

РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

В.В. Голубев, канд. техн. наук
Ин-т электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина

Предлагаются аналитическое решение для переходных и квазиустановившихся электромагнитных процессов в цепях переменного тока второго порядка с периодически меняющимися во времени параметрами элементов и методика его получения. Библ. 5, рис. 5.

Ключевые слова: переменный ток, установившийся процесс, импульсное регулирование, переменные параметры, высокая частота, аналитическое решение.

Аналитические исследования электромагнитных процессов в импульсных преобразователях переменного напряжения зачастую требуют определенной квалификации, затрат времени на преобразование и устранение ошибок.

В данной работе предлагаются готовое аналитическое решение для переходных и квазиустановившихся электромагнитных процессов в любых импульсных цепях второго порядка с периодически изменяющимися во времени параметрами элементов и методика его получения.

В общем случае каждый элемент (группа элементов) схемы преобразователя переменного напряжения, параметры которого изменяются по определенному наперед заданному закону, может быть заменен элементом (группой элементов) с постоянными параметрами и подключенным к нему трансформаторно-ключевым или бестрансформаторным импульсным регулятором (ИР).

При этом на каждой i -й ступени регулирования параметры источника напряжения и каждого из элементов с трансформатором заменяются приведенными ко вторичной (рис. 1) и первичной (рис. 2) сторонам их так же, как это практикуется при расчете линейных электрических цепей с трансформаторами. Причем в величине коэффициента трансформации может быть учтена и нелинейность самого трансформатора.

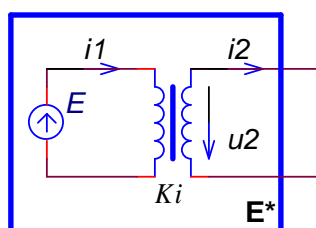


Рис. 1

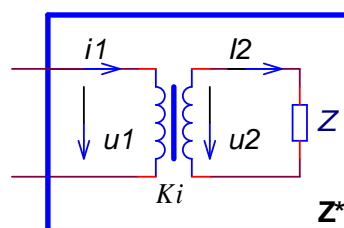


Рис. 2

Приведенные источники и элементы цепи определяются соответственно формулами

$$E^* = K_i E; Z^* = \frac{Z}{K_i^2}; L^* = \frac{L}{K_i^2}; R^* = \frac{R}{K_i^2}; C^* = K_i^2 C.$$

На рис. 3 и 4 в качестве примера представлены схемы замещения активных фильтров с более широкими функциональными возможностями, так как коэффициенты трансформации предполагаемых трансформаторов могут принимать любые положительные и отрицательные значения, присущие трансформаторно-ключевым силовым структурам произвольных конфигураций и алгоритмов управления.

На рис. 5 изображена принципиальная схема бестрансформаторного ВЧ регулятора с входным RLC -фильтром и активной нагрузкой.

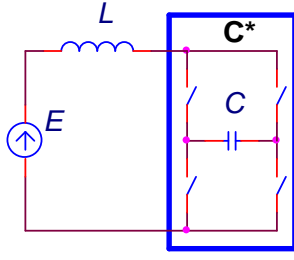


Рис. 3

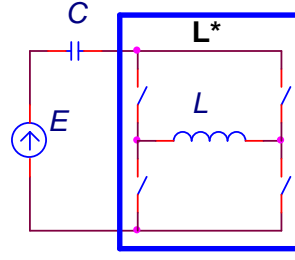


Рис. 4

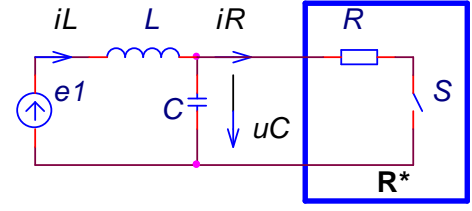


Рис. 5

Токи и напряжения в этих схемах находим так же, как и в линейных цепях с трансформаторами, но поинтервально. Переходные и установившиеся процессы в электрических цепях с накопителями энергии зависят от начальных значений переменных состояния, поэтому для обеспечения общего подхода примем следующие обозначения.

Начальные условия:

- начальные ток в дросселе $X_1 = I_{0,i,s}$ и напряжение на конденсаторе $X_2 = U_{0,i,s}$ в схеме с разнотипными реактивными элементами на i,s -м интервале регулирования;
- начальные токи $X_1 = I_{10,i,s}$ в первом по счету дросселе и $X_2 = I_{20,i,s}$ во втором по счету дросселе в схеме с двумя дросселями;
- начальные напряжения $X_1 = U_{10,i,s}$ на первом по счету конденсаторе и $X_2 = U_{20,i,s}$ на втором по счету конденсаторе в схеме с двумя конденсаторами.

Изображение по Лапласу реакции (тока в j -й ветви и/или напряжения на j -м элементе) цепей второго порядка на возмущающее периодическое воздействие описывается общим выражением:

$$Y_{j,i,s} = E(p)H_j(p) + X_1H_{1j}(p) + X_2H_{2j}(p), \quad (1)$$

где $H_j(p)$, $H'_{1j}(p)$, $H''_{2j}(p)$ – операторные передаточные функции, определяемые отношением реакции j -й ветви двухполюсника в виде тока или напряжения на возмущающее воздействие (импульсное регулирование, под которым понимаем скачкообразное изменение одного или группы параметров элементов цепи):

$$H_j(p) = \frac{\mu_{j2}p^2 + \mu_{j1}p + \mu_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2}; \quad H_{1j}(p) = \frac{\mu'_{j1}p + \mu'_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2}; \quad H_{2j}(p) = \frac{\mu''_{j1}p + \mu''_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2}. \quad (2)$$

Коэффициенты μ_0 , μ_1 , μ_2 , δ и Ω_0 передаточных функций токов и напряжений и расчетные схемы двух-, трех- и четырехэлементных двухполюсников приведены в работе [3] в качестве справочного материала. Подобные данные несложно получить для любого из всего многообразия многоэлементных двухполюсников.

Мгновенное значение реакции j -й цепи (для тока $j=1$, для напряжения $j=2$) преобразователя на изменения параметров сети, нагрузки и/или предвключенных элементов при высокочастотном (ВЧ) ИП в переходном режиме описывается общей для всех цепей второго порядка формулой [1]:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{j,i,s} = \frac{y_{j,i,s}}{U_m} = & h_{j,i} \sin(\omega t_{is} - \xi_{j,i}) + \\ & + \left[\mu_{j,2,i} \sin \theta_{is} - h_{j,i} \sin(\theta_{is} - \xi_{j,i}) + \right. \\ & \left. + X_{1,i,s} \mu'_{j,1,i} + X_{2,i,s} \mu''_{j,1,i} \right] \cos \left[\frac{\Omega_i}{\omega} (\omega t_{is} - \theta_{is}) \right] \exp \left[-\frac{\delta_i}{\omega} (\omega t_{is} - \theta_{is}) \right] + \\ & + \frac{1}{\Omega_i} \left[\begin{aligned} & -h_{j,i} \delta_i \sin(\theta_{i,s} - \xi_{j,i}) - h_{j,i} \omega \cos(\theta_{i,s} - \xi_{j,i}) + \\ & + \mu_{j,2,i} (\omega \cos \theta_{i,s} - \delta_i \sin \theta_{i,s}) + \mu_{j,1,i} \sin \theta_{i,s} - \\ & - X_{1,i,s} (\mu'_{j,1,i} \delta_i - \mu'_{j,0,i}) - X_{2,i,s} (\mu''_{j,1,i} \delta_i - \mu''_{j,0,i}) \end{aligned} \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \sin \left[\frac{\Omega_i}{\omega} (\omega t_{is} - \theta_{is}) \right] \exp \left[-\frac{\delta_i}{\omega} (\omega t_{is} - \theta_{is}) \right], \quad (3)$$

где $s=1 \dots k$ – номер интервала регулирования; k – число интервалов регулирования на периоде сети или частота регулирования, отнесенная к частоте сети; $i=1 \dots q$ – номер ступени регулирования; q – число ступеней регулирования на интервале регулирования ($\theta_{i,s} > \omega t_{i,s} > \theta_{i,s+1}$); $\theta_{i,s}$ – временная координата начала i -й ступени s -го интервала регулирования (изменения параметра одного или нескольких элементов цепи); $\theta_{i+1,s}$ – временная координата окончания i -й и начала $(i+1)$ -й ступени s -го интервала; $\theta_{i,s+1}$ – временная координата окончания s -го и начала $s+1$ -го интервалов регулирования

$$\theta_{i,s} = \frac{2\pi(s-1) + \alpha_i}{k}, \quad \theta_{i+1,s} = \frac{2\pi(s-1) + \alpha_i + \beta_i}{k}, \quad \theta_{i+q,s} = \theta_{i,s+1} = \frac{2\pi s + \alpha_i}{k}; \quad (4)$$

α_i и β_i – фаза и угол (ширина ступени) регулирования, суммарный за период сети соответственно; h_j – модуль передаточной функции (по току или напряжению) j -й реакции цепи нагрузки

$$h_j = \sqrt{(\mu_{j0} - \mu_{j2} \omega^2)^2 + \mu_{j1}^2 \omega^2} / \sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}; \quad (5)$$

ξ_j – угол сдвига j -й реакции цепи нагрузки

$$\cos \xi_j = \frac{2\delta \mu_{j1} \omega^2 - (\omega^2 - \Omega_0^2)(\mu_{j0} - \mu_{j2} \omega^2)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \sqrt{(\mu_{j0} - \mu_{j2} \omega^2)^2 + \mu_{j1}^2 \omega^2}}; \quad (6)$$

$$\sin \xi_j = \frac{(\mu_{j0} - \mu_{j2} \omega^2) 2\delta \omega + (\omega^2 - \Omega_0^2) \mu_{j1} \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \sqrt{(\mu_{j0} - \mu_{j2} \omega^2)^2 + \mu_{j1}^2 \omega^2}}. \quad (7)$$

Для расчета энергетических характеристик и оптимизации параметров схем преобразователей необходимо найти аналитическое выражение для квазипериодического процесса. Задачу решаем методом матричного припасовывания [4], разработанным для схем регулятора с любым расположением ключей и трансформаторов (трансформаторно-ключевых элементов) и апробированным в [2, 5].

Для этого подставим $\omega t_{i,s} = \theta_{i+1,s} = \theta_{i,s} + \beta_i / k$ в (3), выделим переменную s и полученные рекуррентные уравнения запишем в сокращенном виде, например, для RLC -цепи:

$$\left. \begin{aligned} I_{01,(i+1)} \cos \frac{2\pi s}{k} + I_{02,(i+1)} \sin \frac{2\pi s}{k} &= G_{11,i} \cos \frac{2\pi s}{k} + G_{12,i} \sin \frac{2\pi s}{k} + \\ &+ \left(I_{01i} \cos \frac{2\pi s}{k} + I_{02i} \sin \frac{2\pi s}{k} \right) H_{11,i} + \left(U_{01i} \cos \frac{2\pi s}{k} + U_{02i} \sin \frac{2\pi s}{k} \right) H_{12,i}; \\ U_{01,(i+1)} \cos \frac{2\pi s}{k} + U_{02,(i+1)} \sin \frac{2\pi s}{k} &= G_{21,i} \cos \frac{2\pi s}{k} + G_{22,i} \sin \frac{2\pi s}{k} + \\ &+ \left(I_{01i} \cos \frac{2\pi s}{k} + I_{02i} \sin \frac{2\pi s}{k} \right) H_{21,i} + \left(U_{01i} \cos \frac{2\pi s}{k} + U_{02i} \sin \frac{2\pi s}{k} \right) H_{22,i} \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Эта система уравнений в матричной форме выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cc} I_{01,(i+1)} & I_{02,(i+1)} \\ U_{01,(i+1)} & U_{02,(i+1)} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \cos \frac{2\pi s}{k} \\ \sin \frac{2\pi s}{k} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cc} G_{11,i} & G_{12,i} \\ G_{21,i} & G_{22,i} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \cos \frac{2\pi s}{k} \\ \sin \frac{2\pi s}{k} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cc} H_{11,i} & H_{12,i} \\ H_{21,i} & H_{22,i} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} I_{01i} & I_{02i} \\ U_{01i} & U_{02i} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \cos \frac{2\pi s}{k} \\ \sin \frac{2\pi s}{k} \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (9)$$

и сокращенно

$$\mathbf{X}_{i+1}\mathbf{g}_s = \mathbf{G}_i\mathbf{g}_s + \mathbf{H}_i\mathbf{X}_i\mathbf{g}_s \quad (10)$$

или $\mathbf{X}_{i+1,s} = \mathbf{G}_{i,s} + \mathbf{H}_i\mathbf{X}_{i,s}$.

Элементы матриц в системе уравнений (8) и (9) для j -х переменных состояния описываются в общем виде такими формулами:

$$\begin{aligned} G_{j1,i} = & -h_{j,i} \sin\left(\frac{2\pi - \alpha_i - \beta_i}{k} + \xi_{j,i}\right) + \\ & + \left[h_{j,i} \sin\left(\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \xi_{ji}\right) - \mu_{j2,i} \sin\frac{2\pi - \alpha_i}{k} \right] \cos\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega k}\right) \exp\left(-\frac{\delta_i \beta_i}{\omega k}\right) + \\ & + \left[h_{j,i} \frac{\delta_i}{\Omega_i} \sin\left(\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \xi_{j,i}\right) - h_{j,i} \frac{\omega}{\Omega_i} \cos\left(\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \xi_{j,i}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_{j1,i}}{\Omega_i} \sin\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \frac{\mu_{j2,i}}{\Omega_i} \left(\omega \cos\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \delta_i \sin\frac{2\pi - \alpha_i}{k} \right) \right] \times \\ & \times \sin\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega k}\right) \exp\left(-\frac{\delta_i \beta_i}{\omega k}\right); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} G_{j2,i} = & h_{j,i} \cos\left(\frac{2\pi - \alpha_i - \beta_i}{k} + \xi_{j,i}\right) + \\ & + \left[\mu_{j2,i} \cos\frac{2\pi - \alpha_i}{k} - h_{j,i} \cos\left(\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \xi_{j,i}\right) \right] \cos\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega k}\right) \exp\left(-\frac{\delta_i \beta_i}{\omega k}\right) + \\ & + \left[-h_{j,i} \frac{\delta_i}{\Omega_i} \cos\left(\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \xi_{j,i}\right) - h_{j,i} \frac{\omega}{\Omega_i} \sin\left(\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \xi_{j,i}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\mu_{j1,i}}{\Omega_i} \cos\frac{2\pi - \alpha_i}{k} + \frac{\mu_{j2,i}}{\Omega_i} \left(\omega \sin\frac{2\pi - \alpha_i}{k} - \delta_i \cos\frac{2\pi - \alpha_i}{k} \right) \right] \times \\ & \times \sin\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega k}\right) \exp\left(-\frac{\delta_i \beta_i}{\omega k}\right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$H_{j1,i} = \left[\mu'_{j1,i} \cos\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega k}\right) - \frac{(\mu'_{j1,i} \delta_i - \mu'_{j0,i})}{\Omega_i} \sin\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega k}\right) \right] \exp\left(-\frac{\delta_i \beta_i}{\omega k}\right); \quad (13)$$

$$H_{j2,i} = \left[\mu''_{j1,i} \cos\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega k}\right) + \frac{(\mu''_{j1,i} \delta_i - \mu''_{j0,i})}{\Omega_i} \sin\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega k}\right) \right] \exp\left(-\frac{\delta_i \beta_i}{\omega k}\right). \quad (14)$$

Примечание. Все параметры с индексом i могут менять скачком свои значения периодически от ступени к ступени по наперед заданному закону, в функции от времени или другой физической величины.

Первый этап приспособывания состоит в рекурсивной подстановке начальных значений переменных состояния, осуществляемой от ступени к ступени по параметру i в пределах интервала регулирования (см. выше).

Для этого в матричном уравнении (10) индекс i заменяем на $(i+1)$:

$$\mathbf{X}_{i+2}\mathbf{g}_s = \mathbf{G}_{i+1}\mathbf{g}_s + \mathbf{H}_{i+1}\mathbf{X}_{i+1}\mathbf{g}_s. \quad (15)$$

Далее в выражение (15) подставляем значение $\mathbf{X}_{i+1,s}$ согласно (10):

$$\mathbf{X}_{i+2}\mathbf{g}_s = \mathbf{G}_{i+1}\mathbf{g}_s + \mathbf{H}_{i+1}\mathbf{G}_i\mathbf{g}_s + \mathbf{H}_{i+1}\mathbf{H}_i\mathbf{X}_i\mathbf{g}_s. \quad (16)$$

В выражении (16) вновь вместо i подставляем $(i+1)$ и с учетом выражений (10) и (15) получаем начальные значения переменных состояния для четвертой ступени регулирования:

$$\mathbf{X}_{i+3}\mathbf{g}_s = \mathbf{G}_{i+2}\mathbf{g}_s + \mathbf{H}_{i+2}\mathbf{G}_{i+1}\mathbf{g}_s + \mathbf{H}_{i+2}\mathbf{H}_{i+1}\mathbf{G}_i\mathbf{g}_s + \mathbf{H}_{i+2}\mathbf{H}_{i+1}\mathbf{H}_i\mathbf{X}_i\mathbf{g}_s. \quad (17)$$

На основании полученных уравнений методом математической индукции значения искомых переменных в конце s -го и начале $(s+1)$ -го интервалов многоступенчатого регулирования получаем в обобщенном виде, в функции от их начальных значений $\mathbf{X}_{i,s}$ в начале s -го интервала [4]:

$$\mathbf{X}_{i+q}\mathbf{g}_s = \mathbf{X}_i\mathbf{g}_{s+1} = \left[\mathbf{G}_{i+q-1} + \sum_{n=1}^{q-1} \left(\prod_{m=1}^n \mathbf{H}_{i+q-m} \right) \mathbf{G}_{i+q-n-1} \right] \mathbf{g}_s + \left(\prod_{j=1}^q \mathbf{H}_{i+q-j} \right) \mathbf{X}_i\mathbf{g}_s. \quad (18)$$

Второй этап припасовывания выполняем по номерам интервалов на участке $[s \dots (s+k)]$, исходя из рекуррентного выражения (18), полученного в результате первого этапа припасовывания.

С целью упрощения дальнейших процедур формулу (18) перепишем в более компактном виде

$$\mathbf{X}_i\mathbf{g}_{s+1} = \mathbf{A}\mathbf{g}_s + \mathbf{B}\mathbf{X}_i\mathbf{g}_s, \quad (19)$$

введя обозначения

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_{i+q-1} + \sum_{n=1}^{q-1} \left(\prod_{m=1}^n \mathbf{H}_{i+q-m} \right) \mathbf{G}_{i+q-n-1} \quad (20)$$

и

$$\mathbf{B} = \prod_{j=1}^q \mathbf{H}_{i+q-j}. \quad (21)$$

Найдем переменные состояния в конце второго интервала, заменив в выражении (19) индексы s на $(s+1)$:

$$\mathbf{X}_i\mathbf{g}_{s+2} = \mathbf{A}\mathbf{g}_{s+1} + \mathbf{B}\mathbf{X}_i\mathbf{g}_{s+1}. \quad (22)$$

Затем, подставляя (19) в (22), получаем

$$\mathbf{X}_i\mathbf{g}_{s+2} = \mathbf{A}\mathbf{g}_{s+1} + \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{g}_s + \mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{X}_i\mathbf{g}_s. \quad (23)$$

Аналогично из выражений (19) и (24) запишем уравнение на границе третьего и четвертого интервалов регулирования:

$$\mathbf{X}_i\mathbf{g}_{s+3} = \mathbf{A}\mathbf{g}_{s+2} + \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{g}_{s+1} + \mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{g}_s + \mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{X}_i\mathbf{g}_s. \quad (24)$$

И, наконец, пользуясь методом математической индукции, получаем уравнение для начальных условий в конце k -го интервала, т.е. в конце периода повторяемости (сети)

$$\mathbf{X}_i\mathbf{g}_{s+k} = \mathbf{A}\mathbf{g}_{s+k-1} + \sum_{n=1}^{k-1} \mathbf{B}^n \mathbf{A}\mathbf{g}_{s+k-n-1} + \mathbf{B}^k \mathbf{X}_i\mathbf{g}_s \quad (25)$$

или, поскольку

$$\mathbf{g}_{s+k} = \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi(s+k)}{k} \\ \sin \frac{2\pi(s+k)}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi s}{k} \\ \sin \frac{2\pi s}{k} \end{Bmatrix} = \mathbf{g}_s; \quad (26)$$

$$\mathbf{g}_{s-1} = \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi(s-1)}{k} \\ \sin \frac{2\pi(s-1)}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi}{k} & \sin \frac{2\pi}{k} \\ -\sin \frac{2\pi}{k} & \cos \frac{2\pi}{k} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi s}{k} \\ \sin \frac{2\pi s}{k} \end{Bmatrix} = \mathbf{g}_1\mathbf{g}_s, \quad (27)$$

то получаем

$$\mathbf{X}_i = \sum_{n=1}^k \mathbf{B}^{n-1} \mathbf{A} \mathbf{g}_n + \mathbf{B}^k \mathbf{X}_i. \quad (28)$$

Откуда найдем значения переменных состояния в начале i -й степени регулирования, инвариантных относительно параметра s [4]:

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{E} - \mathbf{B}^k)^{-1} \sum_{n=1}^k \mathbf{B}^{n-1} \mathbf{A} \mathbf{g}_n, \quad (29)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица второго порядка.

Полученные начальные значения переменных состояния (инерциальных переменных), подставленные в (8), позволяют рассчитывать мгновенные значения токов и напряжений в цепях второго порядка различной конфигурации в квазиустановившемся режиме работы системы сеть – преобразователь – нагрузка при регулировании в широком диапазоне частот параметров линейных или циклическом изменении параметров нелинейных элементов схемы.

На практике чаще используется более простое двухступенчатое ($q=2$) трансформаторное и бестрансформаторное ВЧ ИР.

Двухступенчатое регулирование. Выражения (20) и (21) при двухступенчатом регулировании значительно упрощаются в соответствии с формулой (16):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= \mathbf{G}_{i+1} + \mathbf{H}_{i+1} \mathbf{G}_i = \\ &= \begin{vmatrix} M_{11,i} & M_{12,i} \\ M_{21,i} & M_{22,i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{11,i+1} G_{11,i} + H_{12,i+1} G_{21,i} + G_{11,i+1} & H_{11,i+1} G_{12,i} + H_{12,i+1} G_{22,i} + G_{12,i+1} \\ H_{21,i+1} G_{11,i} + H_{22,i+1} G_{21,i} + G_{21,i+1} & H_{21,i+1} G_{12,i} + H_{22,i+1} G_{22,i} + G_{22,i+1} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{H}_{i+1} \mathbf{H}_i = \begin{vmatrix} N_{11,i} & N_{12,i} \\ N_{21,i} & N_{22,i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{11,i+1} H_{11,i} + H_{12,i+1} H_{21,i} & H_{11,i+1} H_{12,i} + H_{12,i+1} H_{22,i} \\ H_{21,i+1} H_{11,i} + H_{22,i+1} H_{21,i} & H_{21,i+1} H_{12,i} + H_{22,i+1} H_{22,i} \end{vmatrix}. \quad (31)$$

а формула (29) остается той же для любых способов и схем регулирования:

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{E} - \mathbf{N}^k)^{-1} \sum_{n=1}^k \mathbf{N}_i^{n-1} \mathbf{M}_i \mathbf{g}_n. \quad (32)$$

При этом сохраняется ее существенный недостаток, заключающийся в том, что с ростом числа интервалов регулирования, выраженного относительной частотой k , растут степени в числителе и знаменателе правой части уравнения, что ограничивает точность и область применения этой формулы при расчетах на ЭВМ.

При малом же числе ступеней регулирования этот недостаток устраняется, так как формулы упрощаются и возникает возможность обойтись без второго этапа припасовывания. Поэтому вернемся к результатам первого этапа.

Учитывая равенство

$$\mathbf{X}_{i+2} \mathbf{g}_s = \mathbf{X}_i \mathbf{g}_{s+1} \quad (33)$$

и обозначения (30) и (31), формулу (16) перепишем в виде

$$\mathbf{X}_i \mathbf{g}_{s+1} = \mathbf{M}_i \mathbf{g}_s + \mathbf{N}_i \mathbf{X}_i \mathbf{g}_s. \quad (34)$$

Поскольку это уравнение справедливо для любого s , подставим в нем $s-1$ вместо s :

$$\mathbf{X}_i \mathbf{g}_s = \mathbf{M}_i \mathbf{g}_{s-1} + \mathbf{N}_i \mathbf{X}_i \mathbf{g}_{s-1}. \quad (35)$$

Затем, учтя в нем соотношение (27) и сократив все слагаемые на \mathbf{g}_s , получим матричное уравнение относительно искомого \mathbf{X}_i :

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{g}_1 + \mathbf{N}_i \mathbf{X}_i \mathbf{g}_1 \quad (36)$$

или

$$\mathbf{X}_i - \mathbf{N}_i \mathbf{X}_i \mathbf{g}_1 = \mathbf{M}_i \mathbf{g}_1. \quad (37)$$

Раскроем матрицы системы уравнений (37) (далее индекс ступени опускаем):

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{k} & \sin \frac{2\pi}{k} \\ -\sin \frac{2\pi}{k} & \cos \frac{2\pi}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{k} & \sin \frac{2\pi}{k} \\ -\sin \frac{2\pi}{k} & \cos \frac{2\pi}{k} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Для решения полученной системы относительно X с помощью формулы Крамера

$$X_{11} = \frac{D_{11}}{D}; \quad X_{12} = \frac{D_{12}}{D}; \quad X_{21} = \frac{D_{21}}{D}; \quad X_{22} = \frac{D_{22}}{D} \quad (39)$$

выполним необходимые преобразования и запишем систему в канонической форме:

$$\left. \begin{aligned} X_{11} \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) + X_{12} \sin \frac{2\pi}{k} - X_{21} N_{12} + X_{22} 0 &= M_{11} \\ -X_{11} \sin \frac{2\pi}{k} + X_{12} \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) + X_{21} 0 - X_{22} N_{12} &= M_{12} \\ -X_{11} N_{21} + X_{12} 0 + X_{21} \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) + X_{22} \sin \frac{2\pi}{k} &= M_{21} \\ X_{11} 0 - X_{12} N_{21} - X_{21} \sin \frac{2\pi}{k} + X_{22} \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) &= M_{22} \end{aligned} \right\}. \quad (40)$$

Определитель системы

$$D = \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) - N_{12} N_{21} \right]^2 - \sin^4 \frac{2\pi}{k} \quad (41)$$

или с учетом (31)

$$D = \left[\begin{aligned} & (H_{11,i} H_{11,i+1} + H_{12,i+1} H_{21,i} + H_{12,i} H_{21,i+1} + H_{22,i} H_{22,i+1}) \cos \frac{2\pi}{k} + \\ & + (H_{12,i} H_{21,i} - H_{11,i} H_{22,i}) (H_{11,i+1} H_{22,i+1} - H_{12,i+1} H_{21,i+1}) - \cos^2 \frac{2\pi}{k} \end{aligned} \right]^2 - \sin^4 \frac{2\pi}{k}. \quad (42)$$

Эта величина не зависит от номера ступени регулирования.

$$\begin{aligned} D_{11} &= \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) - N_{12} N_{21} \right] \times \\ &\times \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) M_{11} + N_{12} M_{21} \right] + M_{12} \sin^3 \frac{2\pi}{k}; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) - N_{12} N_{21} \right] \times \\ &\times \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) M_{12} + N_{12} M_{22} \right] - M_{11} \sin^3 \frac{2\pi}{k}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} D_{21} &= \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) - N_{12} N_{21} \right] \times \\ &\times \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) M_{21} + N_{21} M_{11} \right] + M_{22} \sin^3 \frac{2\pi}{k}; \end{aligned} \quad (45)$$

$$D_{22} = \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{22} \right) - N_{12} N_{21} \right] \times \\ \times \left[\left(\cos \frac{2\pi}{k} - N_{11} \right) M_{22} + N_{21} M_{12} \right] - M_{21} \sin^3 \frac{2\pi}{k}. \quad (46)$$

Заключення. Полученные выражения не требуют дополнительных преобразований, удобны для программирования, точного расчета и анализа целого класса преобразователей переменного напряжения в установившемся режиме с целью оптимизации их параметров и энергетических показателей.

1. Голубев В.В. Квазиустановившаяся реакция цепей второго порядка на воздействие периодического кусочно-синусоидального напряжения // Техн. електродинаміка. – 1995. – № 2. – С. 19–23.
2. Голубев В.В. Методика расчета фильтров импульсных преобразователей переменного напряжения // Техн. електродинаміка. – 1996. – №2. – С. 21–25.
3. Голубев В.В. Дествующее значение реакции цепи второго порядка на воздействие периодического кусочно-синусоидального напряжения // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України: Зб. наук. пр. – К.: ІЕД НАН України, 2006. – № 1(13). – С. 123–133.
4. Голубев В.В., Петрусенко С.В. Аналитическое описание электромагнитных процессов в импульсных преобразователях переменного напряжения с выходным RLC-фильтром и активной нагрузкой // Силовые полупроводниковые преобразователи и электрооборудование для энергосберегающих технологий. – Киев: ИЭД АН УССР, 1988. – С. 45-50.
5. Голубев В.В., Петрусенко С.В. Электромагнитные процессы в импульсном преобразователе переменного напряжения с входным RLC-фильтром // Оптимизация систем питания и электрооборудования электротехнологических установок: Сб. науч. тр. – Киев: ИЭД АН УССР, 1989. – С. 45-54.

УДК 621.314

В.В. Голубев, канд. техн. наук

Ін-т електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна

Розрахунок кіл змінного струму з періодично змінними параметрами

Пропонуються аналітичне рішення для перехідних і квазіусталених електромагнітних процесів у колах змінного струму другого порядку з періодично змінними в часі параметрами елементів та методика його одержання. Бібл. 5, рис. 5.

Ключові слова: змінний струм, усталений процес, імпульсне регулювання, змінні параметри, висока частота, аналітичне рішення.

V.V. Golubev

Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,
Peremogy, 56, Kyev-57, 03680, Ukraine

Calculation of circuits of the alternating current with periodically changing parameters

Are offered the analytical decision for the transitive and quasistatic electromagnetic processes in circuits of an alternating current of the second order with parameters of elements periodically varying in time and a technique of its reception. References 5, figures 5.

Key words: alternating current, installed process, pulse regulation, variable parameters, high frequency, analytical decision.

Надійшла 22.02.2012

Received 22.02.2012