Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 426-439

***Д. П. Лычак***

*Киевский национальный университет им. Т.Г. Шевченко*
*E-mail:* amidl@ukr.net

# Послойная эквивалентность гладких функций на поверхностях с изолированными критическими точками

This paper studies smooth functions with isolated critical points. They are considered to within fiber equivalence. The fd-graph, which specifies the f-atom, is constructed. The necessary and sufficient condition for fiber equivalence of smooth functions is formulated.

**Ключевые слова**: *Классификация, изолированные критические точки, функции Морса*

## 1. Введение

В работе рассматриваются гладкие функции с изолированными критическими точками на гладких замкнутых поверхностях. Известно, что любую гладкую функцию сколь угодно малым шевелением можно превратить в функцию Морса (функция, все критические точки которой невырожденные). Однако при рассмотрении семейства функций, зависящих от параметра, появляются неустранимые малыми шевелениями вырождения. Локальная классификация гладких функций с изолированными критическими точками с точностью до топологической эквивалентности была получена А.О. Пришляком в [3]. Глобальная классификация разными способами была предложена В.В. Шарко в [4] и А.О. Пришляком в [3].

В настоящей работе обобщается способ классификации функций Морса с точностью до послойной эквивалентности при помощи атомов и молекул, предложенный А.Т. Фоменко (см. [1]), на случай вырожденных критических точек. Для кодирования атомов построен fd-граф, являющийся обобщением f-графа, предложенного А.А. Ошемковым в [2].

## 2. Предварительные сведения

Пусть далее $X$ — гладкое замкнутое двумерное многообразие, $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ — гладкие функции с изолированными критическими точками.

**Определение 1.** *Две функции называются топологически эквивалентными, если найдутся гомеоморфизмы $h : X \to X$ и $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(h(x)) = \mu(g(x))$, и $\mu$ сохраняет ориентацию $\mathbb{R}$.*

**Определение 2.** *Слоями функции будем называть компоненты связности её линий уровня. Две функции будем называть послойно эквивалентными, если существует гомеоморфизм поверхности на себя, который переводит слои одной функции в слои другой. Две функции будем называть оснащённо послойно эквивалентными, если существует гомеоморфизм поверхности на себя, который переводит слои одной функции в слои другой с сохранением направления роста функции.*

При послойной эквивалентности компоненты связности одной линии уровня могут отобразиться на разные уровни. А при топологической эквивалентности такого не происходит, и поэтому можно считать, что все критические уровни функции упорядочены. Поэтому классов топологической эквивалентности больше, чем классов послойной эквивалентности.

Пусть $c$ и $c'$ — критические значения функций $f$ и $g$ соответственно, а линии уровня $f^{-1}(c)$ и $g^{-1}(c')$ связны.

**Определение 3.** *Функции $f$ и $g$ называются оснащённо послойно эквивалентными в окрестностях своих особых слоёв $f^{-1}(c)$ и $g^{-1}(c')$, если существуют положительные числа $\varepsilon$ и*

*$\varepsilon'$ и гомеоморфизм $h : f^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \to g^{-1}(c'-\varepsilon', c'+\varepsilon')$, переводящий линии уровня функции $f$ в линии уровня функции $g$ и отображающий область $(f > c)$ в $(g > c')$.*

**Определение 4.** *Атомом называется окрестность $P^2$ критического слоя, задаваемая неравенством $c-\varepsilon \leqslant f \leqslant c+\varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon$, расслоённая на линии уровня функции $f$ и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности. f-атомом называется пара $(P^2, f)$, рассматриваемая с точностью до оснащённой послойной эквивалентности.*

Из леммы Морса следует, что у функции Морса на поверхности могут быть критические точки двух типов: локальные экстремумы и седловые точки. Существуют всего два f-атома, соответствующие локальным экстремумам. Рассмотрим седловые атомы. Седловой атом можно представить как двумерную поверхность, состоящую из плоских крестов и соединяющих их концы длинных узких лент. Поэтому для функции Морса можно сформулировать эквивалентное определение седлового атома.

**Определение 5.** *Седловым атомом назовём пару $(P^2, K)$, где $P^2$ — связная компактная двумерная поверхность с краем, а $K$ — связный граф в ней такой, что все его вершины имеют степень 4, каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S \times (0,1]$ и множество этих колец можно разбить на отрицательные и положительные так, чтобы к каждому ребру графа $K$ примыкало ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо. f-атомом назовём атом, в котором зафиксировано разбиение колец на положительные и отрицательные.*

Атомы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма поверхностей, который граф переводит в граф. f-атомы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма, который граф переводит в граф, а положительные кольца переводит в положительные. Граф $K$ является спайном атома $(P^2, K)$.

**Определение 6.** *Молекулой функции $f$ называется граф, полученный из поверхности стягиванием слоёв функции в точку, в вершинах которого расположены атомы соответствующих критических слоёв. Причём указано взаимно однозначное соответствие между граничными окружностями атома и рёбрами графа, инцидентными вершине, в которую помещён атом. $f$-молекулой функции $f$ называется молекула, рёбра которой ориентированы по направлению роста функции $f$.*

Если поверхность ориентируема, то атомы-вершины молекулы естественно считать ориентированными. Если поверхность неориентируема, то атомы рассматриваются без учёта ориентации. Молекулы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма графа, который продолжается на атомы. Для f-молекул этот гомеоморфизм должен дополнительно сохранять направление рёбер.

**Теорема 1.** *Функции Морса на ориентированной поверхности послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда соответствующие им молекулы эквивалентны. Функции Морса на ориентированной поверхности оснащённо послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда соответствующие им $f$-молекулы эквивалентны.*

Доказательство см. в [1].

Приведём конструкцию f-графа, введённого Ошемковым в [2] для кодирования атомов критических слоёв, содержащих невырожденные критические точки (см. также [1]).

Пусть задан f-атом. Проведём сепаратрисы соответствующей ему функции Морса, которые идут из границы отрицательных колец в сёдла. Вершинами f-графа будут концы сепаратрис, лежащие на границе отрицательных колец. Каждая пара сепаратрис задаёт неориентируемое ребро f-графа. Задав произвольным образом ориентацию на границах отрицательных колец, получим ориентированные рёбра f-графа. На неориентированных рёбрах нужно расставить знаки: если части граничных окружностей отрицательных колец, которые являются противоположными сторонами прямоугольника-окрестности пары соответствующих сепаратрис, задают противоположную ориентацию на границе прямоугольника, то ставим метку $-1$, иначе — $+1$.

Таким образом, f-граф — это граф, каждой вершине которого инцидентны три ребра: одно неориентированное ребро с меткой, а также два ориентированных ребра — одно входит, другое выходит. f-графы рассматриваются с точностью до эквивалентности, которая задаётся изоморфизмом графов, сохраняющим ориентацию рёбер и метки на рёбрах, а также последовательностью операций изменения направления всех рёбер некоторого цикла с одновременным изменением меток неориентированных рёбер, инцидентных этому циклу, на противоположные.

Если удалить из поверхности f-атома все сепаратрисы соответствующей ему функции, то поверхность распадётся на шестиугольники следующего вида: две противоположные стороны являются дугами граничных окружностей колец (положительного и отрицательного), а каждая из двух других пар сторон составлена из сепаратрис (входящей и выходящей). f-граф содержит информацию, как нужно склеивать эти шестиугольники. Занумеруем ориентированные рёбра f-графа и с каждым из них сопоставим шестиугольник. Зададим на шестиугольниках ориентацию (а также положительную и отрицательную область) и обозначим их стороны через $a_i^{\pm}$, $p_i^{\pm}$, $q_i^{\pm}$, где $i$ — номер ориентированного ребра f-графа (см. рис. 4). На первом этапе склеиваются отрицательные кольца: отрезок $p_i^-$ склеивается с отрезком $q_j^-$ (направления при склейке противоположны), если конец $i$-го ребра совпадает с началом $j$-го ребра. На втором этапе склеиваются положительные кольца f-атома: если неориентированное ребро соединяет вершину $(j, i)$ (конец $j$-го ребра и начало $i$-го ребра) с вершиной $(m, k)$, то отрезок $q_i^+ p_j^+$ склеивается с $q_k^+ p_m^+$ (если метка на ребре $+1$, то направления при склейке противоположны, иначе — согласованы).

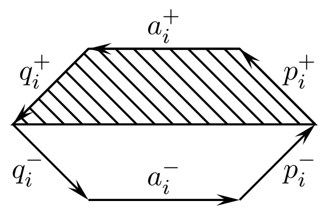



Рис. 4. Шестиугольник

Граничным окружностям f-атома соответствуют циклы на f-графе. Границы отрицательных колец — это просто ориентированные циклы. Границы положительных колец задаются смешанными циклами, в которых ориентированные и неориентированные рёбра чередуются, причём знак неориентированного ребра определяет, по какому ориентированному ребру следует продолжить обход графа: если знак плюс, то направление следующего ориентированного ребра совпадает с направлением предыдущего ребра. При этом каждое ориентированное ребро принадлежит одному циклу, а неориентированное ребро — точно двум циклам, которые задают граничные окружности положительных колец.

Для ориентируемого атома можно так подобрать ориентацию граничных окружностей отрицательных колец, что все метки на неориентированных рёбрах f-графа будут положительны, а значит, их можно опустить.

## 3. Атомы вырожденных критических слоёв

В [1] рассматриваются функции с невырожденными критическими точками, но допускается расположение нескольких из них на одном уровне. Мы рассмотрим произвольную гладкую функцию на гладкой замкнутой поверхности с изолированными критическими точками (возможно, вырожденными).

**Определение 7.** *Будем называть все критические точки, отличные от локальных экстремумов, седловыми, а соответствующие атомы — седловыми атомами.*

Известно (см. [3]), что для любой изолированной седловой критической точки гладкой функции на гладкой поверхности существует окрестность, в которой функция послойно эквивалентна функции $f(x, y) = \Re e\,(x+iy)^k$ для некоторого натурального $k$. При $k = 1$ от критической точки можно избавиться. При $k = 2$ это будет морсовское седло $x^2 - y^2$.

Поэтому можно переформулировать определение седлового атома следующим образом.

**Определение 8.** *Седловым атомом назовём пару $(P^2, K)$, где $P^2$ — связная компактная двумерная поверхность с краем, а $K$ — связный граф в ней такой, что его вершины имеют чётную степень больше двух, каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S \times (0, 1]$ и множество этих колец можно разбить на отрицательные и положительные так, чтобы к каждому ребру графа $K$ примыкало в точности одно положительное и в точности одно отрицательное кольцо. f-атомом назовём атом, в котором зафиксировано разбиение колец на положительные и отрицательные.*

Атомы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма поверхностей, который граф переводит в граф. f-атомы рассматриваются с точностью до гомеоморфизма, который граф переводит в граф, а положительные кольца переводит в положительные. Понятие молекулы и f-молекулы для невырожденного случая переносится без изменений на вырожденный случай.

**Теорема 2.** *Гладкие функции с изолированными критическими точками на ориентированной поверхности послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда,* *когда соответствующие им молекулы эквивалентны. Гладкие функции на ориентированной поверхности оснащённо послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда соответствующие им f-молекулы эквивалентны.*

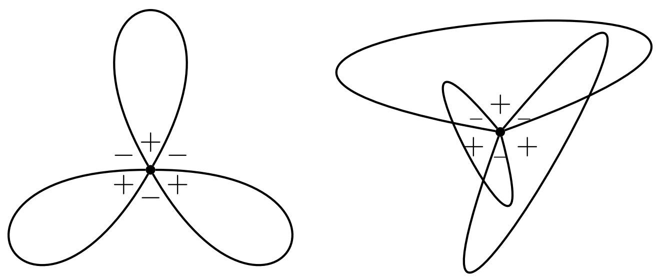
*Доказательство.* Необходимость следует из определения молекулы. Достаточность доказывается аналогично невырожденному случаю. Действительно, из определения эквивалентности молекул следует, что атомы функций одинаковы. Из последнего вытекает, что функции послойно эквивалентны в окрестностях критических слоёв. Поскольку гомеоморфизм молекул задаёт биекцию между регулярными слоями функций, а на концах трубок, которые соединяют атомы, гомеоморфизм уже задан, то его можно продолжить на эти трубки. □

**Замечание 1.** *Вообще говоря, существует два способа приклейки цилиндра (трубки), который соответствует ребру молекулы, к граничной окружности атома. Но в ориентированном случае молекула однозначно задаёт функцию, поскольку приклейку следует совершать с согласованием ориентаций. В неориентируемом случае в вершинах молекулы необходимо задать дополнительную информацию, чтобы соответствующее утверждение было верно.*

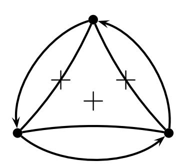
## 4. Кодирование атомов критических слоёв

Обобщим конструкцию f-графа на случай вырожденных критических точек. Вершины и ориентированные рёбра определяются аналогично невырожденному случаю. Каждая пара сепаратрис, проходящих по отрицательным кольцам, которые в окрестности критической точки граничат с одним и тем же положительным кольцом, задаёт неориентированное ребро.

**Замечание 2.** *Если расставить метки-знаки аналогично невырожденному случаю, то такой граф не будет различать некоторые атомы. Действительно, после склейки из шестиугольников отрицательных колец есть* $2^k$ *вариантов склейки* *атома (в предположении, что на критическом уровне есть только одна вырожденная критическая точка индекса Пуанкаре* $1 - k$*, то есть её тип такой же, как и у точки* $(0,0)$ *для функции* $\Re e\,(x+iy)^k$*). А количество знаков на неориентированных рёбрах, хотя и равно* $k$*, но один из них определяется через остальные, то есть не несёт никакой информации. Например, два разных атома, спайны которых изображены на рис. 5(a), имеют один и тот же обобщённый f-граф. Для однозначности нужен ещё один бит информации.*




(a) Спайны атомов




(b) f-граф

Рис. 5

Зафиксируем произвольным образом на каждом неориентированном многоугольнике ориентацию. Таким образом, неориентированные рёбра приобретут ориентацию, в дальнейшем мы будем их называть *внутренними рёбрами* и изображать пунктиром, в отличие от *граничных рёбер*, которые соответствуют дугам границы атома. Знаки будем расставлять не на рёбрах, а в вершинах по следующему правилу. Рассмотрим окрестность той части сепаратрисы, идущей из границы отрицательного кольца в критическую точку, которая не содержит критическую точку. Одна сторона этого прямоугольника принадлежит граничной окружности, а значит, на ней задана ориентация, направление противоположной стороны задаётся ранее зафиксированной ориентацией многоугольника. Если они индуцируют одну и ту же ориентацию прямоугольника, то в соответствующей вершине ставим знак плюс, иначе — минус.

**Определение 9.** *Так определённый граф назовём fd-графом. Эквивалентность fd-графов задаётся изоморфизмом, сохраняющим ориентации рёбер и метки вершин, а также операцией изменения направления всех рёбер любого одноцветного цикла с одновременной заменой знаков инцидентных вершин на противоположные.*

То есть fd-граф — это граф, вершины которого имеют степень 4 и содержат метку-знак, а рёбра ориентированы и раскрашены в два цвета. Причём, в каждую вершину входит и из каждой вершины выходит по одному ребру каждого цвета, и внутренние рёбра образуют ориентированные циклы длины $k_j$, $j = 1, \ldots, n$, где $n$ — количество критических точек слоя, в окрестностях которых функция эквивалентна $\Re e\,(x + iy)^{k_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Граничным окружностям отрицательных колец f-атома соответствуют циклы граничных рёбер fd-графа. Граничным окружностям положительных колец f-атома соответствуют смешанные циклы, где внутренние и граничные рёбра чередуются, причём знак вершины определяет по ребру с какой ориентацией следует продолжать путь (если плюс, то направление следующего ребра должно совпадать с направлением предыдущего). Каждое ребро принадлежит ровно одному из циклов, соответствующих граничным окружностям положительных колец.

Опишем алгоритм склейки f-атома по fd-графу. Сопоставим каждому граничному ребру fd-графа шестиугольник. Первый этап склейки отрицательных колец f-атома происходит, как и в невырожденном случае. На втором этапе следует склеить отрезок $p_i^+$ с $q_j^+$ (направления при склейке противоположны), если существует внутреннее ребро, соединяющее вершины $(i,*)$ ($i$-е граничное ребро входит, выходит любое) и $(*,j)$ и при этом направленное от $(i,*)$ к $(*,j)$, если метки в вершинах $+1$, и от $(*,j)$ к $(i,*)$, если метки $-1$. Отрезки $p_i^+$ и $P_j^+$ склеиваются (ориентации согласованы), если существует внутреннее ребро, соединяющее вершины $(i,*)$ и $(j,*)$ и направленное от $(i,*)$ к $(j,*)$, если метки в вершинах $+1$ и $-1$ соответственно, или же от $(j,*)$ к $(i,*)$, если метки $-1$ и $+1$. Отрезки $q_i^+$ и $q_j^+$ склеиваются (ориентации согласованы), если существует внутреннее ребро, соединяющее вершины $(*,i)$ и $(*,j)$ и направленное от $(*,i)$ к $(*,j)$, если метки в вершинах $-1$ и $+1$ соответственно, или же от $(*,j)$ к $(*,i)$, если метки $+1$ и $-1$.

**Теорема 3.** *Два f-атома эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им fd-графы эквивалентны.*

*Доказательство.* Хотя fd-граф рассматривается как абстрактный граф, его можно естественным образом вложить в поверхность f-атома. А поскольку гомеоморфизм, который задаёт эквивалентность f-атомов, переводит отрицательные кольца в отрицательные, а спайн f-атома в спайн, то он порождает изоморфизм fd-графов, который сохраняет направления рёбер и метки в вершинах. Причём, при одинаковых ориентациях соответствующих рёбер, метки будут равны, поскольку гомеоморфизм переводит спайн f-атома в спайн.

Достаточность доказывается аналогично невырожденному случаю. Сначала нужно изменить ориентацию некоторых циклов на одном из fd-графов, чтобы они стали изоморфны как ориентированные графы с метками (возможность следует из определения эквивалентности fd-графов). Изоморфизм fd-графов порождает гомеоморфизмы спайнов и граничных окружностей f-атомов, которые непрерывным образом продолжаются на отрицательные и положительные кольца. □

## 5. Примеры

Рассмотрим функции, у которых помимо локальных экстремумов есть ровно одна критическая точка. Такие функции однозначно определяются с точностью до послойной эквивалентности седловым атомом и с точностью до оснащённо послойной эквивалентности седловым f-атомом, а значит, fd-графом.

Рассмотрим функции с одной седловой точкой, в окрестности которой они эквивалентны функции $\Re e\,(x+iy)^3$. Соответствующий fd-граф имеет три вершины, три граничных и три внутренних ребра. Три внутренних ребра образуют треугольник, а для граничных рёбер существуют три варианта: либо они являются сторонами треугольника, либо каждое ребро образует петлю, либо два из них образуют двуугольник, а третье — петлю. В каждом из трёх случаев следует зафиксировать направления рёбер и расставить знаки в вершинах. В первом случае при фиксированной ориентации каждого из циклов возможны четыре варианта расстановки знаков, которые задают неэквивалентные fd-графы: $(+,+,+)$, $(+,+,-)$, $(+,-,-)$ и $(-,-,-)$ (поскольку из-за симметричности графа вершины равноправны). Во втором случае любая расстановка знаков задаёт эквивалентные fd-графы, так как, изменяя ориентацию петель, мы можем изменить любой знак. В третьем случае знак в вершине, которая инцидентна петле, не существенен, а в двух оставшихся вершинах возможны два варианта: либо знаки совпадают, либо различны. Последнее верно, поскольку граничные рёбра образуют цикл длины два и изменение их направлений не изменит граф. Таким образом, всего имеем 7

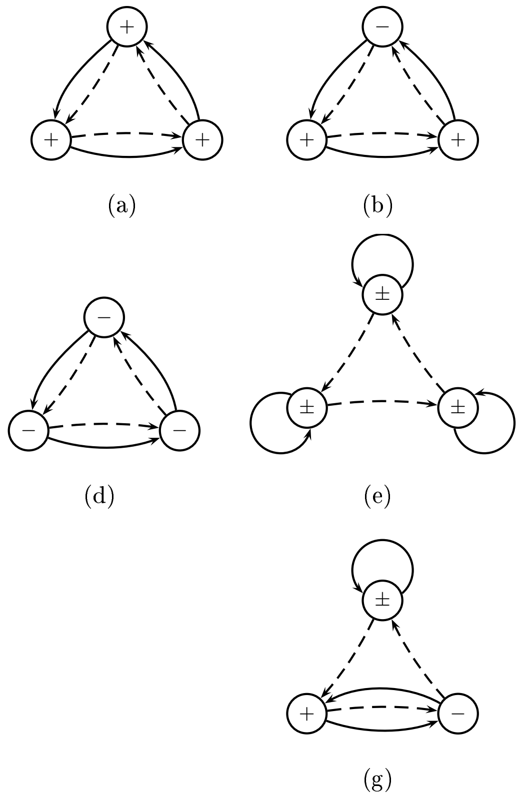



Рис. 6. fd-графы

функций, рассматриваемых с точностью до оснащённо послойной эквивалентности. Из них 4 заданы на ориентируемых поверхностях, а 3 — на неориентируемых. Функция на рис. 6(a) задана на торе, функции на рис. 6(d), рис. 6(e) и рис. 6(f) — на сфере, функции на рис. 6(c) и рис. 6(g) — на проективной плоскости и функция на рис. 6(b) задана на бутылке Клейна.

Если рассматривать эти функции с точностью до послойной эквивалентности, то, поскольку некоторым f-атомам соответствует один атом, некоторые функции будут принадлежать одному классу послойной эквивалентности. Так, функции на рис. 6(d) и рис. 6(e) послойно эквивалентны, а также — функции на рис. 6(c) и рис. 6(g). Таким образом, существует 5 разных (с точностью до послойной эквивалентности) функций такого вида.

## 6. Выводы

В работе доказано, что гладкие функции с изолированными критическими точками с точностью до послойной эквивалентности (оснащённо послойной эквивалентности) задаются при помощи молекул (f-молекул). Для кодирования f-атомов построен fd-граф, являющийся обобщением f-графа на вырожденный случай. Доказано, что fd-граф однозначно задаёт f-атом. Найдены все функции (рассматриваемые как с точностью до послойной, так и с точностью до оснащённо послойной эквивалентности) с одной седловой точкой, в окрестности которой они эквивалентны функции $\Re e\,(x+iy)^3$.

## Список литературы


[1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация: В 2-х т. — Ижевск: Издательский дом „Удмуртский университет“, 1999.

[2] Ошемков А.А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Труды Мат. ин-та РАН. — 1994. — Т. 205. — С. 131–140.

[3] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topology and its application. — V. 119, № 3. — 2002.

[4] Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укра. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 687–700.