УДК 681.3.06

О.С. Шкільняк

СЕМАНТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ МОДАЛЬНИХ ЛОГІК

На основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу до побудови логічних та програмних систем вивчаються композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки реномінативного, кванторного, кванторно-екваційного рівнів. Для цих логік уточнюється поняття композиційно-номінативної модальної системи, досліджуються їх семантичні властивості.

Апарат модальних і темпоральних логік успішно використовується для специфікації програм та моделювання різноманітних предметних областей. Можливості модальних логік та композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів [1] поєднують композиційно-номінативні модальні логіки [2]. Композиційно-номінативні логіки будуються на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу [3]. Він базується на спільному для логіки та програмування композиційно-номінативному підході [4], розширеному принципом інтегрованості інтенсіонального та екстенсіонального аспектів. Застосування його дало змогу побудувати [1] широкий спектр логічних формалізмів, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності.

На базі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу в [5] запропоноване спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи, визначені транзиційні та темпоральні модальні системи. В даній роботі вивчаються композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки номінативних рівнів: реномінативного, кванторного, кванторно-еквацційного. Досліджуються семантичні властивості цих логік, зокрема, відношення логічного наслідку для множин формул.

Поняття, які не визначаються у роботі, тлумачимо в сенсі [1, 5].

1. Композиційно-номінативні модальні системи

Поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) [2] є центральним поняттям композиційно-номінативної модальної логіки (КНМЛ). В роботі [5] запропоноване спеціальне уточнення поняття КНМС. Відмінність визначення КНМС із [5] від початкового визначення з [2] полягає у тому, що для логік номінативних рівнів станами світу будуть алгебраїчні системи.

Композиційно-номінативна модальна система – це об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = ((\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C), Fm, \boldsymbol{Jm})$. Тут:

– $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу;
– $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на станах світу;
– Pr – множина предикатів на даних станів світу;
– C – множина композицій на Pr;
– Fm – множина формул мови модальної логіки;
– $\boldsymbol{Jm}$ – відображення інтерпретації формул в станах світу.

Множина композицій КНМС визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями.

Важливим випадком КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС) [1, 2]. Вони лежать в основі транзиційних модальних логік (ТМЛ). У межах ТМЛ природним чином можна розглядати традиційні [6, 1] модальні логіки (алетичні, темпоральні, епістемічні тощо).

Для ТМС множина $\boldsymbol{R}$ відношень на станах світу складається з відношень вигляду $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$, які природно назвати відношеннями переходу.

В подальшому будемо розглядати ТМС, у яких множина $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення. Слідуючи

[1, 2], таке відношення будемо позначати як $\triangleright$.

ТМС із єдиним бінарним відношенням $\triangleright$ та базовими модальними композиціями $\Box$ (необхідно) і $\Diamond$ (можливо) називають загальними ТМС.

Як і в традиційних алетичних модальних логіках, композиції $\Box$ і $\Diamond$ пов'язані наступними співвідношеннями: $\neg\Diamond P = \Box\neg P$ та $\neg\Box P = \Diamond\neg P$.

Для загальних ТМС базовою модальною композицією вважаємо $\Box$. Тоді $\Diamond$ є похідною, вона визначається через $\Box$ так: $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$.

ТМС із єдиним бінарним відношенням на станах $\triangleright$ та базовими модальними композиціями $\Box\uparrow$ (завжди буде), $\Box\downarrow$ (завжди було), $\Diamond\uparrow$ (колись буде) і $\Diamond\downarrow$ (колись було) називають [2] темпоральними КНМС, а також темпоральними ТМС (ТмМС).

Композиції $\Box\uparrow$, $\Box\downarrow$, $\Diamond\uparrow$, $\Diamond\downarrow$ називають базовими часовими композиціями. Вони пов'язані співвідношеннями:

$$\neg\Diamond\uparrow P = \Box\uparrow\neg P;\ \neg\Diamond\downarrow P = \Box\downarrow\neg P;$$
$$\neg\Box\uparrow P = \Diamond\uparrow\neg P;\ \neg\Box\downarrow P = \Diamond\downarrow\neg P.$$

Для ТмМС вважаємо базовими композиції $\Box\uparrow$ та $\Box\downarrow$. Тоді композиції $\Diamond\uparrow$ та $\Diamond\downarrow$ є похідними, вони визначаються через базові: $\Diamond\uparrow P$ означає $\neg\Box\uparrow\neg P$; $\Diamond\downarrow P$ означає $\neg\Box\downarrow\neg P$.

Залежно від умов, які накладаються на відношення $\triangleright$, можна визначати різні класи загальних ТМС та ТмМС. Для прикладу розглянемо випадки, коли $\triangleright$ може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним.

Якщо $\triangleright$ рефлексивне, то в назві ТМС пишемо символ *R*; якщо $\triangleright$ транзитивне, то – *T*; якщо $\triangleright$ симетричне, то – *S*. Таким чином, отримуємо наступні системи:

1) загальних ТМС: *R*-ТМС, *T*-ТМС, *S*-ТМС, *RT*-ТМС, *RS*-ТМС, *TS*-ТМС, *RTS*-ТМС;

2) ТмМС: *R*-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС.

Введені поняття можна конкретизувати на різних рівнях абстракції. Зокрема, отримуємо загальні ТМС та ТмМС пропозиційного, реномінативного, кванторного, кванторно-еквацaverage рівнів.

Композиції КНМС пропозиційного рівня визначаються базовими модальними композиціями та базовими пропозиційними композиціями $\neg$, $\vee$.

Базовими композиціями КНМС реномінативного рівня є базові модальні композиції та базові пропозиційні композиції $\neg$ і $\vee$, до яких додається композиція реномінації $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

На кванторному рівні додатково з'являються композиції квантифікації $\exists x$ та $\forall x$. При цьому дія квантора на предикат в стані світу обмежена базовими даними цього стану.

На кванторно-еквацaverage рівні, або кванторному з рівністю, можна також порівнювати значення предметних імен, використовуючи спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за іменами предикати рівності $=_{xy}$.

2. КНМС номінативних рівнів

Для випадку КНМС реномінативного, кванторного, кванторно-еквацaverage рівнів множину станів світу $\boldsymbol{S}$ конкретизуємо як множину неокласичних [1] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$. Тут Pr_α – це множина *V*-квазіарних еквітонних предикатів ${}^{V}A_\alpha \to \{T, F\}$.

У цьому випадку $Pr = \bigcup_{\alpha\in S} Pr_\alpha$ – це множина предикатів на даних усіх станів світу.

Множину $A = \bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha$ трактуємо як множину базових даних світу.

Зауважимо, що в початковому визначенні КНМС [2] для логік номінативних рівнів множина станів світу трактується як іменна множина вигляду ${}^{V}A$, де *A* – множина базових даних світу. Тоді *Pr* – це множина *V*-квазіарних еквітонних предикатів ${}^{V}A \to \{T, F\}$.

Мова КНМЛ **кванторного рівня** описується [1, 2] наступним чином.

Алфавіт мови складається з множини V предметних імен, множини Ps предикатних символів, символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ і множини Ms символів базових модальних композицій.

Множину Ms називають модальною сигнатурою КНМС.

Множину Fm формул мови КНМЛ кванторного рівня визначаємо індуктивно:

1) кожний $p\in Ps$ є формулою, такі формули назвемо атомарними;

2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формули;

3) нехай Φ – формула, тоді $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ – формула;

4) нехай Φ – формула, тоді $\exists x\Phi$ – формула.

5) нехай Φ – формула, ⌘ – символ базової модальної композиції, тоді ⌘Φ – формула.

Для випадку загальних ТМС п. 5 уточнюється так:

5$\Box$) нехай Φ – формула, тоді $\Box\Phi$ – формула.

Для випадку темпоральних КНМС п. 5 уточнюється так:

5$\Box_{\uparrow\downarrow}$) нехай Φ – формула, тоді $\Box_{\uparrow}\Phi$ та $\Box_{\downarrow}\Phi$ – формули.

Для кожного $p\in Ps$ визначається [1] множина синтетично неістотних предметних імен за допомогою тотального відображення $\mu: Ps\to 2^V$, яке продовжуємо до $\mu: Fm\to 2^V$.

Пару $\sigma = (Ps, \mu)$ називають сигнатурою синтетичної неістотності кванторної КНМС.

Тип кванторної КНМС визначається її модальною сигнатурою Ms, однотипністю відношень із $\boldsymbol{R}$ для кожного ⌘$\in Ms$ та сигнатурою синтетичної неістотності.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $\boldsymbol{I}: Ps\times \boldsymbol{S}\to Pr$. При цьому $\boldsymbol{I}(p, \alpha)\in Pr_{\alpha}$.

Продовжимо $\boldsymbol{I}$ до $\boldsymbol{Jm}: Fm\times \boldsymbol{S}\to Pr$. При цьому $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha)\in Pr_{\alpha}$.

1) $\boldsymbol{Jm}(p, \alpha) = \boldsymbol{I}(p, \alpha)$ для всіх $p\in Ps$;

2) $\boldsymbol{Jm}(\neg\Phi, \alpha) = \neg(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha))$; $\boldsymbol{Jm}(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha), \boldsymbol{Jm}(\Psi, \alpha))$;

3) $\boldsymbol{Jm}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha))$;

4) $\boldsymbol{Jm}(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$

$$=\begin{cases} T, \text{ якщо існує } a\in A_{\alpha}: Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=T, \\ F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=F \text{ для всіх } a\in A_{\alpha}, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси для формул вигляду $\forall x\Phi$ отримуємо

$\boldsymbol{Jm}(\forall x\Phi, \alpha)(d) =$

$$=\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=T \text{ для всіх } a\in A_{\alpha}, \\ F, \text{ якщо існує } a\in A_{\alpha}: Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

5) Значення $\boldsymbol{Jm}$(⌘$\Phi, \alpha)(d)$ визначається значеннями $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \delta)(d)$ для певних станів δ, таких, що α та δ перебувають у відповідних пов'язаних із ⌘ відношеннях з $\boldsymbol{R}$.

Для випадку загальних ТМС п. 5 уточнюється так:

5$\Box$) для кожних $\alpha\in \boldsymbol{S}$ та $d\in {}^{V}A_{\alpha}$ визначимо

$\boldsymbol{Jm}(\Box\Phi, \alpha)(d) =$

$$=\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S: \alpha\rhd\delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S: \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси отримуємо

$\boldsymbol{Jm}(\Diamond\Phi, \alpha)(d) =$

$$=\begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=F \text{ для всіх } \delta\in S: \alpha\rhd\delta, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S: \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для випадку темпоральних КНМС п. 5 уточнюється так:

5$\Box_{\uparrow\downarrow}$) для кожних $\alpha\in \boldsymbol{S}$ та $d\in {}^{V}A_{\alpha}$ визначимо

$\boldsymbol{Jm}(\Box_{\uparrow}\Phi, \alpha)(d) =$

$$=\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S: \alpha\rhd\delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S: \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$\boldsymbol{Jm}(\Box_{\downarrow}\Phi, \alpha)(d) =$

$$=\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S: \delta\rhd\alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S: \delta\rhd\alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси отримуємо

$\boldsymbol{Jm}(\Diamond_{\uparrow}\Phi, \alpha)(d) =$

$$=\begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=F \text{ для всіх } \delta\in S: \alpha\rhd\delta, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S: \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$\boldsymbol{Jm}(\Diamond_{\downarrow}\Phi, \alpha)(d) =$

$$=\begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=F \text{ для всіх } \delta\in S: \delta\rhd\alpha, \\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S: \delta\rhd\alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Предикат $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, будемо позначати Φ_α.

Формула Φ істинна в стані α, якщо Φ_α – істинний предикат. Це позначаємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ істинна в КНМС $\boldsymbol{M}$, якщо для кожного $\alpha \in \boldsymbol{S}$ предикат Φ_α є істинним. Це позначаємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$.

Формула Φ всюди істинна, якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Те, що формула Φ всюди істинна, позначаємо $\models \Phi$.

Алфавіт мови КНМЛ **реномінативного рівня** складається з множини V предметних імен, множини Ps предикатних символів, символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ і символів базових модальних композицій. Множина Fm формул мови такої логіки визначається індуктивно (див. пп. 1–3 і 5 визначення мови КНМЛ кванторного рівня).

Відображення $\boldsymbol{I} : Ps \times \boldsymbol{S} \to Pr$ продовжується до $\boldsymbol{Jm} : Fm \times \boldsymbol{S} \to Pr$ так, як і для кванторного рівня (див. пп. 1–3, 5). При цьому $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$.

Загальні ТМС та ТмМС реномінативного рівня визначаються аналогічно загальним ТМС та ТмМС кванторного рівня, вилучаючи при цьому пункт для $\exists x\Phi$.

Поняття типу КНМС, істинної в стані формули, істинної в КНМС формули та всюди істинної формули на реномінативному рівні визначаємо так, як на кванторному рівні.

На **кванторно-екваційному рівні** з'являються спеціальні 0-арні композиції – предикати рівності $=_{xy}$, які визначаються [7] наступним чином.

Для кожного $d \in {}^V\!A$ покладемо

$$=_{xy}(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) = d(y); \\ F, \text{ якщо } d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y); \\ \text{невизначене, якщо } d(x)\uparrow \text{ або } d(y)\uparrow. \end{cases}$$

Множиною неістотних для $=_{xy}$ предметних імен є множина $V \setminus \{x, y\}$.

Алфавіт мови КНМЛ кванторно-екваційного рівня: множина V предметних імен, множина Ps предикатних символів, символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $=_{xy}$ та множина Ms символів базових модальних композицій – модальна сигнатура.

Множина Fm формул мови КНМЛ кванторно-екваційного рівня визначається індуктивно згідно пп. 2–5 визначення мови КНМЛ кванторного рівня та п. 1Е:

1Е) кожний $p \in Ps$ та кожний символ $=_{xy}$ є формулою. Такі формули атомарні.

Для кожного $p \in Ps$ визначається множина його синтетично неістотних предметних імен за допомогою тотального відображення $\mu : Ps \to 2^V$. Таке відображення продовжується до $\mu : Fm \to 2^V$ аналогічно [1] випадку КНМЛ кванторного рівня, додаючи $\mu(=_{xy}) = V \setminus \{x, y\}$.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $\boldsymbol{I} : Ps \times \boldsymbol{S} \to Pr$. При цьому $\boldsymbol{I}(p, \alpha) \in Pr_\alpha$ та $\boldsymbol{I}(=_{xy}) = =_{xy}$ для всіх $x, y \in V$.

Відображення $\boldsymbol{I}$ продовжимо до $\boldsymbol{Jm} : Fm \times \boldsymbol{S} \to Pr$ так, як це зроблено для випадку КНМС кванторного рівня, додаючи при цьому пункт для $=_{xy}$: $\boldsymbol{Jm}(=_{xy}, \alpha) = \boldsymbol{I}(=_{xy}, \alpha)$.

Загальні ТМС та ТмМС кванторно-екваційного рівня визначаємо аналогічно кванторному рівню, додаючи при цьому пункт для $=_{xy}$.

Поняття типу КНМС, істинної в стані формули, істинної в КНМС формули та всюди істинної формули на кванторно-екваційному рівні визначаємо так, як на кванторному рівні.

3. КНМС із сильною умовою визначеності на станах

Нехай із $\Phi_\delta(d)\downarrow$ випливає $d \in {}^V\!A_\delta$. Тоді із $(\Box\Phi)_\alpha(d) = T$ випливає $d \in {}^V\!A_\delta$ для всіх δ таких, що $\alpha \rhd \delta$. Це означає, що об'єкти не можуть зникати при переході до стану-наступника.

КНМС, в яких із $\Phi_\delta(d)\downarrow$ випливає $d \in {}^V\!A_\delta$, назвемо КНМС з сильною умовою визначеності на станах. У таких КНМС умова $\Phi_\delta(d)\downarrow$ спонукає умову $d \in {}^V\!A_\delta$, тобто при $d \notin {}^V\!A_\delta$ маємо $\Phi_\delta(d)\uparrow$. Це веде до порушення умови еквітонності.

ТМС з сильною умовою визначеності назвемо St-ТМС.

Приклад 1.

Задамо загальну St-ТМС $\boldsymbol{M}$ таким чином. Нехай $\boldsymbol{S}=\{\alpha, \beta\}$, $A_\alpha=\{a, b\}$, $A_\beta=\{b\}$, $\boldsymbol{R}=\{\alpha \triangleright \beta\}$. Нехай $d=[x \mapsto b]$, $d'=[x \mapsto b, y \mapsto a]$. Задамо тепер $p_\alpha(d)=T$, $p_\alpha(d')=T$, $p_\beta(d)=T$.

Нехай предикати p_α та p_β еквітонні. Згідно $d' \notin {}^V\!A_\beta$ маємо $p_\beta(d')\uparrow$, звідки $d \subset d'$, $(\Box p)_\alpha(d)=T$ та $(\Box p)_\alpha(d')\uparrow$, що суперечить еквітонності предиката $(\Box p)_\alpha$.

Таким чином, модальні композиції St-ТМС не зберігають еквітонність, проте вони зберігають слабшу умову, яку назвемо слабкою еквітонністю.

Функція Q на D слабко еквітонна, якщо для довільних $d, d' \in D$ таких, що $d \subseteq d'$, із умов $Q(d)\downarrow$ та $Q(d')\downarrow$ випливає $Q(d)=Q(d')$.

Приклад 2.

Слабко еквітонна функція (зокрема, предикат) не завжди продовжується до еквітонної. Справді, нехай $A=\{0\}$, а для $Q: {}^V\!A \to \{T, F\}$ маємо $Q([x \mapsto 0])=T$, $Q([y \mapsto 0])=F$, $Q([x \mapsto 0, y \mapsto 0])\uparrow$, причому для Q неістотні всі імена, окрім x та y. Тоді Q не можна продовжити до еквітонного, хоча слабка еквітонність для Q виконується.

Теорема 1. Композиція $\Box$ зберігає слабку еквітонність.

Нехай предикат Φ_α слабко еквітонний та для кожного β такого, що $\alpha \triangleright \beta$, предикат Φ_β слабко еквітонний. Нехай $d, d' \in {}^V\!A_\alpha$, $d \subseteq d'$, $(\Box\Phi)_\alpha(d)\downarrow$ та $(\Box\Phi)_\alpha(d')\downarrow$.

Припустимо супротивне: $(\Box\Phi)_\alpha(d) \neq$ $\neq (\Box\Phi)_\alpha(d')$. Можливі два випадки.

Нехай $(\Box\Phi)_\alpha(d)=T$ і $(\Box\Phi)_\alpha(d')=F$. Друге означає, що для деякого β такого, що $\alpha \triangleright \beta$, маємо $\Phi_\beta(d')=F$. Перше означає, що для кожного γ, такого, що $\alpha \triangleright \gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d)=T$. Але це вірно і для стану β, тобто $\Phi_\beta(d)=T$. Маємо $d \subseteq d'$, $\Phi_\beta(d)=T$ та $\Phi_\beta(d')=F$, що суперечить умові слабкої еквітонності для Φ_β.

Нехай $(\Box\Phi)_\alpha(d)=F$ і $(\Box\Phi)_\alpha(d')=T$. Перше означає, що для деякого β такого, що $\alpha \triangleright \beta$, маємо $\Phi_\beta(d)=F$. Друге означає, що для кожного γ, такого, що $\alpha \triangleright \gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d')=T$. Але це вірно і для стану β, тобто $\Phi_\beta(d')=T$. Маємо $d \subseteq d'$, $\Phi_\beta(d)=F$ та $\Phi_\beta(d')=T$, що суперечить умові слабкої еквітонності для Φ_β.

Обидва випадки привели до суперечності. Отже, предикат $(\Box\Phi)_\alpha$ слабко еквітонний.

Немодальні базові композиції зберігають [1] еквітонність, тому вони зберігають і слабку еквітонність. Звідси маємо як наслідок: базові композиції загальних ТМС зберігають слабку еквітонність.

Приклад 3.

У випадку загальних St-ТМС можливо $(\Box\Phi)_\alpha(d\|_{-y})=T$ та $(\Box\Phi)_\alpha(d)\uparrow$.

Задамо загальну St-ТМС $\boldsymbol{M}$ таким чином. Нехай $\boldsymbol{S}=\{\alpha, \beta\}$, $A_\alpha=\{a, b\}$, $A_\beta=\{b\}$, $\boldsymbol{R}=\{\alpha \triangleright \beta\}$. Нехай $d=[x \mapsto b, y \mapsto a]$. Тоді $d\|_{-y}=[x \mapsto b]$. Задамо $p_\alpha([x \mapsto b])=T$, $p_\alpha([x \mapsto b, y \mapsto a])=T$, $p_\beta([x \mapsto b])=T$. Звідси $(\Box p)_\alpha([x \mapsto b])=T$, $(\Box p)_\alpha([x \mapsto b, y \mapsto a])\uparrow$, тобто взявши Φ як p, маємо $(\Box\Phi)_\alpha(d)\uparrow$, $(\Box\Phi)_\alpha(d\|_{-y})=T$.

Аналогічно показуємо, що можливо $(\Box R_x^y\Phi)_\alpha(d\|_{-y})=T$ та $(\Box R_x^y\Phi)_\alpha(d)\uparrow$.

Водночас неважко переконатись, що в композиційно-номінативних логіках для довільних Q та d справджується $R_x^y Q(d\|_{-y})= R_x^y Q(d)$. Зокрема, в загальних ТМС завжди $(R_x^y \Box\Phi)_\alpha(d\|_{-y})=(R_x^y \Box\Phi)_\alpha(d)$.

Покажемо, що у випадку загальних St-ТМС номінативних рівнів справджується

Теорема 2. Для довільних α, Φ та $d \in {}^V\!A_\alpha$ виконується $R_{\bar x}^{\bar v} \Box\Phi(d)=\Box R_{\bar x}^{\bar v} \Phi(d)$.

Тут рівність розуміємо як строгу. Розглянемо всі можливі випадки.

1. Нехай $(R_{\bar x}^{\bar v} \Box\Phi)_\alpha(d)=F$. Тоді $(\Box\Phi)_\alpha d\nabla v \mapsto d(x))=F$, звідки для деякого стану $\beta \in \boldsymbol{S}$, такого, що $\alpha \triangleright \beta$, маємо $\Phi_\beta(d\nabla v \mapsto d(x))=F$. Але із $(\Box R_{\bar x}^{\bar v} \Phi)_\alpha(d)=T$ випливає, що для такого β необхідно $(R_{\bar x}^{\bar v} \Phi)_\beta(d)=T$, звідки $\Phi_\beta(d\nabla v \mapsto d(x))=T$. Отримали суперечність. Із $(\Box R_{\bar x}^{\bar v} \Phi)_\alpha(d)\uparrow$

випливає, що для кожного γ, такого, що $\alpha\rhd\gamma$, неможливо $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)\gamma(d)=F$, тому неможливо $\Phi_\gamma(d\nabla v\mapsto d(x))=F$, звідки неможливо $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))=F$. Знову суперечність.

Нехай $(\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=F$. Тоді для деякого стану $\beta\in \boldsymbol{S}$, такого, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\beta(d)=F$, звідки $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))=F$. Але із $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)=T$ випливає, що $(\Box\Phi)_\alpha d\nabla v\mapsto d(x))=T$, тому для такого β необхідно $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))=T$. Маємо суперечність. Із $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)\uparrow$ випливає $(\Box\Phi)_\alpha d\nabla v\mapsto d(x))\uparrow$, тому для кожного γ, такого, що $\alpha\rhd\gamma$, неможливо $\Phi_\gamma(d\nabla v\mapsto d(x))=F$, звідки неможливо $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))=F$. Знову суперечність.

Таким чином, $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)=F \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=F$.

2. Нехай $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)=T$. Якщо $(\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)\uparrow$, то для кожного γ такого, що $\alpha\rhd\gamma$, неможливо $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\gamma(d)=F$, причому $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\beta(d)\uparrow$ хоч для одного β, такого, що $\alpha\rhd\beta$, звідки для такого β маємо $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))\uparrow$. Але з $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)=T$ отримуємо $(\Box\Phi)_\alpha(d\nabla v\mapsto d(x))=T$, тому для такого β мусить бути $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))=T$. Маємо суперечність.

Неможливість $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)=T$ та $(\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=F$ була показана раніше.

Нехай $(\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T$. Якщо $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)\uparrow$, то $(\Box\Phi)_\alpha(d\nabla v\mapsto d(x))\uparrow$, тому для кожного γ, такого, що $\alpha\rhd\gamma$, неможливо $\Phi_\gamma(d\nabla v\mapsto d(x))=F$, причому $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))\uparrow$ хоч для одного β, такого, що $\alpha\rhd\beta$. Але з $(\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T$ для такого β маємо $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\beta(d)=T$, звідки $\Phi_\beta(d\nabla v\mapsto d(x))=T$. Маємо суперечність.

Неможливість $(\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T$ та $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)=F$ вже показана раніше.

Таким чином, $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)=T \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T$.

Отримали $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi)_\alpha(d)=(\Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)$, що й доводить теорему.

Наслідок 1. Для довільних α, Φ та $d\in {}^VA_\alpha$ виконується $R_{\bar x}^{\bar v}\,\Diamond\Phi(d)=\Diamond\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi(d)$.

Наслідок 2. Для довільних α та Φ виконується:

1) $\alpha \models R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi \leftrightarrow \Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$ та $\alpha \models R_{\bar x}^{\bar v}\,\Diamond\,\Phi \leftrightarrow \Diamond\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$;

2) $\alpha \models R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$ та $\alpha \models R_{\bar x}^{\bar v}\,\Diamond\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Diamond\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$.

Наслідок 3. Для загальних *St*-ТМС маємо $\boldsymbol{M} \models R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi \leftrightarrow \Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$ та $\boldsymbol{M} \models R_{\bar x}^{\bar v}\,\Diamond\Phi \leftrightarrow \Diamond\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$.

Наслідок 4. Формули $R_{\bar x}^{\bar v}\,\Box\Phi \leftrightarrow \Box\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$ та $R_{\bar x}^{\bar v}\,\Diamond\Phi \leftrightarrow \Diamond\, R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$ всюди істинні.

Теорема 3. Для загальних *St*-ТМС маємо:

1) $\boldsymbol{M} \models \exists x\Box\Phi \to \Box\exists x\Phi$;

2) $\boldsymbol{M} \models \Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$.

Доводимо п. 1. Доведення п. 2 проводиться аналогічно.

Припустимо супротивне: для деяких $\alpha\in \boldsymbol{S}$ та $d\in {}^VA_\alpha$ маємо $(\exists x\Box\Phi)_\alpha(d)=T$ та $(\Box\exists x\Phi)_\alpha(d)=F$. Друга умова означає, що для деякого стану $\beta\in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $(\exists x\Phi)_\beta(d)=F$. Перша умова означає, що для деякого $a\in A_\alpha$ маємо $(\Box\Phi)_\alpha(d\nabla x\mapsto a)=T$, тому для кожного стану $\gamma\in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd\gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d\nabla x\mapsto a)=T$. Зокрема, для стану β маємо: $\Phi_\beta(d\nabla x\mapsto a)=T$ для деякого $a\in A_\alpha$. Із визначеності $\Phi_\beta(d\nabla x\mapsto a)$ випливає $d\nabla x\mapsto a\in {}^VA_\beta$, звідки $a\in A_\beta$. Але із $(\exists x\Phi)_\beta(d)=F$ випливає: $\Phi_\beta(d\nabla x\mapsto b)=F$ для всіх $b\in A_\beta$. Згідно $a\in A_\beta$ це вірно для a, тому $\Phi_\beta(d\nabla x\mapsto a)=F$. Отримали суперечність.

Наслідок 5. Формули $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$, $\Diamond\forall x\Phi\to\forall x\Diamond\Phi$, $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Diamond\Phi\to\Diamond\exists x\Phi$ усюди істинні.

4. КНМС із загальною умовою визначеності на станах

Будемо вважати, що $d\in {}^{V}A_{\delta}$ не є обов'язковим для $\Phi_{\delta}(d)\downarrow$. Для цього при $d\notin {}^{V}A_{\delta}$ задамо $\Phi_{\delta}(d) = \Phi_{\delta}(d\cap {}^{V}A_{\delta})$. ТМС із такою загальною умовою визначеності назвемо *Gn*-ТМС.

Теорема 4. Для випадку загальних *Gn*-ТМС композиція $\Box$ зберігає еквітонність.

Нехай предикат Φ_{α} еквітонний та для кожного β, такого, що $\alpha\triangleright\beta$, предикат Φ_{β} еквітонний. Нехай $d, d'\in {}^{V}A_{\alpha}$, $d\subseteq d'$ та $(\Box\Phi)_{\alpha}(d)\downarrow$. Можливі два випадки.

Нехай $(\Box\Phi)_{\alpha}(d) = F$. Тоді для деякого β, такого, що $\alpha\triangleright\beta$, маємо $\Phi_{\beta}(d\cap {}^{V}A_{\beta}) = F$. При $d\subseteq d'$ маємо $d\cap {}^{V}A_{\beta}\subseteq d'\cap {}^{V}A_{\beta}$, тому $\Phi_{\beta}(d'\cap {}^{V}A_{\beta}) = F$ за еквітонністю Φ_{β}, звідки $(\Box\Phi)_{\alpha}(d') = F$.

Нехай $(\Box\Phi)_{\alpha}(d) = T$. Тоді для кожного γ, такого, що $\alpha\triangleright\gamma$, маємо $\Phi_{\gamma}(d\cap {}^{V}A_{\gamma}) = T$. При умові $d\subseteq d'$ маємо $d\cap {}^{V}A_{\gamma}\subseteq d'\cap {}^{V}A_{\gamma}$, тому за еквітонністю Φ_{γ} маємо $\Phi_{\gamma}(d'\cap {}^{V}A_{\gamma}) = T$. Це вірно для кожного γ, такого, що $\alpha\triangleright\gamma$, звідки $(\Box\Phi)_{\alpha}(d') = T$.

Отже, предикат $(\Box\Phi)_{\alpha}$ еквітонний.

Наслідок 6. Базові композиції загальних *Gn-ТМС* зберігають еквітонність.

Для загальних *Gn*-ТМС справджується твердження, аналогічне теоремі 2.

Теорема 5. Для довільних α, Φ та $d\in {}^{V}A_{\alpha}$ виконується $R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi(d) = \Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi(d)$.

Спочатку сформулюємо технічне твердження, яке доводиться на основі визначень.

Лема. Для довільних β та $d\in {}^{V}A_{\alpha}$ $(d\cap {}^{V}A_{\beta})\nabla\bar v\mapsto(d\cap {}^{V}A_{\beta})(\bar x) = (d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\beta}$.

Доводимо теорему 5. Припустимо супротивне: для деяких $\alpha\in \boldsymbol{S}$, $d\in {}^{V}A_{\alpha}$ та Φ маємо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d)\neq(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d)$.

Розглянемо всі можливі випадки.

Нехай $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d) = F$. Це означає, що для деякого $\beta\in \boldsymbol{S}$, такого, що $\alpha\triangleright\beta$, маємо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\beta}(d\cap {}^{V}A_{\beta}) = F$, звідки отримуємо $\Phi_{\beta}((d\cap {}^{V}A_{\beta})\nabla\bar v\mapsto(d\cap {}^{V}A_{\beta})(\bar x)) = F$. Згідно леми $(d\cap {}^{V}A_{\beta})\nabla\bar v\mapsto(d\cap {}^{V}A_{\beta})(\bar x) = (d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\beta}$, звідки $\Phi_{\beta}((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\beta}) = F$.

Якщо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d) = T$, то маємо $(\Box\Phi)_{\alpha}(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x)) = T$, звідки для такого β отримуємо $\Phi_{\beta}((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\beta}) = T$ – суперечність. Якщо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d)\uparrow$, то маємо $(\Box\Phi)_{\alpha}(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\uparrow$. Це означає, що для кожного γ такого, що $\alpha\triangleright\gamma$, неможливо $\Phi_{\gamma}((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\gamma}) = F$, адже тоді $(\Box\Phi)_{\alpha}(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x)) = F$. Згідно $\alpha\triangleright\beta$, це вірно, зокрема, і для стану β, тобто неможливо $\Phi_{\beta}((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\beta}) = F$. Знову отримали суперечність.

Таким чином, $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d) = F \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d) = F$.

Нехай $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d) = T$. Неможливим є $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d) = F$, адже тоді $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d) = F$. Нехай $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d)\uparrow$, тоді $(\Box\Phi)_{\alpha}(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\uparrow$.

Згідно $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d) = T$ для кожного γ, такого, що $\alpha\triangleright\gamma$, маємо $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\gamma}(d\cap {}^{V}A_{\gamma}) = T$, тому $\Phi_{\gamma}((d\cap {}^{V}A_{\gamma})\nabla\bar v\mapsto(d\cap {}^{V}A_{\gamma})(\bar x)) = T$. Але згідно леми $(d\cap {}^{V}A_{\gamma})\nabla\bar v\mapsto(d\cap {}^{V}A_{\gamma})(\bar x) =$ $= (d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\gamma}$, звідки для кожного γ, такого, що $\alpha\triangleright\gamma$, отримуємо $\Phi_{\gamma}((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\gamma}) = T$. Це суперечить умові $(\Box\Phi)_{\alpha}(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\uparrow$. Отже, якщо $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d) = T$, то $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d) = T$.

Нехай $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d) = T$. Неможливим є $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d) = F$, адже згідно вищедоведеного тоді $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d) = F$. Нехай $(\Box\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\alpha}(d)\uparrow$, тоді $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi)_{\beta}(d\cap {}^{V}A_{\beta})\uparrow$ хоча б для одного β, такого, що $\alpha\triangleright\beta$, звідки $\Phi_{\beta}((d\cap {}^{V}A_{\beta})\nabla\bar v\mapsto(d\cap {}^{V}A_{\beta})(\bar x))\uparrow$. Але згідно леми маємо $(d\cap {}^{V}A_{\gamma})\nabla\bar v\mapsto(d\cap {}^{V}A_{\gamma})(\bar x) =$ $= (d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\gamma}$, звідки отримуємо $\Phi_{\beta}((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))\cap {}^{V}A_{\beta})\uparrow$.

Із умови $(R^{\bar v}_{\bar x}\,\Box\Phi)_{\alpha}(d) = T$ маємо $(\Box\Phi)_{\alpha}(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x)) = T$, звідки для такого стану β маємо $\Phi_\beta((d\nabla\bar{v}\mapsto d(\bar{x}))\cap{}^V A_\beta) = T$ Отримали суперечність. Отже, якщо $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Box\Phi)_\alpha(d) = T$, то $(\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi)_\alpha(d) = T$.

Таким чином, $(\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi)_\alpha(d) = T \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Box\Phi)_\alpha(d) = T$.

Отже, $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Box\Phi)_\alpha(d) = (\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi)_\alpha(d)$, що завершує доведення теореми.

Як наслідок теореми 5, для *Gn*-ТМС отримуємо твердження, вищесформульовані як наслідки 1–4.

Таким чином, символи реномінації можна проносити через символи модальних композицій, що за умови нескінченності множини тотально неістотних імен [1] дає змогу перетворити формулу до класичноподібного вигляду, коли символи реномінації застосовні тільки до символів базових предикатів.

Для випадку *Gn*-ТМС справджується твердження, аналогічне теоремі 3.

Теорема 6. Для загальних *Gn*-ТМС маємо

1) $\boldsymbol{M} \models \exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$;

2) $\boldsymbol{M} \models \Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$.

Доведемо п. 2. Доведення п. 1 проводиться аналогічно.

Припустимо супротивне: для деяких $\alpha\in\boldsymbol{S}$ та $d\in{}^V A_\alpha$ маємо $(\Box\forall x\Phi)_\alpha(d) = T$ та $(\forall x\Box\Phi)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає, що для деякого $a\in A_\alpha$ маємо $(\Box\Phi)_\alpha(d\nabla x\mapsto a) = F$, тому для деякого стану $\beta\in\boldsymbol{S}$, такого, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $\Phi_\beta((d\nabla x\mapsto a)\cap{}^V A_\beta) = F$.

Згідно $(\Box\forall x\Phi)_\alpha(d) = T$ для такого стану β маємо $(\forall x\Phi)_\beta(d\cap{}^V A_\beta) = T$, звідки $\Phi_\beta((d\cap{}^V A_\beta)\nabla x\mapsto b) = T$ для всіх $b\in A_\beta$.

Розглянемо два випадки.

Нехай $a\in A_\beta$. Тоді маємо $(d\nabla x\mapsto a)\cap{}^V A_\beta) = (d\cap{}^V A_\beta)\nabla x\mapsto a$, звідки $\Phi_\beta((d\nabla x\mapsto a)\cap{}^V A_\beta) = \Phi_\beta((d\cap{}^V A_\beta)\nabla x\mapsto a) = F$. Але $\Phi_\beta((d\cap{}^V A_\beta)\nabla x\mapsto b) = T$ для всіх $b\in A_\beta$, зокрема, для стану $a\in A_\beta$ маємо $\Phi_\beta((d\cap{}^V A_\beta)\nabla x\mapsto a) = T$ – суперечність.

Нехай $a\notin A_\beta$. Тоді отримуємо $(d\nabla x\mapsto a)\cap{}^V A_\beta) = (d\cap{}^V A_\beta)\|_{-x}$, звідки маємо $\Phi_\beta((d\nabla x\mapsto a)\cap{}^V A_\beta) = \Phi_\beta((d\cap{}^V A_\beta)\|_{-x}) = F$. Але $(d\cap{}^V A_\beta)\|_{-x}\subset(d\cap{}^V A_\beta)\nabla x\mapsto b$ для кожного $b\in A_\beta$, звідки за еквітонністю Φ_β маємо $\Phi_\beta((d\cap{}^V A_\beta)\nabla x\mapsto b) = F$. Це суперечить умові $\Phi_\beta((d\cap{}^V A_\beta)\nabla x\mapsto b) = T$ для всіх $b\in A_\beta$.

Наслідок 7. Формули $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$, $\Diamond\forall x\Phi\to\forall x\Diamond\Phi$, $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Diamond\Phi\to\Diamond\exists x\Phi$ є всюди істинними.

Приклад 4. Формули $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$ та $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ не є всюди істинними.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$. Нехай $\boldsymbol{S} = \{\alpha, \beta\}$, $\boldsymbol{R} = \{\alpha\rhd\beta\}$, $A_\alpha = \{a\}$, $A_\beta = \{a, b\}$. Візьмемо ПС p, для якого неістотні всі імена, окрім x. Задамо $p_\alpha([x\mapsto a]) = F$, $p_\beta([x\mapsto a]) = F$, $p_\beta([x\mapsto b]) = T$. Тоді $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$, звідки згідно $A_\alpha = \{a\}$ маємо $(\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$ Згідно $p_\beta([x\mapsto b]) = T$ отримуємо $(\exists x\, p)_\beta([x\mapsto a]) = T$, звідки $(\Box\exists x\, p)_\alpha([x\mapsto a]) = T$.

Отже, $(\Box\exists x\, p\to\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$, тому $\alpha \models\!\!\!\!/\, (\Box\exists x\, p\to\exists x\Box p$.

Загальну ТМС, в якій спростовується формула $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$, будуємо аналогічно, з тією лише відмінністю, що задамо $p_\alpha([x\mapsto a]) = T$, $p_\beta([x\mapsto a]) = T$, $p_\beta([x\mapsto b]) = F$. Тоді $(\forall x\, p)_\beta([x\mapsto a]) = F$, звідки $(\Box\forall x\, p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$. Згідно $\boldsymbol{R} = \{\alpha\rhd\beta\}$ із $p_\beta([x\mapsto a]) = T$ випливає $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = T$. Згідно $A_\alpha = \{a\}$ звідси отримуємо $(\forall x\Box p)_\alpha([x\mapsto a]) = T$.

Отже, $(\forall x\Box p\to\Box\forall x\, p)_\alpha([x\mapsto a]) = F$, звідки $\alpha \models\!\!\!\!/\, \forall x\Box p\to\Box\forall x\, p$.

Звідси як наслідок: формули $\forall x\Diamond\Phi\to\Diamond\forall x\Phi$ та $\Diamond\exists x\Phi\to\exists x\Diamond\Phi$ не є всюди істинними.

Зауваження. $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ – це конверсія формули $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$, відомої як формула Баркан. Як показує приклад 4, формула Баркан не є всюди істинною. Згідно наслідку теореми 6 конверсія формули Баркан істинна в кожній загальній КМС. Водночас конверсія формули Баркан спростовується [8] на деяких реляційних моделях алетичної модальної логіки. Проте суперечності тут немає, адже ми розглядаємо часткові предикати. При умові $d\notin{}^V A_\beta$ в реляційній моделі традиційної модальної логіки значення $\Phi_\beta(d)$ вважається хибним. У нас для випадку

St-ТМС при $d\notin {}^VA_\beta$ значення $\Phi_\beta(d)$ вважається невизначеним, а для випадку *Gn*-ТМС при $d\notin {}^VA_\beta$ значення $\Phi_\beta(d) = \Phi_\beta(d\cap {}^VA_\beta)$ може бути як невизначеним, так і визначеним, причому як істинним, так і хибним.

5. ТМС кванторно-екваційного рівня

Семантичні властивості ТМС кванторно-екваційного рівня успадковують властивості ТМС кванторного рівня. Наведемо тепер нові властивості, пов'язані з рівністю. У першу чергу, це відомі [7] загальнологічні властивості, притаманні як КНМЛ, так і композиційно-номінативним логікам квазіарних предикатів.

Rf) рефлексивність: $|= =_{xx}$;

Sm) симетричність: $|= =_{xy} \leftrightarrow =_{yx}$;

Tr) транзитивність: $|= =_{xy} \to =_{yz} \to =_{xz}$;

EΦ) $|= =_{x_1y_1} \to \ldots \to =_{x_ny_n} \to$

$\to(R^{z_1,\ldots,z_n,\bar{u}}_{x_1,\ldots,x_n,\bar{v}}\Phi \leftrightarrow R^{z_1,\ldots,z_n,\bar{u}}_{y_1,\ldots,y_n,\bar{v}}\Phi)$.

Неважко переконатись, що для довільних Q та $d\in {}^VA$ за умови $d(x) = d(y)$ маємо $R^x_yQ(d) = R^y_xQ(d) = Q(d)$. Зокрема, $R^x_yQ(d) = R^y_xQ(d) = Q(d)$ за умови $=_{xy}(d) = T$. Аналогічно за умови $d(x) = d(y)$ маємо $R^{y,\bar{u}}_{x,\bar{v}}Q(d) = R^{x,\bar{u}}_{y,\bar{v}}Q(d) = R^{\bar{u}}_{\bar{v}}Q(d)$.

Звідси отримуємо такі властивості рівності:

ER) $|= =_{xy} \to (R^x_y\Phi \leftrightarrow \Phi)$ та

$|= =_{xy} \to (R^{x,\bar{u}}_{y,\bar{v}}\Phi \leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}\Phi)$;

$|= =_{xy} \to (R^x_y\Phi \leftrightarrow R^y_x\Phi)$ та

$|= =_{xy} \to (R^{y,\bar{u}}_{x,\bar{v}}\Phi \leftrightarrow R^{x,\bar{u}}_{y,\bar{v}}\Phi)$.

Замість $=_{xy}$ будемо надалі також традиційно писати $x = y$.

Зауважимо, що вибране нами трактування рівності як тотожності веде до того, що для одного і того ж даного d неможливо в одному стані $d(x){\downarrow} = d(y){\downarrow}$, а в іншому – $d(x){\downarrow} \neq d(y){\downarrow}$.

Для загальних *St*-ТМС і *Gn*-ТМС справджуються такі властивості, пов'язані з рівністю.

Твердження 1. $x = y \to \Box\, x = y$ – всюди істинна формула.

Припустимо супротивне: для деяких $\alpha\in \boldsymbol{S}$ та $d\in {}^VA_\alpha$ маємо $(x = y)_\alpha(d) = T$ та $(\Box\, x = y)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає, що для деякого стану $\beta\in \boldsymbol{S}$, такого, що $\alpha\triangleright\beta$, маємо $(x = y)_\beta(d) = F$. Звідси випливає $d(x){\downarrow}$, $d(y){\downarrow}$ та $d(x) \neq d(y)$. Із визначеності $(x = y)_\alpha(d)$ випливає $d(x)\in A_\alpha$ та $d(y)\in A_\alpha$, Тоді $d(x) \neq d(y)$ дає $(x = y)_\alpha(d) = F$. Отримали суперечність.

Твердження 2. $\Box\, x = y \to x = y$ – всюди істинна формула.

Припустимо супротивне: для деяких $\alpha\in \boldsymbol{S}$ та $d\in {}^VA_\alpha$ маємо $(\Box\, x = y)_\alpha(d) = T$ та $(x = y)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає, що $d\in {}^VA_\alpha$, $d(x){\downarrow}$, $d(y){\downarrow}$ та $d(x) \neq d(y)$. Умова $(\Box\, x = y)_\alpha(d) = T$ означає, що для всіх $\beta\in \boldsymbol{S}$, таких, що $\alpha\triangleright\beta$, маємо $(x = y)_\beta(d) = T$. Візьмемо деякий такий стан β. Тоді маємо $d(x){\downarrow}$, $d(y){\downarrow}$ та $d(x) = d(y)$. Отримали суперечність.

Наслідок 8. $x = y \leftrightarrow \Box\, x = y$ – всюди істинна формула.

Твердження 3. Неможливо $\alpha\, |= x = y$ та $\alpha\, |\neq \Box\, x = y$.

Припустимо супротивне: $\alpha\, |= x = y$ та $(\Box\, x = y)_\alpha(d){\downarrow} = F$ для деякого $d\in {}^VA_\alpha$. Але $(\Box\, x = y)_\alpha(d) = F$ означає, що для деякого стану $\beta\in \boldsymbol{S}$, такого, що $\alpha\triangleright\beta$, маємо $(x = y)_\beta(d) = F$. Звідси випливає $d(x){\downarrow}$, $d(y){\downarrow}$ та $d(x) \neq d(y)$. Згідно $d\in {}^VA_\alpha$ звідси $d(x)\in A_\alpha$, $d(y)\in A_\alpha$ та $d(x) \neq d(y)$, що дає $(x = y)_\alpha(d) = F$. Отримали суперечність із $\alpha\, |= x = y$.

Твердження 4. Можливо $\alpha\, |\neq x = y$ та $\alpha\, |= \Box\, x = y$.

Умова $\alpha\, |\neq x = y$ означає: для деякого $d\in {}^VA_\alpha$ маємо $(x = y)_\alpha(d) = F$, звідки $d(x){\downarrow}$, $d(y){\downarrow}$ та $d(x) \neq d(y)$. Побудуємо загальну ТМС, в якій для деякого стану α маємо $\alpha\, |= \Box\, x = y$ та $\alpha\, |\neq x = y$. Нехай $\boldsymbol{S} = \{\alpha, \beta\}$, де $A_\alpha = \{0, 1\}$, $A_\beta = \{1\}$. Нехай $\boldsymbol{R} = \{\alpha\triangleright\beta\}$. Тоді для $d\in \{0, 1\}^{\{x, y\}}$ маємо:

якщо $den\ (d) = \{1\}$, то $(x=y)_\alpha(d) = T$ та $(x=y)_\beta(d) = T$; якщо $den(d) = \{0\}$, то $(x=y)_\alpha(d) = T$ та $(x=y)_\beta(d)\uparrow$; якщо $den(d) = \{0, 1\}$, то $(x=y)_\alpha(d) = F$ та $(x=y)_\beta(d)\uparrow$.

Враховуючи неістотність для $x=y$ всіх предметних імен, відмінних від x та y, звідси $\alpha \models \Box\, x=y$ та $\alpha \not\models x=y$.

Зауважимо, що $\alpha \models \Box\, x=y$ можливе вже при неіснуванні станів, досяжних із α, тоді $(\Box\, x=y)_\alpha(d)\uparrow$ для всіх $d\in {}^VA_\alpha$.

6. Темпоральні КНМС

Як і для випадку загальних ТМС, можна розглядати темпоральні КНМС із сильною умовою та загальною умовою визначеності на станах, які назвемо *St*-ТмМС та *Gn*-ТмМС.

Твердження теореми 4 переноситься на випадок *Gn*-ТмМС.

Теорема 7. У випадку *Gn*-ТмМС композиції $\Box_\uparrow$ та $\Box_\downarrow$ зберігають еквітонність.

Наслідок 9. Базові композиції *Gn*-ТмМС зберігають еквітонність.

Вищенаведені властивості загальних ТМС переносяться на випадок темпоральних КНМС. Зокрема, для *St*-ТмМС та *Gn*-ТмМС справджуються твердження:

Теорема 8. Для довільних Φ, α, $d\in {}^VA_\alpha$ виконується $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\uparrow\Phi(d) = \Box_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi(d)$ та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\downarrow\Phi(d) = \Box_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi(d)$.

Наслідок 10. Для довільних Φ, α, $d\in {}^VA_\alpha$ виконується $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\uparrow\Phi(d) = \Diamond_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi(d)$ та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\downarrow\Phi(d) = \Diamond_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi(d)$.

Наслідок 11. Для довільних α та Φ виконується:

1) $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\uparrow\Phi \leftrightarrow \Box_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\downarrow\Phi \leftrightarrow \Box_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\uparrow\Phi \leftrightarrow \Diamond_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\downarrow\Phi \leftrightarrow \Diamond_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$;

2) $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\uparrow\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\downarrow\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\uparrow\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Diamond_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\downarrow\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Diamond_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$.

Наслідок 12. Для ТмМС маємо:

$\boldsymbol{M} \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\uparrow\Phi \leftrightarrow \Box_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\boldsymbol{M} \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\downarrow\Phi \leftrightarrow \Box_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\boldsymbol{M} \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\uparrow\Phi \leftrightarrow \Diamond_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$\boldsymbol{M} \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\downarrow\Phi \leftrightarrow \Diamond_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$.

Наслідок 13. Формули

$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\uparrow\Phi \leftrightarrow \Box_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Box_\downarrow\Phi \leftrightarrow \Box_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$,

$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\uparrow\Phi \leftrightarrow \Diamond_\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Diamond_\downarrow\Phi \leftrightarrow \Diamond_\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$

усюди істинні.

Таким чином, у випадку ТмМС номінативних рівнів символи реномінації можна проносити через символи модальних композицій.

Теорема 9. Для ТмМС маємо

1) $\boldsymbol{M} \models \exists x\Box_\uparrow\Phi \to \Box_\uparrow\exists x\Phi$ та

$\boldsymbol{M} \models \exists x\Box_\downarrow\Phi \to \Box_\downarrow\exists x\Phi$;

2) $\boldsymbol{M} \models \Box_\uparrow\forall x\Phi \to \forall x\Box_\uparrow\Phi$ та

$\boldsymbol{M} \models \Box_\downarrow\forall x\Phi \to \forall x\Box_\downarrow\Phi$.

Наслідок 14.

1) $\exists x\Box_\uparrow\Phi \to \Box_\uparrow\exists x\Phi$, $\exists x\Box_\downarrow\Phi \to \Box_\downarrow\exists x\Phi$ та $\Diamond_\uparrow\forall x\Phi \to \forall x\Diamond_\uparrow\Phi$, $\Diamond_\downarrow\forall x\Phi \to \forall x\Diamond_\downarrow\Phi$ – всюди істинні формули;

2) $\Box_\uparrow\forall x\Phi \to \forall x\Box_\uparrow\Phi$, $\Box_\downarrow\forall x\Phi \to \forall x\Box_\downarrow\Phi$ та $\exists x\Diamond_\uparrow\Phi \to \Diamond_\uparrow\exists x\Phi$, $\exists x\Diamond_\downarrow\Phi \to \Diamond_\downarrow\exists x\Phi$ – всюди істинні формули.

7. Відношення логічного наслідку для множин формул КНМЛ

Для КНМЛ номінативних рівнів поняття логічного наслідку для множин специфікованих станами формул визначається наступним чином.

Множини вигляду $d \cap {}^VA_\alpha$, де $d\in {}^VA$, будемо позначати d_α.

$\mathbf{\Delta}$ є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$ в КНМС $\boldsymbol{M}$, якщо для всіх $d\in {}^{V}\!A$ із того, що $\Phi_{\alpha}(d_{\alpha})=T$ для всіх $\Phi^{\alpha}\in\mathbf{\Gamma}$, випливає, що неможливо $\Psi_{\beta}(d_{\beta})=F$ для всіх $\Psi^{\beta}\in\mathbf{\Delta}$.

Те, що $\mathbf{\Delta}$ є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$ в КНМС $\boldsymbol{M}$, позначаємо $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

$\mathbf{\Delta}$ є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$ (щодо КНМС певного типу), якщо $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу.

Те, що $\mathbf{\Delta}$ є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$, позначаємо $\mathbf{\Gamma}\models\mathbf{\Delta}$.

Отже, $\mathbf{\Gamma}\not\models\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ існують КНМС $\boldsymbol{M}$ та $d\in {}^{V}\!A$ такі:

для всіх $\Phi^{\alpha}\in\mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_{\alpha}(d_{\alpha})=T$ та для всіх $\Psi^{\beta}\in\mathbf{\Delta}$ маємо $\Psi_{\beta}(d_{\beta})=F$.

Наведемо властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Найперше, це немодальні властивості (див. [1]), фактично успадковані від традиційної логіки.

Властивості **пропозиційного** рівня:

ПС) Якщо $\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{\Delta}\neq\varnothing$, то $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

П1) $\neg\Phi^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\Phi^{\alpha}$.

П2) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\neg\Phi^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $\Phi^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

П3) $\Phi\vee\Psi^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ $\Phi^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ та $\Psi^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

П4) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\Phi\vee\Psi^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\Phi^{\alpha},\Psi^{\alpha}$.

Властивості **реномінативного** рівня:

ФN$_{\vdash}$) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ за умови $y\in\mu(\Phi)$.

ФN$_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$ за умови $y\in\mu(\Phi)$.

RT$_{\vdash}$) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

RT$_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$.

R$\neg_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

R$\neg_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$.

R$\vee_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

R$\vee_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)^{\alpha}$.

RR$_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

RR$_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)^{\alpha}$.

R$\Box_{\vdash}$) $\mathbf{\Gamma},R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Box\Phi)^{\alpha}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma},\Box R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

R$\Box_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Box\Phi)^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\Box R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$.

Властивості **кванторного** рівня:

R$\exists_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists yR^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$, якщо $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

R$\exists_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\exists yR^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$, якщо $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

R$\exists\exists_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists z\,R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{y}_{z}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$, якщо $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$.

R$\exists\exists_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\exists z\,R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{y}_{z}(\Phi)^{\alpha}$, якщо $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$.

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ $R^{x}_{y}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models\mathbf{\Delta}$,

якщо y тотально неістотне та $y\notin nm(\mathbf{\Gamma},\mathbf{\Delta},\Phi)$.

$\exists_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\exists x\Phi^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{x}_{y_1}(\Phi)^{\alpha},\ldots,R^{x}_{y_n}(\Phi)^{\alpha},\exists x\Phi^{\alpha}$.

Властивості **кванторно-екваційного рівня**:

SmE) $x=y^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ $x=y^{\alpha}$, $y=x^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

TrE) $x=y^{\alpha},y=z^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $x=y^{\alpha},y=z^{\alpha},s=r^{\alpha},x=z^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

EФ$_{\vdash}$) $y=x^{\alpha},R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $y=x^{\alpha},R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha},R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$

EФ$_{\dashv}$) $y=x^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $y=x^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta},\ R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha},R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$.

Згідно SmE, для EФ немає потреби зазначати два випадки з $x=y^{\alpha}$ та $y=x^{\alpha}$, тому ми обмежились випадком $y=x^{\alpha}$.

ER$_{\vdash}$) $x=y^{\alpha},\Phi^{\alpha},\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $x=y^{\alpha},\Phi^{\alpha},R^{x}_{y}\Phi^{\alpha},\ R^{y}_{x}\Phi^{\alpha},\ \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\mathbf{\Delta}$.

$\mathrm{ER}_{\dashv})\ x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Phi^{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Phi^{\alpha}, R_{y}^{x}\Phi^{\alpha},\ R_{x}^{y}\Phi^{\alpha}$.

Модальні властивості формулюються однаково на пропозиційному та номінативних рівнях. Вони справджуються як для *St*-ТМС, так і для *Gn*-ТМС.

У випадку загальних ТМЛ для модального оператора $\Box$ маємо

$\Box_{\vdash})\ \Box\Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha\rhd\beta\}\cup\mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta$.

$\Box_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану β, такого, що $\alpha\rhd\beta$.

У випадку темпоральних КНМЛ властивості $\Box_{\vdash}$ та $\Box_{\dashv}$ розщеплюються:

$\Box_{\uparrow\vdash})\ \Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ \{\Phi^{\beta} \mid \alpha\rhd\beta\}\cup\mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta$.

$\Box_{\uparrow\dashv})\ \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану β, такого, що $\alpha\rhd\beta$.

$\Box_{\downarrow\vdash})\ \Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ \{\Phi^{\beta} \mid \beta\rhd\alpha\}\cup\mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta$.

$\Box_{\downarrow\dashv})\ \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану β, такого, що $\beta\rhd\alpha$.

Для КНМЛ кванторно-екваційного рівня справджуються також властивості

$\mathrm{EN}_{\vdash})\ x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta \Rightarrow \Box x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta$.

$\mathrm{EN}_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, x=y^{\alpha} \Rightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Box x=y^{\alpha}$.

Доведемо $\mathrm{EN}_{\vdash}$. Припустимо супротивне: для деякої КНМС $\boldsymbol{M}$ $x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta$ та $\Box x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \not\models_{M} \Delta$. Останнє означає: існує $d\in{}^{V}\!A$, таке, що для всіх $\Phi^{\alpha}\in\mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_{\alpha}(d_{\alpha})=T$, $\Box x=y_{\alpha}(d_{\alpha})=T$, для всіх $\Psi^{\beta}\in\Delta$ маємо $\Psi_{\beta}(d_{\beta})=F$. Умова $\Box x=y_{\alpha}(d_{\alpha})=T$ означає, що для всіх станів β, таких, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $x=y_{\beta}(d_{\alpha}\cap{}^{V}\!A_{\beta})=T$, звідки $(d_{\alpha}\cap{}^{V}\!A_{\beta})(x)\downarrow=(d_{\alpha}\cap{}^{V}\!A_{\beta})\downarrow=a$ для деякого a. Зрозуміло, що $a\in A_{\alpha}$. Але тоді $x=y_{\alpha}(d_{\alpha})=T$, звідки, враховуючи $\Phi_{\alpha}(d_{\alpha})=T$ для всіх $\Phi^{\alpha}\in\mathbf{\Gamma}$ та $\Psi_{\beta}(d_{\beta})=F$ для всіх $\Psi^{\beta}\in\Delta$, отримуємо $x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \not\models_{M} \Delta$, що суперечить припущенню.

Доведемо $\mathrm{EN}_{\dashv}$. Припустимо супротивне: для деякої КНМС $\boldsymbol{M}$ $\mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, x=y^{\alpha}$ та $\mathbf{\Gamma} \not\models_{M} \Delta, \Box x=y^{\alpha}$. Останнє означає: існує $d\in{}^{V}\!A$, таке, що для всіх $\Phi^{\alpha}\in\mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_{\alpha}(d_{\alpha})=T$, $\Box x=y_{\alpha}(d_{\alpha})=F$, а для всіх $\Psi^{\beta}\in\Delta$ маємо $\Psi_{\beta}(d_{\beta})=F$. Умова $\Box x=y_{\alpha}(d_{\alpha})=F$ означає, що для деякого β, такого, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $x=y_{\beta}(d_{\alpha}\cap{}^{V}\!A_{\beta})=F$, звідки отримуємо $(d_{\alpha}\cap{}^{V}\!A_{\beta})_{\beta}(x)\downarrow=a$ та $(d_{\alpha}\cap{}^{V}\!A_{\beta})_{\beta}(y)\downarrow=b$ для деяких a, b: $a\neq b$. Маємо $a, b\in A_{\alpha}\cap{}^{V}\!A_{\beta}\subseteq A_{\alpha}$, але тоді $x=y_{\alpha}(d_{\alpha})=F$, звідки, враховуючи $\Phi_{\alpha}(d_{\alpha})=T$ для всіх $\Phi^{\alpha}\in\mathbf{\Gamma}$ та $\Psi_{\beta}(d_{\beta})=F$ для всіх $\Psi^{\beta}\in\Delta$, отримуємо $\mathbf{\Gamma} \not\models_{M} \Delta, x=y^{\alpha}$, що суперечить припущенню.

У загальному випадку для $\mathrm{EN}_{\vdash}$ та $\mathrm{EN}_{\dashv}$ умову "$\Rightarrow$" не можна посилити до "$\Leftrightarrow$".

Приклад 5.

Можливо $x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \not\models_{M} \Delta$ та $\Box x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta$.

Задаємо КНМС $\boldsymbol{M}$ такого вигляду: $\boldsymbol{S}=\{\alpha, \beta\}$, $\boldsymbol{R}=\{\alpha\rhd\beta\}$. Нехай $A_{\alpha}=\{a, b\}$, $A_{\beta}=\{b\}$. Візьмемо $\mathbf{\Gamma}=\varnothing$, $\Delta=\{\Psi^{\alpha}\}$. Нехай для Ψ неістотними є всі імена, окрім x та y. Задамо $\Psi^{\alpha}([x\mapsto a, y\mapsto a])=F$, а у випадку $\delta\in\{a, b\}^{\{x, y\}}$ та $b\in den(\delta)$ задамо $\Psi^{\alpha}(\delta)=T$. Нехай $d=[x\mapsto a, y\mapsto a]$. Тоді $d_{\alpha}=d$. Маємо $d_{\alpha}(x)\downarrow=d_{\alpha}(y)\downarrow=a$, звідки $x=y_{\alpha}(d_{\alpha})=T$. Отже, $x=y^{\alpha} \not\models_{M} \Psi^{\alpha}$. Проте $d_{\alpha}\notin{}^{V}\!A_{\beta}$, звідки $x=y_{\beta}(d_{\alpha})\uparrow$, що дає $\Box x=y_{\alpha}(d_{\alpha})\uparrow$. У випадку $\delta\in\{a, b\}^{\{x, y\}}$ та $b\in den(\delta)$ маємо $\Psi^{\alpha}(\delta)=T$; у випадку $\delta\in\{a, b\}^{\{x, y\}}$ та $b\notin den(\delta)$ маємо $\delta=d_{\alpha}=d$, тоді $d_{\alpha}\notin{}^{V}\!A_{\beta}$, звідки $x=y_{\beta}(d_{\alpha})\uparrow$, що дає $\Box x=y_{\alpha}(d_{\alpha})\uparrow$. Отже, $\Box x=y^{\alpha} \models_{M} \Psi^{\alpha}$.

Приклад 6.

Можливо $\mathbf{\Gamma} \not\models_{M} \Delta, x=y^{\alpha}$ та $\mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Box x=y^{\alpha}$.

Візьмемо $\mathbf{\Gamma}=\{\Phi^{\alpha}\}$, $\Delta=\varnothing$. Нехай $A_{\alpha}=\{a, b\}$, $A_{\beta}=\{b\}$, а для Φ неістотними є всі імена, окрім x та y. Задамо $\Phi^{\alpha}(\delta)=T$ для всіх $\delta\in\{a, b\}^{\{x, y\}}$. Нехай $d=[x\mapsto a, y\mapsto b]$. Тоді $d_{\alpha}=d$. Маємо $d_{\alpha}(x)\downarrow\neq d_{\alpha}(y)\downarrow$, звідки $x=y_{\alpha}(d_{\alpha})=F$. Отже, $\Phi^{\alpha} \not\models_{M} x=y^{\alpha}$. Проте у випадку $a\in den(\delta)$ маємо $\delta_{\alpha}\notin{}^{V}\!A_{\beta}$, звідки $x=y_{\beta}(\delta_{\alpha})\uparrow$, що дає $\Box x=y_{\alpha}(\delta_{\alpha})\uparrow$. У випадку $\delta=[x\mapsto b, y\mapsto b]$ маємо $x=y_{\beta}(\delta_{\alpha})=T$, що дає $\Box x=y_{\alpha}(\delta_{\alpha})=T$. Отже, $\Phi^{\alpha} \models_{M} \Box x=y^{\alpha}$.

При трактуванні рівності як строгої властивості $\mathrm{EN}_{\vdash}$ та $\mathrm{EN}_{\dashv}$ можна посилити:

$\mathrm{ENS}_{\vdash})\ x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ \Box x=y^{\alpha}, \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta$.

$\mathrm{ENS}_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, x=y^{\alpha} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ \mathbf{\Gamma} \models_{M} \Delta, \Box x=y^{\alpha}$.

Для темпоральних КНМЛ кванторно-екваційного рівня $EN_{\vdash}$ та $EN_{\dashv}$ природним чином модифікуються у властивості $EN_{\uparrow\vdash}$, $EN_{\downarrow\vdash}$ та $EN_{\uparrow\dashv}$, $EN_{\downarrow\dashv}$.

Висновки

На базі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу до побудови логічних та програмних систем досліджені композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки номінативних рівнів: реномінативного, кванторного, кванторно-екваційного. Для цих логік розглядається спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи, визначаються транзиційні та темпоральні модальні системи. Вивчаються семантичні властивості таких логік, зокрема, властивості логічного наслідку для множин формул. На основі цих властивостей будуть збудовані секвенційні числення композиційно-номінативних модальних і темпоральних логік номінативних рівнів.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ «Київський університет». – 2008. – 528 с.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки // Проблемы программирования. – 2002. – № 1–2. – С. 27–33.
3. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Інтенсіонально-орієнтований підхід до побудови логічних систем // Проблеми програмування. – 2007. – № 2. – С. 15–40.
4. *Никитченко Н.С.* Предикатные композиционно–номинативные системы // Проблемы программирования. – 1999. – № 2. – С. 3–19.
5. *Шкільняк О.С.* Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення // Наукові записки НаУКМА. Серія: Комп'ютерні науки. – 2008. – Т. 6. – С. 25–34.
6. *Фейс Р.* Модальная логика.– М.: Наука. – 1974. – 520 с.
7. *Шкільняк С.С.* Неокласичні кванторні логіки з рівністю // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2003. – Вип.1. – С. 222–225.
8. Семантика модальных и интенсиональных логик. – М.: Прогресс, 1981. – 494 с.

Отримано 15.10.2009

Про автора:

Шкільняк Оксана Степанівна,
асистент кафедри інформаційних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ,
вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259-0511, (044) 522-0640 (д)
e-mail: me.oksana@gmail.com