PACS: 41.20.Jb

И.Р. Венгеров

ДИФФУЗИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина

Статья поступила в редакцию 16 мая 2008 года

Для неоднородных в пространстве (с зависящими от координат ε, μ, σ) и во времени ($\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\sigma = \sigma(t)$) одномерных электромагнитных полей получены диффузионные и телеграфные уравнения, ранее известные только для однородных сред. Выведены уравнения полей для случаев нелинейности и слабой нелокальности (квазилокальности) систем.

1. Введение

Исторически сложившаяся парадигма теории электромагнитных полей в сплошных средах является, фактически, таковой для электромагнитных волн [1–3]. В сложных системах (композитах, гетероструктурах, непрерывно- и слоисто-неоднородных) с отличной от нуля проводимостью электромагнитные поля (ЭМП) должны описываться следующими из уравнений Максвелла диффузионными (при пренебрежении током смещения по сравнению с током проводимости) или телеграфными уравнениями (при учете обеих проводимостей) [4,5]. Моделей этого типа мало, для неоднородных, нестационарных, нелинейных и квазилокальных (слабонелокальных) систем они отсутствуют.

В последнее время все большую роль начинают играть неоднородные твердотельные структуры, которые, в частности, могут быть созданы с помощью высоких давлений. Адекватное описание процессов распространения ЭМП в таких сложных системах заключается в построении и исследовании математических моделей – краевых задач для диффузионных и телеграфных уравнений для полей **H** и **E**.

В настоящей работе на основе уравнений Максвелла выводятся одномерные уравнения для **H** и **E** в неоднородных (пространственно и во времени – нестационарных), нелинейных и квазилокальных системах.

2. Пространственно-неоднородные системы

Система уравнений Максвелла и уравнений состояния в отсутствие сторонних токов и зарядов имеет вид (в гауссовой системе) [5]:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \ \ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \tag{3}$$

В (1)–(3) использованы общепринятые обозначения. В одномерном случае, когда $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, t)$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$, $\partial_y = \partial_z = 0$, эти уравнения можно записать в виде

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\sigma E_y + \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\mu H_y)}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\sigma E_z + \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu H_z)}{\partial t}. \tag{5}$$

Рассмотрим непрерывно-неоднородные системы, для которых $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $\mu = \mu(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ – дифференцируемые функции. Исключая из (4), (5) H_y и H_z, находим:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma(x)\mu(x)}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon(x)\mu(x)}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial E_y}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma(x)\mu(x)}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\varepsilon(x)\mu(x)}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) для E_y и E_z идентичные, «расщепленные» и содержат «конвентивные» члены ~ $\partial E_i/\partial x$ ($i = y, z$). В отличие от них уравнения для H_y и H_z не «расщепляются»: в уравнения для H_y входят члены $(4\pi \mathrm{d}\sigma/c\mathrm{d}x)E_z$ и $(\mathrm{d}\varepsilon/c\mathrm{d}x)\partial E_z/\partial t$, а в уравнения для H_z – аналогичные члены с E_y. Поэтому при решении конкретных задач целесообразно исходить из (6), (7), а H_y и H_z находить из вторых уравнений (4), (5).

В случае слоисто-неоднородных систем, когда $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$, $\sigma(x)$ – кусочно-постоянные функции, уравнения (6), (7) радикально упрощаются (члены с $\mathrm{d}\mu/\mu\mathrm{d}x$ выпадают) и переходят в телеграфные уравнения с постоянными коэффициентами.

3. Нестационарные системы

Пусть $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\mu = \mu(t)$ – непрерывные, дважды дифференцируемые по t функции времени, а $\sigma = \sigma(t)$ – однократно (по крайней мере) дифференцируемая. Учитывая это в (4), (5), дифференцируя первое из уравнений (4) по x и исключая E_y с помощью второго уравнения (5), получаем:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \Psi_0(t)H_z + \Psi_1(t)\frac{\partial H_z}{\partial t} + \Psi_2(t)\frac{\partial H_z}{\partial t^2}, \tag{8}$$

где

$$\Psi_0(t) = \frac{4\pi\sigma(t)\dot{\mu}(t)}{c^2} + \frac{\dot{\varepsilon}(t)\dot{\mu}(t)}{c^2} + \frac{\varepsilon(t)\ddot{\mu}(t)}{c^2},$$

$$\Psi_1(t)=\frac{4\pi\sigma(t)\mu(t)}{c^2}+2\frac{\varepsilon(t)\dot{\mu}(t)}{c^2}+\frac{\mu(t)\dot{\varepsilon}(t)}{c^2},\quad \Psi_2(t)=\frac{\varepsilon(t)\mu(t)}{c^2},\tag{9}$$

а точка над функцией обозначает дифференцирование ее по t. Уравнение для H_y имеет такой же вид, а для E_y, E_z аналогичным образом из (4), (5) находим:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2}=\phi_0(t)E_i+\phi_1(t)\frac{\partial E_i}{\partial t}+\phi_2(t)\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2},\quad i=y,z,\tag{10}$$

где

$$\phi_0(t)=\frac{4\pi}{c^2}\big(\mu(t)\dot{\sigma}(t)+\sigma(t)\dot{\mu}(t)\big)+\frac{\dot{\varepsilon}(t)\dot{\mu}(t)}{c^2}+\frac{\mu(t)\ddot{\varepsilon}(t)}{c^2},$$

$$\phi_1(t)=\frac{4\pi}{c^2}\mu(t)\sigma(t)+2\frac{\mu(t)\dot{\varepsilon}(t)}{c^2}+\frac{\varepsilon(t)\dot{\mu}(t)}{c^2},\quad \phi_2(t)=\Psi_2(t)=\frac{\varepsilon(t)\mu(t)}{c^2}.\tag{11}$$

Уравнения (8) и (10) при постоянных параметрах (ε, μ, σ = const) также переходят в «канонические» телеграфные уравнения, становящиеся, в свою очередь, диффузионными при элиминации тока смещения (что формализуется условием $\varepsilon = 0$).

4. Нелинейные системы

В сильных полях $\varepsilon = \varepsilon(|\mathbf{E}|)$, $\mu = \mu(|\mathbf{H}|)$, $\sigma = \sigma(|\mathbf{E}|)$ и система уравнений Максвелла становится нелинейной [5,6]. Случай одновременной зависимости всех параметров от величин полей ведет к весьма сложным, трудно реализуемым даже численно, моделям, поэтому ограничимся рассмотрением хорошо проводящей среды, током смещения в которой можно пренебречь.

Рассмотрим случаи: 1) σ = const, $\mu = \mu(|\mathbf{H}|)$; 2) $\sigma = \sigma(|\mathbf{E}|)$, μ = const. В первом случае из (4), (5) получаем:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}F_\mu\left(|\mathbf{H}|,H_i\right)\frac{\partial H_i}{\partial t},\quad F_\mu\left(|\mathbf{H}|,H_i\right)=\mu\left(|\mathbf{H}|\right)+\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mathbf{H}|}\frac{\partial|\mathbf{H}|}{\partial H_i}H_i,\tag{12}$$

где $i = y, z$. Для E_i ($i = y, z$) уравнения более сложны, чем (12), потому что для их определения целесообразен подход, рекомендованный для нахождения H_i в неоднородных системах.

Во втором случае аналогично получаем:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2}=\frac{4\pi\mu}{c^2}F_\sigma\left(|\mathbf{E}|,E_i\right)\frac{\partial E_i}{\partial t},\quad F_\sigma\left(|\mathbf{E}|,E_i\right)=\sigma\left(|\mathbf{E}|\right)+\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}|\mathbf{E}|}\frac{\partial|\mathbf{E}|}{\partial E_i}E_i,\tag{13}$$

где $i = y, z$. Здесь, напротив, более просты уравнения для E_i (13), а компоненты $\mathbf{H}$ лучше находить из уравнений (4), (5).

5. Квазилокальные (слабонелокальные) системы

Нелокальные модели ЭМП в сегнетоэлектриках, ферромагнетиках, сверхпроводниках рекомендуется строить на основе линейных уравнений Максвелла и нелокальных (содержащих интегральные операторы) уравнений состояния [7]. Рассмотрим, полагая μ = const и следуя [7], случай пространственной нелокальности закона Ома и временной – связи **D** с **E**:

$$\mathbf{j}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_j\left(\left|x-x'\right|\right)\mathbf{E}(x',t)\mathrm{d}x', \quad \mathbf{D}(x,t) = \int\limits_{0}^{t} K_D\left(t-t'\right)\mathbf{E}(x,t')\mathrm{d}t'. \quad (14)$$

Здесь K_j, K_D – ядра интегральных операторов, определяемых микроскопической теорией или экспериментом. В последнем случае гораздо легче найти первые моменты ядер – постоянные параметры, определяющие связи (14) приближенно. Если считать обычные, локальные соотношения первым приближением в (14), то во втором приближении эти уравнения дают:

$$j_i(x,t) = \sigma_0 E_i(x,t) + \sigma_2 \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2}, \quad i = y, z, \quad \sigma_0, \sigma_2 = \text{const}, \quad (15)$$

$$D_i(x,t) = \varepsilon_0 E_i(x,t) + \varepsilon_1 \frac{\partial E_i}{\partial t}, \quad i = y, z, \quad \varepsilon_0, \varepsilon_1 = \text{const}. \quad (16)$$

Здесь ε_0, σ_0 – нулевые, ε_1 – первый, σ_2 – второй моменты ядер K_j и K_D.

Подставляя (15), (16) в (4), (5) и исключая описанным ранее способом компоненты электрического поля, для компонент магнитного находим:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma_0\mu}{c^2}\frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0\mu}{c_2}\frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma_2\mu}{c_2}\frac{\partial^3 H_i}{\partial t \partial x^2} + \frac{\varepsilon_1\mu}{c_2}\frac{\partial^3 H_i}{\partial t^3}, \quad (17)$$

где $i = y, z$. Уравнения для E_y, E_z совпадают с (17), которое описывает слабую нелокальность (квазилокальное второе приближение). При элиминации нелокальности ($\varepsilon_1 = \sigma_2 = 0$) (17) переходит в «каноническое» телеграфное уравнение.

6. Выводы

К настоящему моменту нет моделей диффузионного (неволнового) распространения электромагнитных полей в сложных твердотельных системах. Их построение и исследование возможно на основе краевых задач для уравнений диффузии и телеграфных уравнений. Эти уравнения для неоднородных, нестационарных, нелинейных и слабонелокальных (квазилокальных) систем получены в настоящей работе. Построенные нами соотношения в предельных случаях переходят в известные из литературы уравнения.

1. *В.М. Дуков*, Электродинамика. (История и методология макроскопической электродинамики), Высшая школа, Москва (1975).
2. *Г.А. Гринберг*, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных полей, Изд-во АН СССР, Москва–Ленинград (1948).
3. *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс*, Фейнмановские лекции по физике, Вып. 6. Электродинамика, Мир, Москва (1966).

4. *В.Г. Левич*, Курс теоретической физики, Т. 1, Наука, Москва (1969).
5. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц*, Электродинамика сплошных сред, Наука, Москва (1982).
6. *Л.А. Бессонов*, Теоретические основы электродинамики. Электромагнитное поле, Высшая школа, Москва (1986).
7. *А.А. Власов*, Макроскопическая электродинамика, Гостехтеориздат, Москва (1955).

I.R. Vengerov

DIFFUSION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS IN NONUNIFORM SOLIDS

Diffusion and telegraph equations known till now solely for homogeneous media have been derived for space- (ε-, μ-, σ-dependent) and time- ($\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\sigma = \sigma(t)$) nonuniform one-dimensional electromagnetic fields. Field equations have been also obtained for nonlinear systems and those of low nonlocality