УДК 004. 519

В.Н. КОВАЛЬ, Ю.В. КУК, Е.И. ЛАВРИКОВА, М.Н. СИНЯКОВ

СИСТЕМЫ ВЫВОДА ПО АНАЛОГИИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ НОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ

Системы основаны на определении степени близости одного продукционного правила по отношению к другому путем определения расстояния между ними. Для сравнения двух «близких» продукций используются различия в распределении вероятностей их значений. В качестве примера рассматривается применение таких систем для получения нового математического знания в теории числовых рядов. Доказывается теорема, теоретически обосновывающая применение вывода по аналогии при получении сумм неизвестных числовых рядов.

Настоящая работа посвящена получению новых математических знаний с помощью систем выводов по аналогии. Рассматривается применение таких систем при получении нового математического знания в теории числовых рядов.

Знания, которые используются в системах выводов по аналогии, представляются в виде продукционных правил типа «если $X_1 \,\&\, X_2 \,\&\, X_3 \,\&\ldots\&\, X_K$, то A», где X_1, X_2, $X_3,\ldots,X_K$, A – некоторые предикаты [1].

Разработанные нами в [2] системы вывода по аналогии основаны на принципе, что близкие условия влекут близкие следствия. Поэтому для построения выводов по аналогии в [2] вводится расстояние между предикатами, с помощью которого сравнивается степень близости одного продукционного правила по отношению к другому. Сравнение двух «близких» предикатов основывается на различиях в распределении вероятностей их значений.

В работах [2–3] рассмотрены различные виды расстояний между предикатами. Изучена взаимосвязь этих расстояний и их свойства.

1. Схема правила вывода по аналогии. Вывод по аналогии проиллюстрируем на следующем примере. Пусть требуется проверить: приведут ли условия $Y_1 \,\&\, Y_2 \,\&\, X_3 \,\&\ldots\&\, X_K$ к следствию A.

Система логического вывода обнаруживает, что в базе знаний имеется похожее знание «если X_1 & X_2 & … & X_K, то A», достоверность которого равна p. В данном знании условия X_1 и X_2 не совпадают с Y_1 и Y_2. Вычисляется степень этого несовпадения, для чего находится расстояние $d(X,Y)$ между формулами $X = X_1 \& X_2$ и $Y = Y_1 \& Y_2$. Если это расстояние не превышает порога η, то делается вывод о возможности следствия A. Достоверность данного заключения: $p' < p$. Величина, на которую уменьшится достоверность, зависит от расстояния между X и Y. Схему правила вывода по аналогии можно представить в виде

$$\frac{B', B \to A, d(B', B) < \eta}{B' \to A}. \qquad (1)$$

2. Переменный предикат. Под предикатами $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_K$, A, с помощью которых представляются знания типа «если X_1 & X_2 & X_3 & … & X_K, то A», будем понимать переменные предикаты. Дадим определение переменного предиката [2].

Определение 1. Пусть $\Pi = \left\{\pi_1^{m_1}, \pi_2^{m_2}, \ldots, \pi_r^{m_r}, \ldots\right\}$ – множество предикатных символов соответственно арности $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots$, которые называются **предикатными константами**. Под **переменным предикатным символом** или просто **предикатом** понимается знак (или последовательность знаков), обозначающий произвольный элемент из П. Множество П будем называть **множеством значений** переменного предиката.

Пусть P – переменный предикатный символ, множество значений П которого состоит из предикатных констант одинаковой арности, равной m, имеющих вид $\pi_i^m = \pi_i(x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, r, \ldots$, где $x_1, \ldots, x_m$ – символы предметных (индивидных) переменных [4]. Тогда P называется m-арным **переменным предикатом** или просто m-арным **предикатом** и обозначается $P(x_1, \ldots, x_m)$.

Для **интерпретации** m-арного переменного предиката $P(x_1, \ldots, x_m)$ необходимо указать области изменения $D_1, D_2, \ldots, D_m$ предметных переменных $x_1, \ldots, x_m$. Обычно $D_1 = D_2 = \ldots = D_m = D$. Кроме того, для каждой предикатной константы, входящей в Π, необходимо задать отображение $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_m$ в $\{И,\ Л\}$. Таким образом, **интерпретация** m-арного переменного предиката $P(x_1,\ldots,x_m)$ состоит из множества интерпретаций его значений $I(P) = \{I(\pi_1^m)$, $I(\pi_2^m), \ldots, I(\pi_r^m), \ldots\}$. При замене символов предметных переменных $x_1,\ldots,x_m$ в предикатных константах П m объектами из $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_m$ получаем множество высказываний об этих объектах. Если это множество состоит только из истинных высказываний, то будем говорить, что m объектов принадлежит *об-*

ласти истинности переменного предиката. При $m=1$ предикат характеризует «свойство» объекта, при $m>1$ – «отношение» между объектами.

3. Метрика на множестве предикатов. Для измерения степени «близости» знаний можно ввести метрику на множестве предикатов, являющихся компонентами этих знаний. Для построения такой метрики каждый переменный предикат, входящий в продукцию, будем характеризовать *вероятностями его значений* или *функцией распределения его значений*. Аналогичную метрику можно ввести на множестве формул вида $X = X_1 \,\&\, X_2 \ldots \&\, X_K$.

Пусть задан переменный m-арный предикат A с множеством значений $\Pi = \left\{ \pi_1^m, \pi_2^m, \ldots, \pi_r^m, \ldots \right\}$.

Определение 2. Под **вероятностью** p_i **значения** π_i^m **переменного предиката** будем понимать вероятность события, состоящего в том, что предикатная константа π_i^m примет логическое значение *«ИСТИНА»* при подстановке в переменный предикат вместо аргументов произвольных m объектов из области истинности переменного предиката.

Вектор вероятностей $G = \left\{ p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots \right\}$ называется вектором *распределения вероятностей переменного предиката.* Он представляет собой аналог плотности вероятностей для случайной величины, принимающей дискретные значения.

Формулы также будем характеризовать *вероятностями значений*. Для этого понадобится понятие *значения* формулы. Пусть задана формула $X = X_1 \,\&$ $\&\, X_2 \,\&\ldots\&\, X_K$. Обозначим множество значений предиката X_i арности m_i через $\Pi_i = \left\{ \pi_{1i}^{m_i}, \pi_{2i}^{m_i}, \ldots, \pi_{ri}^{m_i}, \ldots \right\}$.

Определение 3. Значениями формулы X называются элементы множества $W = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \ldots \times \Pi_K$.

Таким образом, под значениями формулы понимаются векторы, компонентами которых являются значения переменных предикатов, входящих в формулу.

Определение 4. Под **вероятностью** p_i **значения** $w_i \in W$ **формулы** X будем понимать вероятность события, состоящего в том, что все предикатные константы, составляющие w_i, примут логическое значение *«ИСТИНА»* при подстановке в формулу вместо аргументов объектов из областей истинности переменных предикатов, составляющих эту формулу.

Для удобства отображения значений предиката на прямую R введем масштабируемую функцию, которая значению предиката с индексом i ставит во взаимно однозначное соответствие точку $g(i)$, равную $g(i) = ai + b$, где a – некоторое положительное число, а b – произвольное число. Числа a и b определяют соответственно масштаб и начало отсчета отображения значений предиката на прямую R. Значение w_j формулы $X = X_1 \& X_2 \ldots \& X_K$ представляет собой вектор, компонентами которого являются значения переменных предикатов, входящих в эту формулу. Эти значения индексируются соответствующими индексами. Поэтому значению w_j формулы X можно поставить в соответствие вектор z_j из R^K. Этот вектор имеет i-ю координату, равную преобразованному с помощью масштабируемой функции индексу предикатной константы $g(i)$.

Определение 5. ***Функцией распределения*** $F(x)$ ***предиката*** называется кусочно-постоянная функция вещественной переменной x, определенная на прямой R, со скачками в точках $g(i)$: $F(x) = \sum_{g(i)\le x} p_i$.

Аналогично определяется функция распределения формулы $X = X_1 \& \& X_2 \& \ldots \& X_K$. Это функция от K аргументов $F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_K)$ с областью определения R^K и со значениями в R: $F(x) = \sum_{z_j \le x} p_j$.

Предикаты или формулы с различными функциями распределения считаются различными и обозначаются разными буквами.

Определение 6. Два переменных предиката A и B, или две формулы $X = X_1 \& X_2 \& \ldots \& X_K$ и $Y = Y_1 \& Y_2 \& \ldots \& Y_K$, определенные на подмножествах одной и той же предметной области, будем называть **сравнимыми**, если они имеют одно и то же множество значений, но имеют различные функции распределения своих значений.

Сравнимые предикаты обозначаются разными буквами. Несравнимые предикаты или формулы приводятся к сравнимым с помощью следующих приемов.

1. Если множество значений Π_A предиката A содержит некоторые значения, которых нет во множестве значений Π_B второго предиката B, то для того, чтобы несравнимые предикаты A и B свести к сравнимым, полагаем, что эти отсутствующие значения все же содержатся во множестве значений второго предиката, но имеют вероятность, равную нулю.

2. Если в одной из формул, например $X = X_1 \& X_2 \& \ldots \& X_K$, отсутствует предикат, имеющийся в другой формуле, например $Y = Y_1 \& Y_2 \& \ldots \ldots \& Y_K \& Y_{K+1}$, то разумно предположить, что информация о возможных значениях Y_{K+1} в первой формуле отсутствует, т.е. все значения Y_{K+1} в первой формуле равновозможные. Поэтому дополняем первую формулу предикатом Y_{K+1} и считаем, что распределение его значений равномерное. В результате такого приема формулы также можно сделать сравнимыми.

Различие в распределении вероятностей значений двух сравнимых предикатов можно использовать для определения близости предикатов X и Y в системах рассуждений по аналогии. Пусть множество значений предиката X – $\Pi_1 = \left\{ \pi_{11}^m, \pi_{12}^m, \ldots, \pi_{1r}^m, \ldots \right\}$, а множество значений предиката Y – $\Pi_2 = \left\{ \pi_{21}^m, \pi_{22}^m, \ \ldots, \pi_{2r}^m, \ldots \right\}$. Обозначим p_{ij} ($i = 1, 2$) вероятность значения π_{ij}^m ($i = 1, 2$). Обозначим распределение вероятностей значений первого предиката X через $G = \left\{ p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1r}, \ldots \right\}$, а распределение вероятностей значений второго предиката Y – через $Q = \left\{ p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2r}, \ldots \right\}$. Из множества формул для определения расстояния между предикатами, рассмотренными в [1], остановимся на расстоянии Хеллингера, которое обладает всеми общепринятыми свойствами расстояния.

Определение 7. *Расстоянием* $d(X,Y)$ *между сравнимыми предикатами* X и Y *назовем расстояние Хеллингера* $d(G,Q)$ *между двумя распределениями вероятностей* $G = \left\{ p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1r}, \ldots \right\}$ *и* $Q = \left\{ p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2r}, \ldots \right\}$, *которое вычисляется по следующей формуле:*

$$d(X,Y) = d(G,Q) = \sum_j \left(\sqrt{p_{1j}} - \sqrt{p_{2j}} \right)^2. \tag{2}$$

4. Применение систем вывода по аналогии для нахождения сумм числовых рядов. Проиллюстрируем применение систем вывода по аналогии для получения новых знаний в теории числовых рядов.

Следующая теорема позволяет (при выполнении некоторых общих условий) получать выводом по аналогии суммы ранее неизвестных рядов.

Теорема 1. Пусть в предметной области, состоящей из множества действительных функций вещественной переменной, заданы следующие три унарных предиката:

1) предикат B' – «быть функцией $g(x)$, которая представима рядом Тейлора с начальными отрезками в форме полиномов n-й степени $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$»;
2) предикат B – «быть полиномом n-й степени $f_n(x)$, совпадающим с полиномом n-й степени начального отрезка разложения функции $g(x)$ в ряд Тейлора»;
3) предикат A – «быть функцией $f(x)$, которая представима в виде произведения линейных сомножителей $f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)$, где $\alpha_i, i = 1, \ldots, m$ – корни уравнения $f(x) = 0$».

Пусть в базе знаний имеется достоверное ЗНАНИЕ 1: $B \to A$, т.е. полином $f_n(x)$ представим в виде $f_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$, где $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$ – корни уравнения $f_n(x) = 0$.

Тогда вывод по аналогии дает следующее достоверное знание: $B' \to A$, функция $g(x)$ представима в виде $g(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(x - \alpha_i)$, где $\alpha_i, i = 1, 2, 3, \ldots,$ – корни уравнения $g(x) = 0$.

Доказательство. Для доказательства импликации $B \to A$ достаточно показать, что $d(B', B) < \eta$, где η – сколь угодно малое число. Действительно, поскольку в базе знаний имеется похожее знание «если B', то A», достоверность которого равна 1, и, если будет показано, что расстояние d между предикатами B' и B можно сделать как угодно малым, то отсюда выводом по аналогии по схеме (1) можно получить новое знание: $B \to A$, достоверность которого будет сколь угодно близка к единице.

Определим расстояние d между предикатами B' и B. Для этого нужно найти распределения вероятностей значений предикатов B' и B.

Зададим предикатные константы для переменных предикатов B' и B следующим образом. Поскольку множествами значений функции $g(x)$ и полиномов $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ являются вещественные числа, принадлежащие прямой R, то разобьем эту прямую рациональными числами на счетное множество непересекающихся интервалов длины не более чем ε. В качестве ε возьмем рациональное сколь угодно малое число, например которое характеризует допустимую точность задания вещественных чисел в системе.

Для удобства обозначений обозначим i-й интервал прямой R рациональным числом σ_i, которое соответствует началу этого интервала. Возьмем в качестве i-й предикатной константы переменного предиката B' следующую унарную предикатную константу: «$g(x)$ принимает значение из интервала σ_i». Аналогично определяется множество значений предиката B.

Согласно своему определению предикат B' принимает логическое значение «*ИСТИНА*» для функций $g(x)$, разложение которых в ряд Тейлора имеет вид

$$g(x) = f_n(x) + \eta.$$

Предикат B принимает значение «*ИСТИНА*» для функций, являющихся полиномами $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Выбором n остаток η можно сделать сколь угодно малым число, таким чтобы при $n > n_1$ $g(x)$ и $f_n(x)$ попали в один и тот же интервал прямой R, который обозначим Δ.

Так как функция $g(x)$ не является случайной функцией, то при некотором произвольном, но фиксированном значении аргумента x, вероятности значений всех предикатных констант предиката B' равны нулю, кроме предикатной константы: «$g(x)$ принимает значение из интервала Δ», вероятность которой равна единице.

Функция $f_n(x)$ также принимает свои значения детерминировано. Поэтому при $n > n_1$ вероятности значений всех предикатных констант предиката B равны нулю, кроме предикатной константы: «$f_n(x)$ принимает значение из интервала Δ», вероятность которой равна единице.

Очевидно, что расстояние Хеллингера $d(G,Q)$ между распределениями $G = \left\{ p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1r}, \ldots \right\}$ и $Q = \left\{ p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2r}, \ldots \right\}$ предикатов B' и B, которое вычисляется по формуле (2), равно нулю. Поэтому $d(B, B') = 0$. Выводом по аналогии по схеме (1), используя ЗНАНИЕ 1, заключаем, что $B' \to A$, т.е. для функции $g(x)$ также справедливо разложение на линейные сомножители.

Теорема доказана.

5. Алгоритм программы получения суммы бесконечного ряда выводом по аналогии.

На основе доказанной теоремы строится алгоритм получения суммы бесконечного ряда выводом по аналогии. Он состоит из следующих шагов.

1. Выбор функции $f(x)$, имеющей бесконечное число корней.
2. Разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора и формирование левой части равенства:

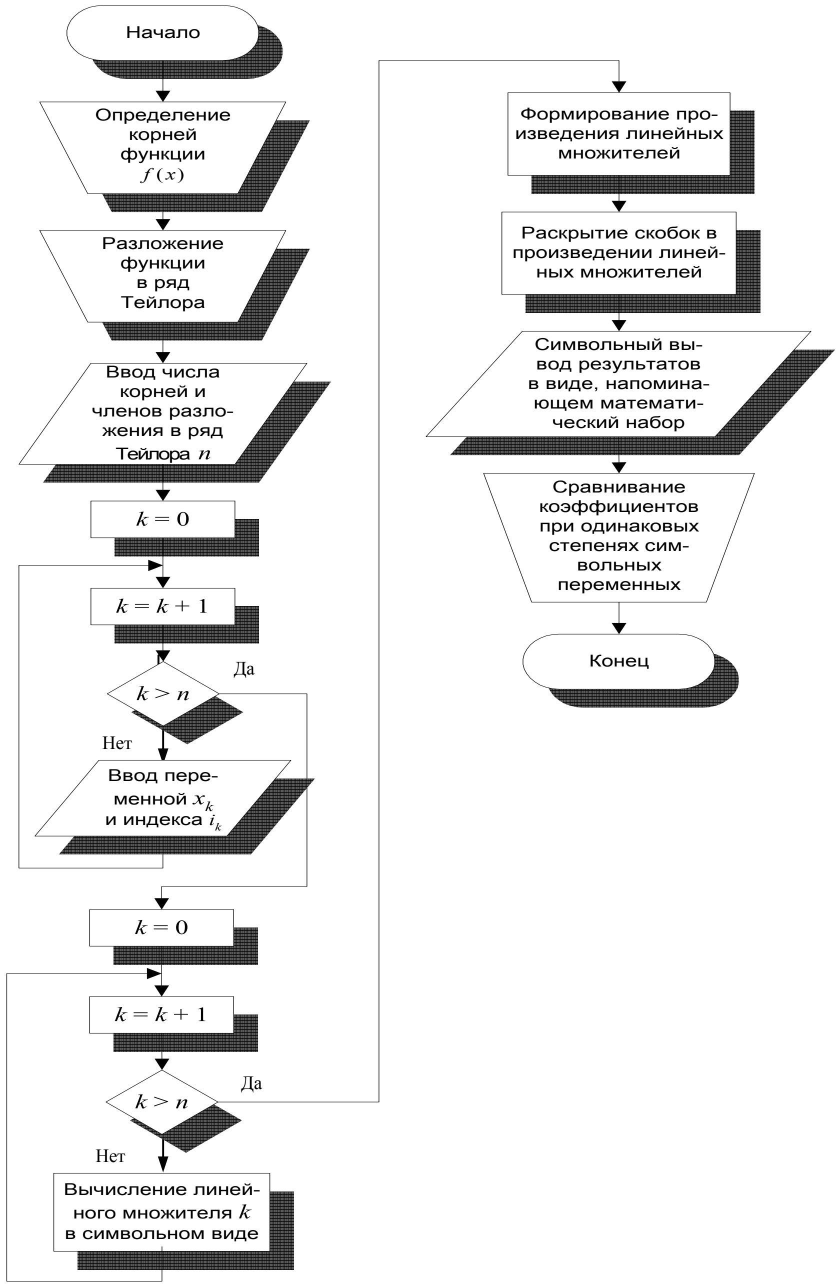
$$f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \ldots \, .$$

3. Нахождение корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ функции f.
4. Разложение на линейные множители функции $f(x)$ и формирование правой части равенства:

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)\ldots \, .$$

5. Раскрытие скобок и сведение подобных членов в правой части равенства.
6. Сравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x равенства и получение суммы бесконечного ряда.

Алгоритм программы получения суммы бесконечного ряда представлен в виде блок-схемы на рисунке.


Начало
Определение корней функции $f(x)$
Разложение функции в ряд Тейлора
Ввод числа корней и членов разложения в ряд Тейлора n
$k = 0$
$k = k + 1$
$k > n$
Да
Нет
Ввод переменной x_k и индекса i_k
$k = 0$
$k = k + 1$
$k > n$
Да
Нет
Вычисление линейного множителя k в символьном виде
Формирование произведения линейных множителей
Раскрытие скобок в произведении линейных множителей
Символьный вывод результатов в виде, напоминающем математический набор
Сравнивание коэффициентов при одинаковых степенях символьных переменных
Конец

РИСУНОК

Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Определение корней и разложение в ряд Тейлора функции $f(x)$.
2. Ввод числа корней и членов разложения в ряд Тейлора.
3. Ввод переменных и индексов в символьном виде.
4. Вычисление линейных множителей в символьном виде.
5. Формирование произведения линейных множителей.
6. Разложение в сумму (раскрытие скобок) произведения линейных множителей.
7. Сведение подобных членов.
8. Символьный вывод результатов в виде, напоминающем математический набор.
9. Сравнивание коэффициентов при одинаковых степенях символьных переменных.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий работу этого алгоритма.

Пример. Рассмотрим уравнение $1-\sin(x)=0$.

Его корни равны $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$, каждый из которых является двойным, так как кривая $y=\sin(x)$ в этих точках касается прямой $y=1$, не пересекая ее. Следовательно, уравнение

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+(-1)^k\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots=0$$

имеет корни $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$

и вывод по аналогии приводит к разложению на множители

$$1-\sin(x)=1-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots=\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)^2\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)^2\ldots.$$

Сравнивая коэффициенты при x в обеих частях равенства, получаем

$$-1=-\frac{4}{\pi}+\frac{4}{3\pi}-\frac{4}{5\pi}+\frac{4}{7\pi}-\ldots,\ \text{или}\ \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\ .$$

Это – знаменитый ряд Лейбница.

Текст программы к примеру на языке MATLAB.

```
function product1;
n = 3;
syms x1 x2 x3;
x = [x1, -x2, x3];
x = x.*2;
[I] = sym(1:1:3);
[I] = I.*2 - 1;
[I] = x./I./pi;
GI = 1 - I;
```

```
GI = GI.^2;
d = prod(GI);
e = expand(d);
pretty (e)
end;
```

Фрагмент вывода.

$$1+\frac{16}{25}\frac{x1^2x3^2}{pi^4}-\frac{16}{5}\frac{x1^2x3}{pi^3}-\frac{16}{25}\frac{x1\ \ x3^2}{pi^3}+\frac{16}{5}\frac{x1\ \ x3}{pi^2}+\frac{64}{25}\frac{x1\ \ x2^2x3}{pi^4}-$$

$$-\frac{64}{75}\frac{x1\ \ x2\ \ x3^2}{pi^4}+\frac{16}{225}\frac{x2^2x3^2}{pi^4}-\frac{16}{45}\frac{x2^2x3}{pi^3}+\frac{16}{75}\frac{x2\ \ x3^2}{pi^3}-\frac{16}{15}\frac{x2\ \ x3}{pi^2}+$$

$$+\frac{16}{9}\frac{x1^2x2^2}{pi^4}+\frac{16}{3}\frac{x1^2x2}{pi^3}-\frac{16}{9}\frac{x1\ \ x2^2}{pi^3}-\frac{16}{3}\frac{x1\ \ x2}{pi^2}+\frac{64}{15}\frac{x1\ \ x2\ \ x3}{pi^3}+$$

$$+\frac{64}{75}\frac{x1^2x2\ \ x3^2}{pi^5}-\frac{64}{15}\frac{x1^2x2\ \ x3}{pi^4}-\frac{64}{225}\frac{x1\ \ x2^2x3^2}{pi^5}+\frac{4}{25}\frac{x3^2}{pi^2}+\frac{4}{9}\frac{x2^2}{pi^2}+$$

$$+4\frac{x1^2}{pi^2}+\frac{64}{225}\frac{x1^2x2^2x3^2}{pi^6}-\frac{64}{45}\frac{x1^2x2^2x3}{pi^5}-\frac{4}{5}\frac{x3}{pi}-4\frac{x1}{pi}+\frac{4}{3}\frac{x2}{pi}\ .$$

Таким образом, для трех корней коэффициенты при первой степени x в правой части равенства равны:

$\left(-\frac{4}{\pi}+\frac{4}{3\pi}-\frac{4}{5\pi}\right)\cdot x,$ и в результате получаем сумму ряда Лейбница.

Заключение. Таким образом, в работе рассмотрены принципы получения новых математических знаний с помощью систем выводов по аналогии, применение таких систем при получении новых математических знаний в теории числовых рядов. Доказана теорема, теоретически обосновывающая применение вывода по аналогии при получении сумм неизвестных числовых рядов. Разработан алгоритм, позволяющий получать сумму неизвестного числового ряда с помощью задания некоторой исходной функции $f(x)$, имеющей бесконечное число корней, которая этому ряду соответствует.

1. *Загоруйко Н.Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – 269 с.
2. *Коваль В.Н., Кук Ю.В.* Интеллектуальный анализ данных в системах рассуждений по аналогии // Научно-теоретический журнал «Искусственный интеллект». – Донецк: НАНУ, Ин-т проблем искусственного интеллекта, 2003. – № 3. – С. 263 – 275.
3. *Koval V.N., Kuk Yu.V.* Distances between predicates in by-analogy reasoning systems // Proc. of the X-th Inter. Conf. “Knowledge-Dialogue-Solution”. – Varna, 2003. – P. 404 – 412.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1981. – 718 с.

Получено 24.03.2004