(y)=\beta_2\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{22}}\frac{1-(-1)^n e^{-\gamma a}}{\beta_0^2\lambda_n^2(\lambda_n^2+\gamma^2)}. \qquad (21)$$

Коэффициенты C_{1n} и C_{2n} определяем после подстановки (19) и (21) в выражение (18), учитывая граничные условия

$$T_n\big|_{y=0}=0, \quad dT_n/dy\big|_{y=b}=0. \qquad (22)$$

В результате общее решение уравнения (11) при n>0 принимает следующий вид:

$$T_n(y)=\beta_2\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{22}}\frac{1-(-1)^n e^{-\gamma a}}{\beta_0^2\lambda_n^2(\lambda_n^2+\gamma^2)}\left\{1-\frac{\mathrm{ch}[\beta_0\lambda_n(b-y)]}{\mathrm{ch}(\beta_0\lambda_n b)}\right\}. \qquad (23)$$

Применяя обратное интегральное косинус-преобразование Фурье (8) к общему решению неоднородного дифференциального уравнения (11), получим:

$$T(x,y)=\hat{F}_n^{-1}[T_n(y)]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n T_n(y)\cos(\lambda_n x)=$$

$$=\frac{1}{2}T_0(y)+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}T_n(y)\cos(\lambda_n x). \qquad (24)$$

Подставляя (17) и (23) с учетом (4) в (24), получим выражение для распределения температуры анизотропной пластины:

$$T(x,y)=T_0+\frac{q_0}{\chi_{22}}\left\{\beta_1\frac{e^{-\gamma b}}{\gamma}+\left[\beta_1+\beta_2\frac{b}{a}(1-e^{-\gamma a})\right]y-\right.$$

$$\left.-\beta_1\frac{e^{-\gamma(b-y)}}{\gamma}-\beta_2\frac{1-e^{-\gamma a}}{2a}y^2\right\}+\frac{2q_0\gamma^2}{a\chi_{11}}\beta_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\gamma a}}{\lambda_n^2(\lambda_n^2+\gamma^2)}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\dfrac{\chi_{11}}{\chi_{22}}}\lambda_n(b-y)}{\mathrm{ch}\sqrt{\dfrac{\chi_{11}}{\chi_{22}}}\lambda_n b}\right]\cos(\lambda_n x). \qquad (25)$$

Из (25) следует, что распределение температуры $T(x, y)$ имеет сложную нелинейную зависимость от координат x, y и, кроме этого, зависит как от анизотропии теплопроводности, так и от оптических свойств материала пластины.

При β_1=1 и β_2=0, согласно (25), в пластине возникает одномерное распределение температуры [7], при котором величина поперечной термоэлектродвижущей силы ε зависит только от коэффициента термо-эдс a_{12}. В случае двухмерного распределения температуры величина ε будет зависеть также от коэффициента термо-эдс a_{11}, что, в свою очередь, приведет к ее увеличению по сравнению с [7].

В заключение отметим, что результаты проведенных исследований позволили уточнить прочностные и надежностные характеристики оптикотермоэлектрических датчиков и решить проблему создания измерителя лучистой энергии высокой интенсивности.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Tomson W. On thermoelectric currents in linear conductors of crystallintidiens // Math. Phys. Papers.— 1882.— N1.— P. 266—273.

2. Kohler M. Dependence of thermoelectric phenomena from crystalline orientation // Annal. Phys.— 1941.— T. 40, N 13.

3. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: Высшая школа, 1967.

4. Слипченко В. Н., Снарский А. А. Влияние анизотропии теплопроводности на поперечную термоЭДС // ФТП.— 1974.— Вып. 8.— С. 2010.

5. Снарский А. А. ЭДС термоэлементов, использующих анизотропию термоЭДС. 1. Анизотропные термоэлементы прямоугольной формы // ФТП.— 1977.— Т. 11, вып. 10.— С. 2053—2055.

6. Ащеулов А. А., Беликов А. Б., Раренко А. И. Поперечная термоЭДС, обусловленная анизотропией теплопроводности // УФЖ.— 1993.— Т. 38, вып. 8.— С. 1226—1231.

7. Ащеулов А. А., Гуцул І. В., Раренко А. І. Електрорушійна сила і коефіцієнт корисної дії анізотропного термоелемента у випадку врахування анізотропії коефіцієнтів термоЕРС і теплопровідності // УФЖ.— 1997.— Т. 42, вип. 6.— С. 698—701.

8. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с раздельными переменными (Фурье-Ханкеля).— Киев, 1983. (Препр. / АН УССР, Ин-т математики: 83,4).