

PACS: 74.25.-q, 74.25.Dw, 74.25.F-, 74.25.Uv, 74.25.Wx

И.Б. Краснюк¹, Р.М. Таранец^{2,3}

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ И ПИННИНГА ВИХРЕВОЙ РЕШЕТКИ НА ПРОНИКНОВЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СВЕРХПРОВОДНИКИ ВТОРОГО РОДА

¹Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина

²Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 74, г. Донецк, 83114, Украина

³School of Mathematical Sciences, University of Nottingham
University Park, Nottingham NG7 2RD, UK

Статья поступила в редакцию 19 ноября 2010 года

Рассмотрено влияние пиннинга на характер проникновения магнитного поля в высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) второго рода в случае жесткой вихревой решетки. Определены способы накачки сверхпроводника возрастающим во времени внешним магнитным полем, при которых магнитное поле проникает в образец в форме автотельной магнитной волны. Найдены глубина и скорость распространения таких волн для сверхпроводников, которые находятся в фазе вязкого течения вихрей с нелинейной зависимостью плотности критического тока от индукции магнитного поля. Принципиально новым является учет зависимости критического тока от величины гидростатического давления, которое изменяет характер проникновения магнитного потока в сверхпроводник.

Ключевые слова: высокотемпературные сверхпроводники, проникновение магнитного поля, высокие давления, фронт магнитной волны

1. Введение

Возникновение конечного сопротивления в магнитном поле является одним из нетривиальных свойств сверхпроводников второго рода. Сопротивление порождается движением вихревой структуры под действием силы Лоренца (см., напр., [1]). В реальных ВТСП ситуация усложняется действием сил пиннинга. Это означает, что собственно равномерное движение решетки вихрей имеет место при достаточно большой величине транспортного тока, когда влияние центров пиннинга оказывается подавленным. Проникновение магнитного поля в образец начинается с некоторого критического значения поля H_{c1} и происходит в виде решетки вихрей. При

увеличении поля до второго критического значения H_{c2} расстояние между вихрями уменьшается до размера корреляционной длины. В данной работе мы рассматриваем случай жесткой решетки вихрей Абрикосова, что соответствует различным фазам сверхпроводника, например вязкому течению вихрей, крипу магнитного потока, модели вихревого стекла и т.д. Исключением является модель вихревой жидкости, когда выше линии необратимости решетка вихрей плавится, т.е. мы имеем дело с пластической деформацией вихревой решетки.

Используя математический формализм, развитый в [2–11], мы исследуем влияние гидростатического давления, от которого зависит критический ток, на перенос потока вихрей в режиме вязкого течения для жесткой вихревой решетки. Для сверхпроводящих материалов в этом режиме эволюция амплитуды магнитного поля моделируется обобщенным уравнением Бюргера с «вязкостью», где роль вязкости играет нелинейный коэффициент магнитной диффузии, зависящий от магнитного поля (возможно, градиента магнитного поля) и температуры как параметра. Структура этого уравнения показывает, что при проникновении магнитного потока в сверхпроводник сила Лоренца порождает конвективный снос (жесткой) вихревой решетки – нелинейную конвекцию, которая зависит от плотности критического тока и сопротивления сверхпроводника. Нелинейная конвекция может приводить к различным магнитным неустойчивостям, например к «опрокидыванию» магнитной волны, возникновению многопоточковых магнитных течений с последующим их «перерастанием» в дендритные структуры фрактального типа [12]. Отметим, что без пиннинга, когда плотность критического тока равна нулю, конвекция отсутствует.

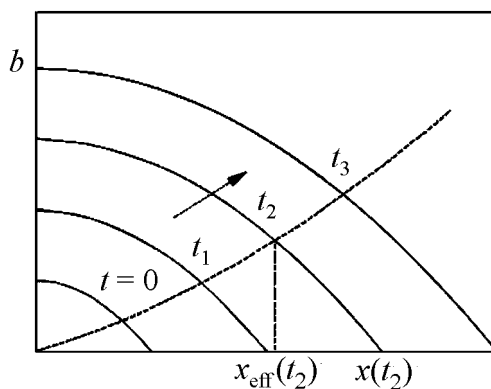


Рис. Эффективная локализация магнитного поля в режиме степенной поверхностной накачки внешним магнитным полем в различные моменты времени: $0 < t_1 < t_2 < t_3$. Здесь $x_{\text{eff}}(t)$ – точка эффективной локализации поля

Это означает, что уравнение Бюргера вырождается в более простое уравнение типа «пористой среды», которое было получено и исследовано Баренблаттом [13] при изучении поведения жидкости в пористых средах. Он нашел локализованные решения данного уравнения, имеющие вид автомодельных волн (рисунок). В нашей ситуации это решение демонстрирует распределение амплитуды магнитного поля в среде без пиннинга. С учетом влияния пиннинга и при постоянном критическом токе фронт распространения таких волн смещается на величину, которая пропорциональна плотности критического тока.

2. Отклик сверхпроводника на внешние возмущения

Для уравнения Бюргера рассмотрим несколько условий изменения со временем амплитуды магнитного поля на поверхности сверхпроводника: степенной и граничный режим с обострением [2–4]. Ограничимся исследованием одномерной краевой задачи в магнитном поле, которое ориентировано вдоль поверхности сверхпроводника. Такая задача исследовалась в работах Фейгельмана, Ларкина и др. [14], а затем получила дальнейшее развитие в работах Романовского [5,6] для постоянной амплитуды магнитного поля на поверхности сверхпроводника. Мы же рассматриваем ситуацию, когда скорость изменения магнитного поля на поверхности сверхпроводника задана в режиме с обострением. Такой режим моделирует импульсное воздействие магнитного поля или тока. При этом за конечное время амплитуда магнитного поля на границе становится намного больше значения первого критического поля [15].

Для уравнения пористой среды с указанными выше граничными условиями в ряде работ [2–4] были получены явные автомодельные представления амплитуды магнитного поля с учетом различных форм потенциала пиннинга для разных фаз сверхпроводника. Наиболее простым является исследование вязкого течения вихрей, так как в этом случае при больших плотностях транспортного тока пиннинг подавлен. Наиболее сложным оказывается исследование структуры магнитных волн при малых плотностях тока (меньше, а иногда и намного меньше его критической плотности [14]). В этом случае движение вихрей является термически индуцированным, что может приводить к «гигантскому» крипу магнитного потока [2]. В большинстве работ (см., напр., [14]) решетка вихрей предполагается жесткой. В то же время имеются фазы сверхпроводника, когда решетка вихрей подвержена пластической деформации и даже плавится [14].

В данной работе мы обобщаем полученные ранее результаты для режима вязкого течения вихрей [3,4] на случай нелинейной зависимости сопротивления ρ_f и зависимости плотности критического тока J_c от индукции магнитного поля B . При постоянном критическом токе пиннинг уменьшает глубину и скорость проникновения магнитного потока [3,4], при непостоянном – приводит к возникновению фрактальных магнитных структур, а глубина проникновения магнитного поля и скорость движения зависят от условий, заданных на поверхности сверхпроводника.

Покажем, что распределения амплитуды магнитного поля в полупространстве могут быть как локализованными, так и нелокализованными. В первом случае скорость проникновения магнитной волны (или возмущения) конечна, и решение локализовано, а во втором – бесконечно, и решение нелокализовано. Такие распределения при больших временах (например, в режиме с обострением) порождают предельные автомодельные магнитные структуры, которые образуют аттрактор исходной краевой задачи (см. [15]). Одним из элементов аттрактора такой задачи является простая бегущая маг-

нитная волна. Показано, что скорость движения и глубина проникновения такой волны в идеальном сверхпроводнике без пиннинга, а в неидеальном – с учетом пиннинга зависят от скорости возрастания амплитуды магнитного поля на поверхности сверхпроводника, плотности критического тока и удельной проводимости образца, которые могут нелинейным образом зависеть от магнитного поля.

Таким образом, в данной статье (в макроскопическом приближении) рассматриваются основные физические особенности проникновения магнитного поля в ВТСП второго рода в зависимости от скорости возрастания внешнего магнитного поля. Например, можно принять $\partial B/\partial t = 1$ Т/с на поверхности сверхпроводника Nb–Ti или $\partial B/\partial t = 7.5 \cdot 10^{-3}$ Т/с для сверхпроводника YBCO (см. [16]). Оказывается, что характер проникновения магнитного поля определяется следующими факторами: скоростью накачки внешним магнитным полем $\partial B/\partial t$, нелинейной зависимостью сопротивления среды от индукции магнитного поля $\rho(B)$ и зависимостью плотности критического тока от магнитного поля и температуры $J_c = J_c(B, T)$. Пространственно-временное распределение магнитного поля определяется тем, в какой фазе находится высокотемпературный сверхпроводник. Мы исследуем также ситуацию режима вязкого течения вихрей ($J \gg J_c$), когда действие центров пиннинга оказывается подавленным [14]. Дополнительно рассмотрим случай, когда критический ток зависит от гидростатического давления. В типичных ситуациях такая зависимость является экспоненциальной [17]. При этом влияние давления на амплитуду, глубину и скорость движения фронта магнитной волны оказывается аналогичным влиянию критического тока, а именно при увеличении давления глубина и скорость проникновения магнитной волны уменьшаются на величину, пропорциональную величине давления.

3. Модель вязкого течения магнитного потока

Рассмотрим режим вязкого течения вихрей, который можно представить следующим образом: если через сверхпроводник пропустить транспортный ток, то взаимодействие вихрей с током приводит к возникновению силы Лоренца, действующей на вихревую нить: $\mathbf{F}_L = c^{-1}[\mathbf{J}, \Phi_0]$, где c – скорость света, Φ_0 – квант магнитного потока. Под влиянием силы Лоренца магнитный поток приходит в движение, что вызывает диссипацию энергии, в результате чего сверхпроводник переходит в резистивное состояние, или фазу Шубникова. Если имеет место сильная связь между магнитным потоком (по существу, вихревой решеткой Абрикосова) и решеткой металла, то движение вихревой решетки происходит, когда $F_L \geq F_p$, где F_p – сила пиннинга. Таким образом, в сверхпроводнике устанавливается режим вязкого течения вихрей. Из определения силы пиннинга следует, что

$$J = J_c + \eta \frac{vc}{\Phi_0}, \quad (1)$$

где η – вязкость, v – макроскопическая скорость движения вихрей. Важно то, что имеет место функциональная связь между скоростью движения вихрей v и изменением электрического поля E , которое возникает при движении магнитного потока. Действительно, рассмотрим уравнение непрерывности для потока вихревых нитей

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div}(nv) \quad (2)$$

(где n – плотность вихрей, такая, что в условиях равновесия $B = n\Phi_0$) и уравнение Максвелла

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Тогда из (2) и (3) вытекает функциональная связь: $v = cE/B$, которая играет важную роль при выводе уравнения эволюции магнитного поля. Уравнение состояния сверхпроводника имеет вид [16]:

$$J = J_c + \sigma_f E, \quad (4)$$

где $\sigma_f = 1/\rho_f$ – проводимость образца. Из (4) следует, что вольт-амперную характеристику в режиме вязкого течения вихрей можно записать в виде

$$E = \rho_f(B)(J - J_c). \quad (5)$$

Здесь $J_c = J_c(B, T, P)$, где P – давление. Одним из приближений модели критического состояния $J_c = J_c(B, T)$ является модель Кима–Андерсона [18]:

$$J_c = J_0 \frac{B_0}{B + B_0}, \quad (6)$$

где $J_0 = J_0(T)$, $B_0 = B_0(T) \sim 10^3$ Gs для жестких сверхпроводников. Приближение (6) имеет место для всех полей B в диапазоне $H_{c1} < B < H_{c2}$, где H_{c1} и H_{c2} – первое и второе критические поля соответственно. В области $(H_{c2} - B)/H_{c2} \ll 1$ справедливо следующее приближение [18]:

$$J_c = \tilde{J}_0(T) \left(1 - \frac{B}{H_{c2}} \right). \quad (7)$$

Для модели Бина [19] можно получить $J_c = J_c(T)$, так как (в большинстве случаев) перепад индукции в образце достаточно мал по сравнению с характерным масштабом изменения $J_c = J_c(B)$ (порядка величины $(H_{c2} - B)$, см. [19]). Для приближенных оценок достаточно считать $\tilde{J}_0(T)$ порядка величины $(1 - T/T_c)$, где T_c – критическая температура перехода сверхпроводника в нормальное состояние.

4. Уравнение эволюции магнитного поля с учетом зависимости критического тока от амплитуды магнитного поля и температуры

Ниже мы получим уравнение, которое описывает распределение индукции магнитного поля для модели Бина, модели Кима–Андерсона и многих других случаев, когда имеет место нелинейная зависимость критического тока от магнитного поля. В самом деле, рассмотрим ВТСП второго рода, занимающий полупространство $x \geq 0$, в параллельной геометрии $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_z$, \mathbf{E} , $\mathbf{J} \parallel \mathbf{e}_y$ и $\mathbf{v} \parallel \mathbf{e}_x$, где \mathbf{e} – единичный орт, $\mathbf{E} = \rho_f(B)(\mathbf{J} - \mathbf{J}_c)$. Предположим, что температура сверхпроводника совпадает с температурой охладителя, т.е. пренебрегаем неизотермичностью процесса, исходя из того факта, что значение коэффициента диффузии обеспечивает быстрое выравнивание градиента температуры. Такое эффективное охлаждение имеет место для композитных сверхпроводников [5,6]. При изотермических условиях температуру можно рассматривать как параметр и, следовательно, взаимосвязь между магнитной индукцией \mathbf{B} , электрическим полем \mathbf{E} и транспортным током \mathbf{J} определяется уравнениями Максвелла. Тогда, если известны $\rho_f(b)$ и $j_c(b, \theta)$, по заданной форме вольт-амперной характеристики и уравнению Максвелла (3) можно записать уравнение эволюции магнитного поля

$$b_t - \kappa (G(b, \theta))_x = D_h (\rho_f(b) b_x)_x. \quad (8)$$

Здесь $b = B / H_{c1}$, $G(b, \theta) = \rho_f(b) j_c(b, \theta)$, $\theta = T / T_c$, $x \rightarrow x / \lambda$, $t \rightarrow t / t_h$, $D_h = c^2 t_h \rho_0 / 4\pi \lambda^2$ – коэффициент магнитной диффузии, t_h – время релаксации магнитного поля, λ – лондоновская глубина проникновения магнитного поля. Параметр $\kappa = \tilde{\kappa} D_h$ определяется из уравнения $j = -\frac{1}{\tilde{\kappa}} b_x$, где $\tilde{\kappa} = 4\pi J_c^0 \lambda / c H_{c1}$, $j = J / J_c^0$, J_c^0 – ток распаривания, плотность критического тока при нулевой температуре [14]. Критическую плотность тока возьмем в виде $j_c(b, \theta) = j_c^0(b)(1 - \theta)^q$, $q > 0$.

Уравнение (8) подобно известному в гидродинамике уравнению Бюргерса, только уже с нелинейной «вязкостью» $\rho_f(b)$. Выполним в (8) замену $t = t'$, $\eta = x + \kappa G'(b)t$ (зависимость от θ там, где это не вызовет недоразумений, будем опускать). Тогда (8) можно записать в виде уравнения пористой среды

$$b_t = D_h (\rho_f(b) b_\eta)_\eta. \quad (9)$$

Ограничимся исследованием стационарных решений уравнения (9), а именно

$$\rho_f(b) b_\eta = C,$$

где $C = \rho_f(b(\eta_0)) b_\eta(\eta_0)$, а значение η_0 определяет кривую $\eta_0 = x + \kappa G'(b)t$ в плоскости (x, t) . Выберем $\rho_f(b) = b$. Тогда интегрирование последнего уравнения приводит к следующему равенству:

$$b^2(\eta) = b^2(\eta_0) + 2C(\eta - \eta_0). \quad (10)$$

Пусть $\alpha = b^2(\eta_0) - 2C\eta_0 > 0$ и $\beta = -2C > 0$. В этом случае решение уравнения (10) имеет вид

$$b(\eta) = \alpha^{1/2} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \eta \right)_+^{1/2}, \quad \text{где } (k)_+ = \max\{0, k\}.$$

Для $\rho_f(b) = \rho_n b^\sigma$, где $\sigma > 0$, можно получить аналогичный результат. Заметим, что зависимость $\rho_f = \beta^{-1}(T, B) B / H_{c2}(T)$ (где коэффициент $\beta(T, B)$ подлежит определению из эксперимента) была детально проанализирована в работе [1], в которой показано, что зависимость ρ_f от b действительно имеет степенной характер.

Вместе с уравнением (9) рассмотрим граничное условие, зависящее от времени:

$$b(0, t) = b_1(t) > 0, \quad t > 0 \quad (11)$$

и начальное условие

$$b(\eta, 0) = b_0(\eta) \geq 0, \quad b_0^{\sigma+1} \in C^1(R^+). \quad (12)$$

Здесь функция $b_1(t)$ неограниченно возрастает при увеличении t по степенному закону или в режиме с обострением. Решение начально-краевой задачи (9)–(12) будет найдено ниже.

5. Распределения магнитного поля типа бегущей волны

Для задачи (9)–(12) будем искать решение типа бегущей волны:

$$b_A(\eta, t) = f_A(\zeta), \quad \zeta = \eta - \lambda t,$$

где λ – скорость движения магнитной волны. В результате для $f_A(\zeta) \geq 0$ уравнение (9) с заменой $t \rightarrow tD_h$ допускает редукцию к уравнению

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\rho_f(f_A) \frac{df_A}{d\zeta} \right) + \lambda \frac{df_A}{d\zeta} = 0,$$

т.е.

$$\rho_f(f_A) \frac{df_A}{d\zeta} + \lambda f_A = C.$$

Полагая $C = 0$, приходим к следующему равенству:

$$\frac{\rho_f(f_A)}{f_A} \frac{df_A}{d\zeta} = -\lambda.$$

В этом случае

$$\Phi(f_A(\zeta)) = \lambda(\zeta_0 - \zeta)_+,$$

где

$$\Phi(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{\rho_f(s)}{s} ds, \quad \rho_f \geq 0; \quad \Phi(0) = 0.$$

Если $\zeta_0 = 0$, тогда

$$f_A(\zeta) = \Phi^{-1}(\lambda(-\zeta)_+),$$

где Φ^{-1} – функция, обратная Φ . В результате получаем автомодельное решение

$$b_A(\eta, t) = \Phi^{-1}[\lambda(\lambda t - \eta)_+], \quad t > 0.$$

Мы можем найти $t_0 = \Phi(\infty)/\lambda^2 \leq \infty$ – время обострения в точке $\eta = 0$. Тогда полученное решение можно рассматривать как решение на временном интервале $[0, t_0)$ для уравнения (9) с начальными условиями

$$b(\eta, 0) = 0, \quad \eta > 0$$

и граничными условиями

$$b(0, t) = \Phi^{-1}(\lambda^2 t).$$

Таким образом, задача имеет решение с непрерывным магнитным потоком, которое при каждом $t \in [0, t_0)$ является финитным по η , т.е.

$$b_A(\eta, t) \equiv 0, \quad \eta \geq \lambda t, \quad t \in [0, t_0).$$

Фронт магнитной волны определяется равенством $\eta_f(t) = \lambda t$. В исходных переменных скорость фронта магнитной волны имеет вид

$$\frac{dx_f}{dt} = \lambda - \kappa G'(b).$$

Таким образом, пиннинг уменьшает скорость проникновения магнитной волны на величину $\kappa G'(b)$, где $G'(b) > 0$. Например, для $\rho_f(b) = b^\sigma$, $\sigma > 0$ получаем $\Phi(b) = b^\sigma/\sigma$, $\Phi^{-1}(b) = (\sigma b)^{1/\sigma}$, $t = \infty$, и решение имеет вид [26]:

$$b_A(\eta, t) = [\sigma\lambda(\lambda t - \eta)_+]^{1/\sigma}, \quad t \geq 0, \quad \eta > 0.$$

6. Степенной граничный режим

Рассмотрим степенной граничный режим, т.е.

$$b_1(t) = (1+t)^m, \quad t \geq 0; \quad m > 0. \quad (13)$$

В этом случае уравнение (9) с заменой $t \rightarrow tD_h$ при $\rho_f(b) = b^\sigma$ имеет автомодельное решение следующей формы:

$$b_A(\eta, t) = (1+t)^m \vartheta_A(\zeta), \quad \zeta = \frac{\eta}{(1+t)^{(1+m\sigma)/2}}, \quad (14)$$

что можно связать с инвариантностью уравнения относительно масштабного преобразования: $t \rightarrow t/\alpha$, $x \rightarrow x/\alpha^{(1+m\sigma)/2}$, $b \rightarrow \alpha^m b$; $\alpha > 0$. Действительно, если решение инвариантно относительно такого преобразования, т.е. представимо в виде

$$b(x, t) \equiv \alpha^m b\left(t/\alpha, x/\alpha^{(1+m\sigma)/2}\right),$$

тогда, полагая $\alpha = 1+t$, $t \rightarrow 1+t$, мы получаем (14). Функция $\vartheta_A \geq 0$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left(\vartheta_A^\sigma \vartheta_A'\right)' + \frac{(1+m\sigma)}{2} \vartheta_A' \zeta - m \vartheta_A = 0, \quad \zeta \geq 0 \quad (15)$$

с краевыми условиями

$$\vartheta_A(0) = 1, \quad \vartheta_A(\infty) = 0. \quad (16)$$

Известно [15], что обобщенное решение задачи (15), (16) при $m > 0$, $\sigma > 1$ существует, является единственным и финитным (обращается в нуль вне некоторого ограниченного связного интервала). Например, при $m = 1/\sigma$ данная задача имеет следующее обобщенное решение:

$$\vartheta_A(\zeta) = (1 - \sigma^{1/2} \zeta)_+^{1/\sigma}. \quad (17)$$

В этом случае $b_A = (1+t)^{1/\sigma} \vartheta_A(\zeta)$, $\zeta = \eta/(1+t)$, и поэтому автомодельное решение есть ни что иное, как простая бегущая волна.

Глубина проникновения магнитной волны зависит от времени по закону

$$\eta_{\text{eff}}^A(t) = \zeta_{\text{eff}} (1+t)^{(1+m\sigma)/2}, \quad t \geq 0, \quad (18)$$

где $\vartheta_A(\zeta_{\text{eff}}) = 1/2$. Координата фронта магнитной волны (точка, в которой b_A обращается в нуль) равна

$$\eta_f^A(t) = \zeta_f (1+t)^{(1+m\sigma)/2}. \quad (19)$$

Схематически эволюция автомодельного процесса проникновения магнитного поля в режиме вязкого течения вихрей при степенной скорости накачки внешним магнитным полем изображена на рисунке.

Из определения $\eta = x + \kappa G'(b)t$ и соотношения (18), в свою очередь, вытекает, что глубина проникновения магнитной волны в полупространство $x > 0$ имеет вид

$$x_{\text{eff}}^A(t) = \zeta_{\text{eff}} (1+t)^{(1+m\sigma)/2} - \kappa G'(b)t \quad (20)$$

и соответственно эффективная скорость движения фронта магнитной волны равна

$$v_{\text{eff}}^A(t) = \frac{1+m\sigma}{2} \zeta_{\text{eff}} (1+t)^{(m\sigma-1)/2} - \kappa G'(b). \quad (21)$$

Формула (21) имеет физический смысл лишь при выполнении неравенства $m\sigma \leq 1$. В частности, при $\sigma = 1$ (в режиме Бардина–Стефена) задача физически корректна при условии, что скорость накачки внешним полем удовлетворяет условию $m \leq 1$, т.е. сублинейна или линейна. В частном случае для закона Бардина–Стефена $\rho_f(b) = b$. В режиме постоянного критического тока $j_c(b) \equiv j_c$ из (20), (21) следует, что

$$x_{\text{eff}}^A(t) = \zeta_{\text{eff}}(1+t)^{(1+m\sigma)/2} - \kappa j_c t, \quad (22)$$

$$v_{\text{eff}}^A(t) = \frac{1+m\sigma}{2} \zeta_{\text{eff}}(1+t)^{(m\sigma-1)/2} - \kappa j_c. \quad (23)$$

В общей ситуации для однозначной разрешимости уравнения (8) необходимо, чтобы функция $G(b)$, учитывающая влияние пиннинга, удовлетворяла энтропийному условию [20]. Это условие выделяет однозначные ветви решений в окрестности фронта ударной волны, препятствуя возникновению многопоточных магнитных течений гидродинамического типа. Как показано выше, существует стандартный способ редукции обобщенного уравнения Бюргера (8) к уравнению пористой среды (9), который заключается в том, чтобы рассматривать решения уравнения (8) на характеристиках. Это означает, что вдоль траекторий, задаваемых дифференциальным уравнением

$$\frac{d\eta}{dt} = \kappa G'(b), \quad \frac{dt'}{dt} = 1, \quad (24)$$

решения уравнения (8) совпадают с решениями уравнения (9).

Отметим, что если бы мы рассматривали задачу Коши, то, зная решение уравнения (9), могли бы его продолжить вдоль характеристик (24) и тем самым найти решение задачи Коши для исходного уравнения (8). Ситуация усложняется, когда мы рассматриваем граничную задачу. При этом не всегда удастся согласовать решения вдоль траекторий (24) с заданными краевыми условиями. Заметим, что задача Коши для (9) является однозначно разрешимой в области, где характеристики исходного уравнения (8) не пересекаются.

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Известно, что если $G'(b) > 0$, то возникает укручение фронта магнитной волны. В реальных процессах укручение заканчивается появлением многопоточных магнитных течений и опрокидыванием магнитной волны в отсутствие «вязкости». Если классическое уравнение Бюргера дополнить вторым слагаемым, то «вязкость» останавливает опрокидывание. Напомним, что опрокидывание сопровождается ростом градиента поля до бесконечности. При отличной от нуля «вязкости» диффузионное слагаемое $(\rho_f(b)b_x)_x$ в (8) доминирует над конвективным слагаемым $G'(b)b_x$ (см., напр., [12, с. 189]), что и останавливает возникновение многопоточных течений, которые в противном случае приводят к фрактальному распределению магнитного потока.

При $k \ll 1$ уравнение (8) допускает редукцию к уравнению

$$b_t = D_h \left(\rho_f(b) b_x \right)_x. \quad (25)$$

Этот случай соответствует $J \gg J_c$, когда пиннингом можно пренебречь. При степенном граничном режиме вместе с (25) рассматриваем граничное условие

$$b(0, t) = b_0(1+t)^m, \quad t > 0, \quad m > 0, \quad (26)$$

а для граничного режима с обострением – граничное условие

$$b(0, t) = b_0(t_0 - t)^m, \quad 0 < t < t_0, \quad m < 0, \quad (27)$$

где t_0 – время выхода магнитного поля на скейлинговое поведение [14]. Условие (27) означает, что $b \rightarrow \infty$ на границе $x = 0$ при $t \rightarrow t_0$.

Решение на рисунке определяет пространственный профиль магнитной волны, движущейся в сверхпроводнике при степенном режиме накачки на границе со скоростью $v_{\text{eff}}(t) = \zeta_{\text{eff}}(1+m\sigma)/2(1+t)^{(m\sigma-1)/2}$. В частности, при $m = 1/\sigma$ краевая задача (25), (26) имеет явное обобщенное решение $b(x, t) = (1+t)^{1/\sigma} (1 - \sigma^{1/2} \zeta)_+^{1/\sigma}$, $\zeta = x(1+t)^{-1}$. При таком специальном выборе накачки скорость движения фронта волны постоянна и равна $v_f = \sigma^{-1/2}$. Так, при $\sigma = 1$ (для закона Бардина–Стефена) мы получаем, что $v_f = 1$.

7. Проникновение магнитного поля в режиме с обострением

В предыдущем пункте мы определили глубину и скорость проникновения магнитного поля в сверхпроводник при степенном режиме накачки внешним магнитным полем. Такие граничные условия часто реализуются в эксперименте, хотя при этом в основном используется линейное возрастание амплитуды магнитного поля на поверхности сверхпроводника. В то же время существует ряд экспериментов, когда необходимо реализовать сверхбыстрый режим накачки внешним полем, например при исследовании образования термомагнитных дендритных структур в ВТСП. В такой ситуации нужно строить соответствующую математическую модель для режима с обострением (27). Тогда автомодельные решения уравнения (25) будем искать в виде

$$b(x, t) = (t_0 - t)^m f(\zeta), \quad \zeta = x(t_0 - t)^{-(1+m\sigma)/2} \geq 0, \quad (28)$$

где $f(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(f^\sigma f' \right)' - \left[(1+m\sigma)/2 \right] \zeta f' + m f = 0, \quad \zeta > 0 \quad (29)$$

и краевым условиям

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0.$$

Для автомодельного решения (28) эффективная глубина проникновения магнитной волны зависит от времени по следующему закону: $x_{\text{eff}}(t) =$

$= \zeta_{\text{eff}}(t_0 - t)^{(1+m\sigma)/2}$. Здесь ζ_{eff} – эффективное значение автомоделной координаты, которое находится из условия, что $f(\zeta_{\text{eff}}) = 1/2$. При $1 + m\sigma < 0$ решение характеризуется следующими свойствами: координата фронта волны находится в конечной точке и вместе с x_{eff} неограниченно возрастает при приближении к моменту обострения. При $1 + m\sigma > 0$ фронт волны находится в бесконечно удаленной точке, а величина $x_{\text{eff}}(t)$ уменьшается при $t \rightarrow t_0$. Решения такого типа можно назвать магнитной волной с сокращающимися эффективными размерами. Магнитное поле в этом случае будет сосредотачиваться в уменьшающейся со временем области пространства. В реальной ситуации сопутствующее этому процессу возрастание $b(x,t)$ будет ограничено сверху значением второго критического поля.

Специальному выбору $m = -1/\sigma$ отвечает автомоделное решение необычного вида – остановившаяся магнитная волна:

$$b(x,t) = (t_0 - t)^{-1/\sigma} (1 - x/x_0)_+^{2/\sigma},$$

где $x_0 = [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}$. Положение фронта волны $x_f(t) = x_0$ не меняется в течение всего времени обострения, а магнитные возмущения не распространяются в глубь образца, несмотря на то, что в области $(0, x_0)$ магнитное поле возрастает при $t \rightarrow t_0$.

8. Учет зависимости критического тока от амплитуды магнитного поля

Следующий шаг состоит в том, чтобы учесть реальную зависимость критического тока $J_c(B, T)$ от магнитного поля. В этом случае уравнение эволюции магнитного поля имеет вид (8) с заменой $t \rightarrow tD_h$. Вместе с (8), где $G(b) = \rho_f(b)j_c(\theta, b)$, граничное условие в режиме с обострением имеет вид

$$b(0, t) = b_0(1-t)^m, \quad m < 0, \quad t_0 = 1. \quad (30)$$

Тогда решением задачи (8), (30) является

$$b(\eta, t) = b_0(1-t)^m F(\zeta), \quad \zeta = \frac{\eta}{(1-t)^{(1+m)/2}}, \quad m < 0, \quad (31)$$

где F – решение задачи

$$b_0(F F')' - \frac{m+1}{2}(\zeta F)' + \frac{3m+1}{2}F = 0, \quad F(0) = 1, \quad F(\infty) = 0. \quad (32)$$

Заметим, при $m = -1/3$ уравнение (32) имеет явное решение $F(\zeta) = 1 + \frac{\zeta^2}{6b_0}$,

однако это решение не удовлетворяет граничному условию $F(\infty) = 0$. Интегрирование уравнения (32) от ζ до ∞ приводит к соотношению

$$F \left(b_0 F' - \frac{m+1}{2} \zeta \right) = \frac{3m+1}{2} \int_{\zeta}^{\infty} F(s) ds. \quad (33)$$

Выберем $m < -1$. Тогда, учитывая, что $F \geq 0$, из (33) находим оценку сверху для всех неотрицательных решений задачи (32):

$$F \leq \left(1 + \frac{m+1}{4b_0} \zeta^2\right)_+ \quad (34)$$

Оценка (34) показывает, что решения задачи (32) локализованы при $m < -1$. При $m = -1$ имеем явное решение

$$F(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta}{\sqrt{6b_0}}\right)_+^2, \quad \zeta = \eta. \quad (35)$$

Таким образом, при $m = -1$ имеем точное автомодельное решение обобщенного уравнения Бюргерса

$$b(\eta, t) = b_0(1-t)^{-1} \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{6b_0}}\right)_+^2.$$

9. Влияние давления на проникновение магнитного потока в сверхпроводник

В результате всестороннего сжатия ВТСП-купратов их критическая температура T_c вначале растет, достигая максимального значения, после чего убывает с дальнейшим повышением давления [21]. Влияние давления на T_c может быть связано с двумя факторами: изменением основных характеристик купратов, определяющих куперовское спаривание в них, или (менее принципиальным) ростом концентрации подвижных носителей заряда в результате уменьшения объема сверхпроводника [22]. К сожалению, разделить эти два эффекта достаточно сложно, поскольку изменение критической температуры при сжатии купратных соединений оказывается небольшим. В то же время влияние давления на плотность критического тока J_c является очень сильным. Как было обнаружено в [17], производная $d \ln J_c / dP$ для иттрий-бариевых купратов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ имеет величину порядка 0.2 GPa^{-1} и, следовательно, для экспериментально достижимых давлений критическая плотность J_c может быть увеличена вдвое и более. Это обстоятельство позволяет использовать J_c в качестве управляемого параметра для проверки основных положений теории критического состояния в сверхпроводниках второго рода. Основные положения этой теории были сформулированы еще в 1964 г. [19] на основе теории А.А. Абрикосова [23]. Тогда же были получены и первые критерии устойчивости критического состояния в жестких и комбинированных сверхпроводниках [18]. Учитывая зависимость критического тока $J_c(B, T, P)$ от давления как параметра в полученном нами уравнении эволюции магнитного поля (8), можно исследовать влияние давления на глубину и скорость проникновения магнитного потока. Очевидно, что рост

давления, а вместе с тем и критического тока уменьшает глубину (см. (20)) и скорость (см. (21)) проникновения магнитного поля в образец.

10. Заключение

В работе рассмотрен класс модельных краевых задач, который описывает отклик ВТСП второго рода на сильно нелинейные поверхностные возмущения магнитного поля при степенном граничном режиме, а также импульсном режиме с обострением. Исследован отклик жесткой вихревой решетки, показывающий, что магнитный поток проникает в образец в форме автосимметричной волны. Амплитуда, скорость и глубина проникновения такой магнитной волны зависят от двух факторов – скорости внешней накачки магнитным полем и электрического сопротивления, которое зависит от индукции магнитного поля нелинейным образом, а также от величины критического тока и давления. Показано, что если плотность критического тока постоянна, то форма магнитной волны определяется конкуренцией между скоростью проникновения магнитного потока в образец и коэффициентом магнитной диффузии, характеризующим магниторезистивные свойства среды. Учет пиннинга приводит к уменьшению скорости и глубины проникновения магнитного потока в образец на величину, пропорциональную плотности критического тока. Если критический ток является функцией амплитуды магнитного поля (даже линейной), то это приводит к укрупнению фронта магнитной волны и возникновению многопоточных магнитных течений с последующим образованием дендритных структур.

Исследования Р.М. Таранца были частично поддержаны Седьмой рамочной программой Европейского Союза, грант № PIF-GA-2009-254521.

1. Л.П. Горьков, Н.Б. Копинин, УФН **116**, 413 (1975).
2. И.Б. Краснюк, Р.М. Таранец, ЖТФ **77**, 1 (2007).
3. И.Б. Краснюк, ЖТФ **77**, 30 (2007).
4. И.Б. Краснюк, Р.М. Таранец, ЖТФ **78**, 83 (2008).
5. В.Р. Романовский, ЖТФ **73**, 77 (2003).
6. В.Р. Романовский, ЖТФ **70**, 47 (2000).
7. И.Б. Краснюк, Ю.В. Медведев, Письма в ЖТФ **31**, 40 (2005).
8. Ю.В. Медведев, И.Б. Краснюк, ЖТФ **73**, 31 (2003).
9. Ю.В. Медведев, И.Б. Краснюк, ФНТ **31**, 1366 (2005).
10. И.Б. Краснюк, М.В. Залуцкий, ФНТ **33**, 415 (2007).
11. И.Б. Краснюк, Р.М. Таранец, В.М. Юрченко, ФНТ **37**, 369 (2011).
12. Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса, Наука, Москва (1988).
13. Г.И. Баренблатт, Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике, Гидрометеиздат, Ленинград (1982).

14. G. Blatter, M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, V.M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).
15. А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, Наука, Москва (1987).
16. Р.Г. Минц, А.Л. Рахманов, Неустойчивости в сверхпроводниках, Наука, Москва (1984).
17. T. Tomita, J.S. Schilling, L. Chen, B.W. Veal, H. Claus, Phys. Rev. **B74**, 064517 (2006).
18. P.W. Anderson, Y.B. Kim, Rev. Mod. Phys. **36**, 39 (1964).
19. C.P. Bean, J.D. Livingston, Phys. Rev. Lett. **12**, 14 (1964).
20. И.Б. Краснюк, В.М. Юрченко, ЖЭТФ **121**, 637 (2002).
21. H. Takahashi, N. Mori, Studies of High Temperature Superconductors, Nova Science, New York (1995).
22. R.J. Wijngaarden, D.T. Jover, and R. Griessen, Physica **B265**, 128 (1999).
23. А.А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).

I.B. Krasnyuk, R.M. Taranets

ВПЛИВ ТИСКУ І ПІНІНГА ВИХРОВОЇ КОМІРКИ НА ПРОНИКНЕННЯ МАГНІТНОГО ПОТОКУ У ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНІ НАДПРОВІДНИКИ ДРУГОГО РОДУ

Розглянуто вплив пінінга на характер проникнення магнітного поля у високотемпературні надпровідники другого роду в разі жорсткої вихрової комірки. Визначено засоби накачування надпровідника зовнішнім магнітним полем, що зростає з часом, при яких магнітне поле проникає в зразок у формі автосподільної магнітної хвилі. Знайдено глибину й швидкість поширення таких хвиль для надпровідників, які знаходяться у фазі в'язкого перебігу вихорів з нелінійною залежністю густини критичного струму від індукції магнітного поля. Принципово новим є облік залежності критичного струму від величини гідростатичного тиску, який змінює характер проникнення магнітного потоку в надпровідник.

Ключові слова: високотемпературні надпровідники, проникнення магнітного поля, високий тиск, фронт магнітної хвилі

I.B. Krasnyuk, R.M. Taranets

EFFECT OF PRESSURE AND PINNING OF A VORTEX LATTICE ON THE MAGNETIC FLUX PENETRATION IN HIGH-TEMPERATURE TYPE-II SUPERCONDUCTORS

Pinning effect on the character of the magnetic field penetration in high-temperature type-II superconductors is considered in the case of a rigid vortex lattice. Ways of the temporal increasing external magnetic field pumping of a superconductor at which the magnetic field penetrates into the sample in a form of the self-similar magnetic wave were determined. Depth and velocity of such wave distributions were defined for superconductors

which are in the viscous flow vortex phase with a nonlinear dependence of the critical current density on the magnetic field induction. Principally new is an account of the dependence of the critical current on the value of hydrostatic pressure which changes the character of the magnetic field penetration into a superconductor.

Keywords: high-temperature superconductors, magnetic field penetration, high pressure, magnetic wave front

Fig. 1. Effective localization of magnetic field in the course of power pumping by the external magnetic field at varied time: $0 < t_1 < t_2 < t_3$. Here $x_{\text{eff}}(t)$ is the point of effective field localization