

## ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ТОНКОСТЕННОМ КОЛЬЦЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ С ПРЕДЕЛЬНО МАЛЫМ АСПЕКТОВЫМ ОТНОШЕНИЕМ

*Розрахунковим шляхом знайдено і досліджено аномальний розподіл магнітної індукції в тонкостінному кільці круглого перерізу з межево малим аспектовим відношенням та однорідним розподілом струму вздовж периметра поперечного перерізу кільця.*

В устройствах техники сильных магнитных полей (электромагнитах, реакторах, индуктивных накопителях и др.) широко применяются тороидальные магнитные системы. В обычных тороидальных системах силовые линии магнитного поля замыкаются вдоль окружности большого радиуса катушки. Однако такое расположение поля затрудняет доступ в занятый им объем. Другое решение состоит в применении тороидальной катушки с внешним полем или, точнее, полем рассеяния (так называемого  $\phi$ -тора [1]). По такой катушке ток течет в азимутальном направлении, то есть вдоль окружности ее большого радиуса, а магнитный поток располагается в меридиональных плоскостях тороида симметрично вдоль его продольной оси. Простейший пример тороидальной магнитной системы  $\phi$ -типа – хорошо изученное [1]...[3] кольцо круглого сечения, обтекаемое азимутальным током. В частности, оно было исследовано В.А. Фоком [4] для случая, когда плотность тока соответствует резкому поверхностному эффекту. В работе [4] показано, что при таком законе распределения плотности тока, во-первых, магнитное поле в объеме кольца равно нулю, так как силовые линии везде идут по касательной к его поверхности, во-вторых, магнитное поле на поверхности кольца неоднородно вдоль периметра поперечного сечения. Именно минимальное значение магнитной индукции всегда имеет место на внешней кромке тора в его экваториальном сечении, а максимальное значение – на внутренней кромке в этом же сечении. В работе [4] также показано, что такая картина поля (минимум – на внешней кромке, максимум – на внутренней) для рассматриваемого распределения плотности тока имеет место при любом значении аспектового отношения  $g_2 = R_0/r_2$  в области его определения  $1 \leq g_2 \leq \infty$  (где  $R_0$  – средний радиус кольца,  $r_2$  – радиус поперечного сечения).

Однако, остается открытым вопрос о том, как распределен магнитный поток на поверхности тонкостенного кольца круглого сечения для случая, когда распределение плотности тока отличается от распределения, соответствующего резкому поверхностному эффекту. Особый интерес в этом плане представляет исследование распределения поля на поверхности указанного кольца со значениями аспектового отношения, близкими к теоретическому пределу  $g_2 = 1$ .

Цель работы – исследовать распределение магнитной индукции на поверхности тонкостенного кольца круглого сечения при предельно малом значении аспектового отношения ( $g_2 \rightarrow 1$ ) и однородном распределении плотности тока.

**Постановка задачи исследования.** Рассмотрим тонкостенную тороидальную катушку со средним радиусом  $R_0$ , радиусом поперечного сечения  $r_2 \sim R_0$  и толщиной токового слоя  $\Delta_2 \ll r_2$ . Примем, что эта катушка обтекается вдоль окружности большого радиуса тора полным током  $I_2 = N_2 \cdot i_2$  ( $i_2$  – ток в витках обмотки). Будем считать, что обмотка состоит из одного слоя проводников пренебрежимо малой толщины ( $\Delta_2 \ll r_2$ ), уложенных в виде кольцевых витков, плоскости которых перпендикулярны вертикальной оси тора, а центры лежат на этой оси (рис. 1). Проводники полагаем уложенными настолько плотно, чтобы рас-

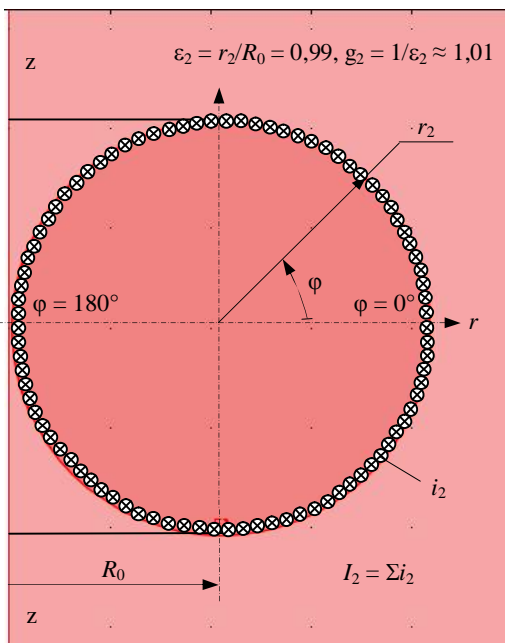


Рис. 2

пределение тока в обмотке можно было считать непрерывным. Положим, что все проводники электрически соединены последовательно. При такой схеме соединения проводников распределение плотности тока вдоль периметра поперечного сечения обмотки будет однородным автоматически. Ток  $I_2$  возбуждает на поверхности и в объеме моделируемой обмотки, а также в окружающем ее пространстве магнитное поле с индукцией  $B_2 = f(\varphi)$ , силовые линии которого охватывают тор по образующей. Отметим, что на рис. 1  $\varphi$  есть так называемый периметрический угол, т. е. угол, описываемый радиус-вектором  $r_2$  (при его движении против часовой стрелки), начало которого совпадает с центром тяжести поперечного сечения тора, а конец скользит вдоль периметра его поперечного сечения. При этом минимальному значению периметрического угла  $\varphi_{\min} = 0^\circ$  соответствует внешняя кромка тора, взятая в экваториальном сечении,

а максимальному значению этого угла  $\varphi_{\max} = 180^\circ$  – внутренняя кромка в этом же сечении. Так как по условию распределение плотности тока в обмотке однородно, то вектор поля  $B_2$  состоит из касательной  $B_{2\tau}$  и нормальной  $B_{2n}$  компонент. Требуется определить распределение модуля результирующего вектора магнитной индукции  $B_2 = |B_2|$  на поверхности рассматриваемой магнитной системы вдоль периметра ее поперечного сечения.

**Численные расчеты.** Расчет распределения поля  $B_2$  вначале был выполнен при помощи пакета прикладных вычислительных программ VITOK И SILA, написанных на языке BASIC. В этом пакете программа VITOK решала задачу расчета магнитного поля (точнее, расчета компонент модуля результирующего вектора магнитной индукции) на поверхности обмотки. Программа SILA вычисляла все геометрические размеры обмотки, а также распределение всех компонент магнитного поля вдоль периметра поперечного сечения обмотки в относительных и абсолютных единицах. Кроме того, программа SILA определяла все прочие характеристики обмотки: индуктивность, электродинамические силы (пондеромоторные и интегральные), среднеинтегральные касательные механические напряжения, эпюры распределения магнитного давления, плотности тока, касательные механические напряжения вдоль периметра поперечного сечения обмотки и т.д. Расчет полевой задачи в программе VITOK производился методом круговых токовых нитей. При этом обмотка была представлена моделью в виде тороидальной токовой поверхности с однородно распределенной вдоль периметра сечения плотностью тока. В отличие от программы VITOK, в программе SILA рассматривалась обмотка с конечной толщиной токового слоя. Поэтому для уменьшения погрешности результатов, обусловленных различием математических моделей этих программ, обмотка выбиралась тонкостенной так, чтобы распределением магнитной индукции по толщине стенки обмотки можно было пренебречь.

На рис. 2 представлены результаты расчета поля пакетом программ VITOK – SILA распределения модуля результирующего вектора магнитной индукции  $B_2 = |B_2| = f(\varphi)$  вдоль периметра поперечного сечения кольца. Рассматривалось кольцо с относительным малым радиусом  $\varepsilon_2 = r_2/R_0 = 0,99$  со сверхпроводящей обмоткой на основе сплава  $V_3Ga$  в медной матрице. При расчете были приняты следующие исходные данные: удельный вес сверхпроводника  $\gamma_{np.} = 5800 \text{ кг/м}^3$ , удельный вес матрицы  $\gamma_{Cu} = 8900 \text{ кг/м}^3$ , удельная стоимость

сверхпроводящего проводника  $C_{уд.} = 800$  долл./кг, температура криостатирования  $T = 4,2$  К, коэффициент заполнения медной матрицы сверхпроводником  $k_{зсп2} = 0,6$ , коэффициент заполнения обмотки сверхпроводящим проводом  $k_{зпр2} = 0,5$ . Отметим, что перечисленные исходные данные необходимы для нормального функционирования программ VITOK – SILA.

А priori можно было бы ожидать, что в катушке предельно малого аспектового отношения ( $g_2 = 1/\varepsilon_2 = 1/0,99$ ) распределение поля  $B_2$  вдоль периметра поперечного сечения обмотки при однородном распределении плотности тока будет носить (по крайней мере, в качественном отношении) точно такой же характер, как и при распределении плотности тока, соответствующем резкому поверхностному эффекту. Однако отметим, что результат вычислений распределения поля  $B_2$  в этом случае оказался совершенно неожиданным.

Характерная особенность зависимости, показанной на рис. 2, состоит в том, что максимум индукции  $B_2$  смещен относительно точки  $\varphi = \varphi_{max} = 180^\circ$ , располагаясь приблизительно в точке  $\varphi'_{max} \approx 162^\circ$  над экваториальной плоскостью сечения ( $Z > 0$ ) и в симметричной ей точке  $\varphi''_{max} \approx 198^\circ$  под экваториальной плоскостью ( $Z < 0$ ). При этом различие в значениях  $B_2$  для точек  $\varphi_{max}$  и  $\varphi'_{max}$  слишком велико, чтобы его можно было объяснить погрешностями вычислений. Так, если для точки  $\varphi = \varphi'_{max} = 162^\circ$  значение  $B_2$  составило около 14,33 Тл, то для точки  $\varphi = \varphi_{max} = 180^\circ$  оно равно примерно 13,49 Тл, т. е. различие составляет 0,84 Тл. Его, действительно, нельзя пояснить вычислительными погрешностями. Логически напрашивался вывод, что в рассматриваемом тонкостенном кольце с однородным вдоль периметра сечения распределением плотности тока магнитный поток распределяется в противоречии с традиционно сложившимся представлением о распределении поля в таких магнитных системах (минимум поля – на внешней кромке тора в экваториальном сечении ( $\varphi = \varphi_{min} = 0^\circ$ ), а максимум – на внутренней кромке ( $\varphi = \varphi_{max} = 180^\circ$ )). Этот вывод (если он истинен) требовал пояснений с точки зрения физики. Однако, прежде всего, он нуждался в дополнительных уточнениях.

Для проверки полученного результата сделан расчет зависимости  $B_2 = f(\varphi)$  на поверхности точно такого же кольца с использованием программы Comsol Multiphysics 3.4

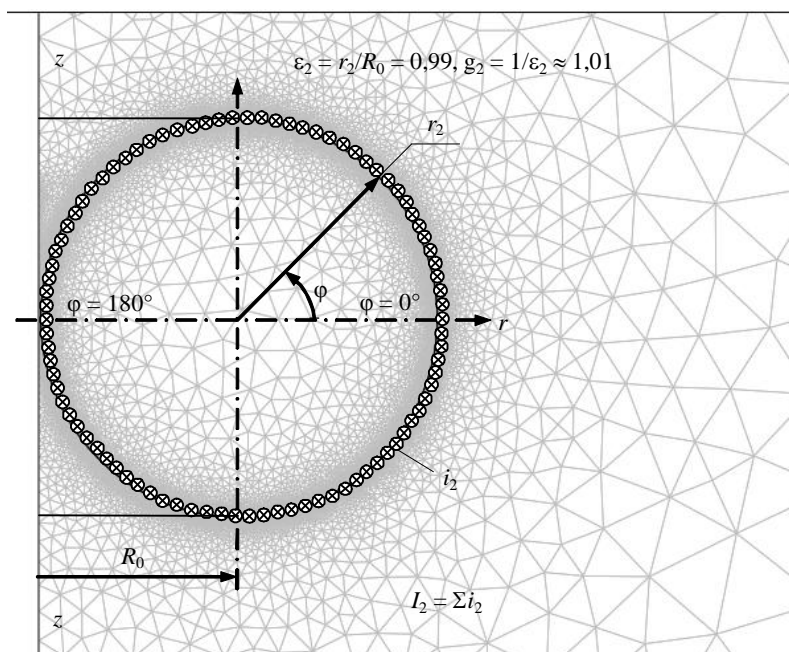
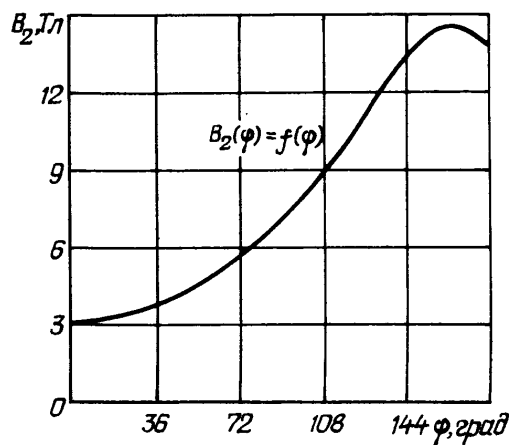
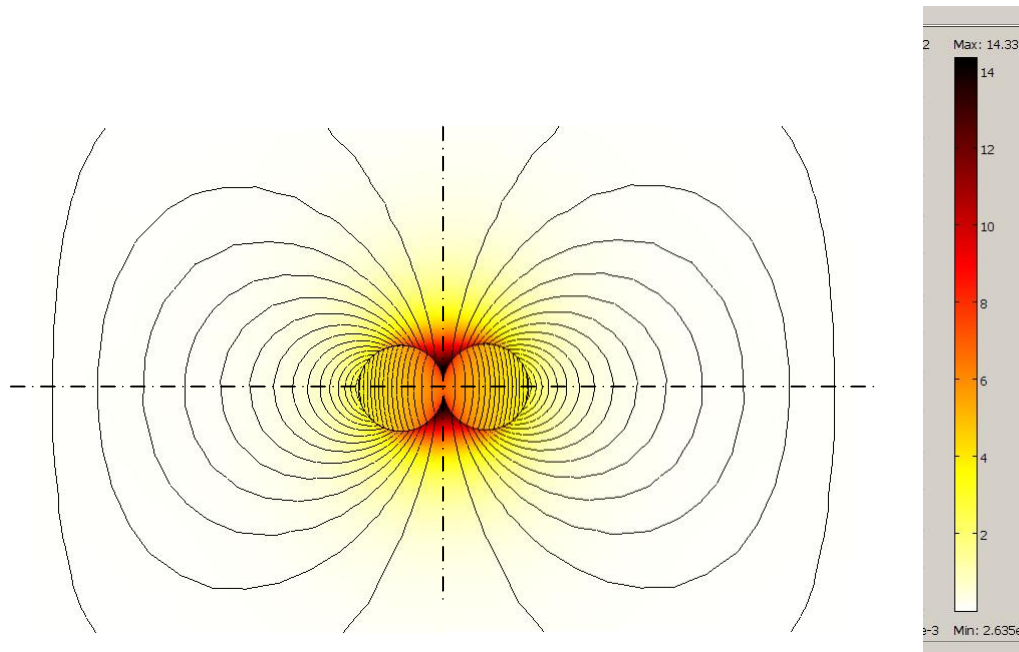
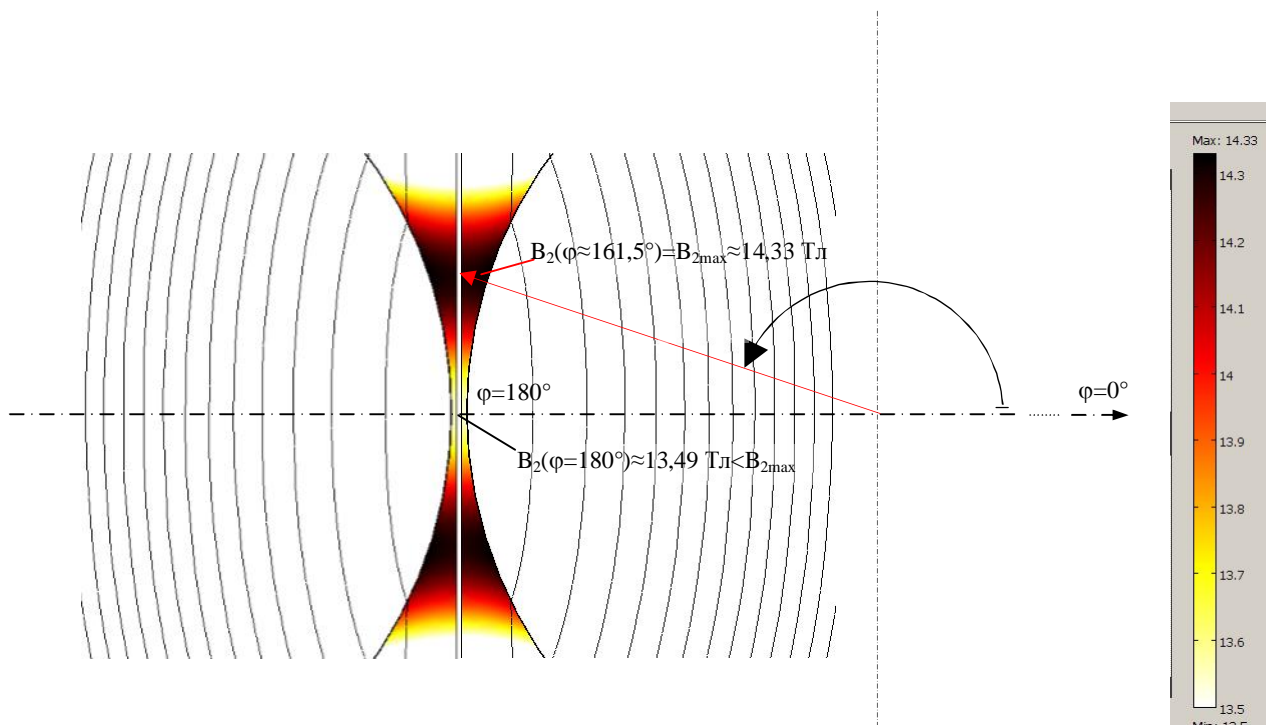


Рис. 3

на основе метода конечных элементов. Расчетная область показана на рис. 3, а результаты расчета – на рис. 4 а, из которого, на первый взгляд, как будто следовало, что распределение поля  $B_2(\varphi)$  подчиняется традиционной закономерности (минимум поля на внешней кромке в экваториальном сечении, максимум – на внутренней кромке этого сечения). Однако, как выяснилось, такой вывод неверен и объяснялся субъективным восприятием выделенной расчетной зоны. В самом деле, минимальное поле (светлосерый цвет) концентрировалось на внешней кромке, а зона, где поле достигало предположительно максимального значения (черный цвет) концентрировалось на внутренней кромке в экваториальном сечении рассмат-



а



б

Рис. 4

риваемого кольца. Для получения более объективного результата выделенная зона была сужена, захватывая теперь относительно небольшой сектор в диапазоне значений периметрического угла  $144 \leq \varphi \leq 180^\circ$  над экваториальной плоскостью и  $180 \leq \varphi \leq 212^\circ$  под ней. Соответствующие результаты представлены на рис. 4 б, где наглядно продемонстрировано наличие искомого смещения точки максимума магнитной индукции  $B_2$ . Непосредственное измерение угла смещения показало, что этот угол составляет приблизительно  $\varphi'_{\max} \approx 161,5^\circ$ . Такой результат находится в полном соответствии с результатами предварительного расчета, полученного посредством программ VITOK – SILA ( $\varphi'_{\max} = 162^\circ$ , соответствующая невязка около 0,31 %). Более того, вид кривой  $B_2 = f(\varphi)$ , полученный в среде FEMLAB, свидетельствовал, что последняя практически совпадает с аналогичной кривой, полученной ранее при помощи программ VITOK – SILA (см. рис. 2).

Результаты расчетов, полученных методом токовых нитей в пакете программ VITOK – SILA и методом конечных элементов в среде FEMLAB, служат достаточно весомым доказательством существования аномального характера распределения магнитной индукции вдоль периметра поперечного сечения в тонкостенном кольце круглого сечения с  $\varepsilon_2 \approx 1$  и однородным распределением плотности тока, а именно смещения максимума магнитной индукции  $B_2$  с точки  $\varphi = \varphi_{\max} = 180^\circ$  в точку  $\varphi = \varphi'_{\max} \approx 161,5^\circ$ .

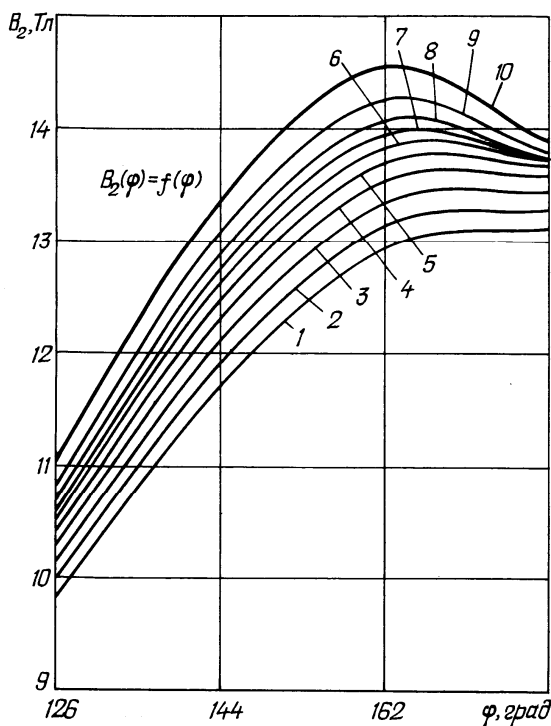


Рис. 5

Далее было рассмотрено как изменяется кривая  $B_2 = f(\varphi)$  с увеличением аспектового отношения (с уменьшением относительного малого радиуса  $\varepsilon_2$ ). С этой целью построено семейство кривых  $B_2 = f(\varphi)$  для значений  $\varepsilon_2$ , лежащих в диапазоне от 0,9 (кривая 1) до 0,99 (кривая 10). Шаг изменения  $\varepsilon_2$  составлял 0,01. Результаты расчета представлены на рис. 5, где показано, что уменьшение относительного малого радиуса приводит к тому, что “горб” магнитной индукции  $B_{2\max} = B_2(\varphi_{\max})$  становится более пологим (однако без изменения периметрического угла) и снижается абсолютное значение  $B_2$  в зоне, прилегающей к “горбу” справа и слева от последнего. Но это снижение индукции  $B_2$  по мере уменьшения  $\varepsilon_2$  идет справа от “горба” (т. е. в окрестности точки  $\varphi = \varphi_{\max} = 180^\circ$ ) все медленнее и медленнее, пока, наконец, при  $\varepsilon_2 \leq 0,9$  не прекращается. С этого момента вид кривой  $B_2 = f(\varphi)$  приобретает

традиционный характер во всем диапазоне изменения периметрического угла  $\varphi$ . Из рис. 5 становится ясным, почему до сих пор считалось, что в тонкостенном кольце круглого сечения распределение магнитной индукции при любом распределении плотности тока будет таким же, как и при резком поверхностном эффекте. Дело в том, что данная магнитная система обычно исследовалась при значениях  $\varepsilon_2 \ll 0,9$ , а для таких значений  $\varepsilon_2$ , как видно из рис. 5, распределение магнитной индукции будет качественно всегда таким же, как и при резком поверхностном эффекте.

**Обсуждение результатов численных исследований.** По мнению автора, наиболее убедительное объяснение физических причин, приводящих к такому аномальному смещению максимума  $B_2$  при однородном распределении плотности тока, заключается в наличии двух конкурирующих факторов. Первый фактор – механическое сближение силовых линий магнитного поля во внутреннем отверстии кольца (взятого в экваториальном сечении) в процессе уменьшения аспектового отношения последнего, второй – уменьшение количества силовых линий, оставшихся в пределах внутреннего отверстия кольца, по мере уменьшения этого отверстия (снижения аспектового отношения), вызванного “продавливанием” силовых линий в объем кольца под действием бокового распора между ними. Первый фактор приводит к увеличению магнитной индукции на внутренней кромке кольца в его экваториальном сечении, второй фактор – к уменьшению магнитной индукции в этом же месте кольца.

При всех  $\varepsilon_2 \leq 0,9$  преобладает первый фактор, и магнитная индукция сохраняет максимальное значение на внутренней кромке кольца в его экваториальном сечении. При  $\varepsilon_2 > 0,9$  начинает преобладать второй фактор. В этом случае максимум магнитной индукции смещается симметрично вверх и вниз от экваториальной плоскости кольца. Указанное смещение обусловлено тем, что в плоскостях, лежащих выше (ниже) экваториальной плоскости и соответствующих максимуму магнитной индукции, боковой распор между силовыми линиями с одной стороны еще недостаточно велик, чтобы вызвать заметное “продавливание” их в объем кольца, и в то же время количество силовых линий все же достаточно велико, чтобы при их сближении, обусловленном снижением аспектового отношения кольца, магнитная индукция в этих плоскостях достигала максимального значения.

**Выводы.** 1. Обнаружено аномальное распределение магнитной индукции в функции периметрического угла  $\varphi$  для тонкостенного кольца с круглым поперечным сечением, предельно малым аспектовым отношением ( $g_2 = 1/\varepsilon_2 = 1/0,99 \approx 1,0101$ ) и однородным вдоль периметра поперечного сечения распределением плотности тока. Характерная особенность распределения магнитной индукции состоит в том, что ее максимум смещен относительно внутренней кромки кольца (точка  $\varphi = \varphi_{\max} = 180^\circ$ ) и расположен приблизительно в точке  $\varphi'_{\max} \approx 161,5^\circ$  над экваториальным сечением кольца ( $Z > 0$ ) и в симметричной ей точке  $\varphi''_{\max} \approx 198,5^\circ$  под экваториальным сечением ( $Z < 0$ ).

2. Эта особенность расположения максимума магнитной индукции в рассматриваемом кольце объясняется конкуренцией двух основных факторов: механическим сближением силовых линий магнитного поля во внутреннем отверстии кольца, взятого в экваториальном сечении, в процессе приближения аспектового отношения кольца к своему минимуму (к единице); уменьшением количества силовых линий, оставшихся в пределах внутреннего отверстия кольца, по мере уменьшения этого отверстия (снижения аспектового отношения), вызванного “продавливанием” силовых линий в объем кольца под действием бокового распора между ними.

3. Установлено, что при всех  $\varepsilon_2 \leq 0,9$  преобладает первый фактор и магнитная индукция сохраняет максимальное значение на внутренней кромке кольца в его экваториальном сечении. При  $\varepsilon_2 > 0,9$  начинает преобладать второй фактор. В этом случае максимум магнитной индукции смещается от внутренней кромки кольца (точка  $\varphi = \varphi_{\max} = 180^\circ$ ) симметрично вверх и вниз от его экваториальной плоскости. Амплитуда смещения тем больше, чем ближе значение обратного аспектового отношения кольца  $\varepsilon_2 = 1/g_2$  к максимальному значению  $\varepsilon_{2\max} = 1$ .

*Расчетным путем обнаружено и исследовано аномальное распределение магнитной индукции в тонкостенном кольце круглого сечения с предельно малым аспектовым отношением и однородным распределением тока вдоль периметра поперечного сечения кольца.*

*Calculation revealed and anomalous distribution of flux magnetic density in a thin-walled ring of round section with extremely small aspect relation and uniform distribution current along girth of ring is investigated.*

1. Бут Д.А., Алиевский Б.Л., Мизюрин С.Р., Васюкевич П.В. Накопители энергии: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Д.А. Буга. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 400 с.
2. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. – Л.: Энергия, 1970. – 415 с.
3. Том Р., Тарр Дж. Магнитные системы МГД-генераторов и термоядерных установок: Основы расчета полей и сил: Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 272 с.
4. Фок В.А. Скин-эффект в кольце круглого сечения // Ж.Р.Ф.Х.О. Ч. физич. – 1930. – Т. LXII. – Вып. 3. – С. 281–297.

Надійшла 27.07.2010