Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 417-425

Н. В. Лукова

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ
E-mail: lukova@ukr.net

Топологічна класифікація функцій без критичних точок на тривимірних многовидах з межею

We consider functions on compact 3-manifolds with boundary without critical points and with less than 4 critical points of its restrictions on the boundary. Their topological classification is obtained.

Ключові слова: *Функції, тривимірний многовид, граф, топологічна еквівалентність*

1. Вступ

Якщо M – гладкий замкнений многовид, то функція Морса на ньому буде функцією загального положення, якщо на кожному її критичному рівні міститься одна критична точка. Такі функції утворюють відкриту скрізь щільну множину у просторі всіх функцій. За лемою Морса [7], для невиродженої критичної точки p існує локальна система координат $(x_1, \dots, x_n)$, в якій функція має вигляд

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - {x_1}^2 - \dots - {x_\lambda}^2 + x_\lambda + 1^2 + \dots + {x_n}^2.$$

Нехай M — гладкий компактний n-вимірний многовид з межею ∂M. Функція $f : M \to \mathbf{R}$ є m-функцією, якщо

а) усі її критичні точки — невироджені і не лежать на межі ∂M,

б) обмеження f_∂ функції f на ∂M є функцією Морса загального положення.

Нехай $x \in \partial M$ — критична точка f_∂ Індексом $ind\ x$ цієї критичної точки називається пара (λ, δ), де λ — звичайний індекс, а $\delta = +1$, якщо вектор $\operatorname{grad} f_x$ спрямований назовні, і $\delta = -1$, якщо $\operatorname{grad} f_x$ спрямований в середину многовиду M. Якщо $x \notin \partial M$ — критична точка f, то індекс визначається звичайним чином. Аналогічно лемі Морса в околі невиродженої критичної точки f_∂ існує локальна система координат $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_n \geq 0$, в якій функція f має вигляд [1]

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - {x_1}^2 - \cdots - {x_\lambda}^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \delta x_n.$$

На замкненому многовиді за кожною функцією Морса можна побудувати розклад многовиду на ручки. Для m-функцій існують розклади на m-ручки. При цьому кожній внутрішній критичній точці відповідає звичайна ручка, а кожній точці на межі — m-ручка того самого індексу.

Нехай $f, g : M \to \mathbf{R}$ — гладкі функції. Функції f і g називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $\psi : M \to M$, $\zeta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такі, що $f\zeta = g\psi$.

Критерії топологічної еквівалентності функцій Морса на компактних двовимірних многовидах отримано в роботах [2, 4, 5], а тривимірних – у [8].

Розглянемо m-функцію на 3-многовиді. З'єднавши внутрішні критичні точки цієї функції шляхами з межею і викинувши околи цих шляхів, ми отримаємо многовид, дифеоморфний початковому, і m-функцію без внутрішніх критичних точок на ньому. Далі, ми можемо впорядкувати m-ручки так, щоб спочатку приклеювалися ручки індексу $(0, -1)$, потім $(0, +1)$, $(1, -1)$, $(1, +1)$, $(2, -1)$, і нарешті $(2, +1)$. Всі ручки індексу $(0, -1)$ та $(2, +1)$, крім однієї індексу $(0, -1)$ та однієї індексу $(2, +1)$, скорочуються з ручками індексу $(1, -1)$ та $(1, +1)$, відповідно.

Нехай M — компактний зв'язний тривимірний многовид зі зв'язною межею, $f : M \to \mathbf{R}$ — гладка функція на ньому. Функція f називається p-функцією, якщо вона не має критичних точок і обмеження її на межу має не більше ніж 4 критичні точки, які за зростанням значення функції мають такий вигляд: 1)̃точка мінімуму індексу $(0, -1)$; 2) (вироджена) точка з $\delta = -1$; 3) (вироджена) точка з $\delta = +1$; 4) точка максимуму індексу $(2, +1)$/

Постановка задачі. Основна мета даної статті — побудувати повний топологічний інваріант p-функції на тривимірних многовидах, та довести теорему про його реалізацію.

2. Діаграма p-функції

Дослідимо, як змінюється поверхня рівня p-функції при зростанні значення функції.

При проходженні через точку мінімуму, тобто точку індексу $(0, -1)$, з'являється двовимірний диск. Далі, за відсутності критичних точок топологічний тип поверхні рівня не змінюється. В околі виродженої критичної точки функція f_∂ топологічно еквівалентна функції $\Re(x + iy)^k$ для деякого натурального k [3]. Тоді функція f топологічно еквівалентна функції $\Re(x + iy)^k + \delta z$ в системі координат $(x, y, z), z \geq 0$. При проходженні другої точки до двовимірного диску приклеюється $2k$-кутник за k сторонами, які розташовані через одну (наприклад, непарні, при послідовній нумерації сторін). До самого многовиду приєднується так звана узагальнена m-ручка, що рівносильне приєднанню $k - 1$ штук m-ручок. Отже, після проходження другої точки ми отримаємо, що поверхнею рівня функції буде деяка поверхня F, на якій виділено k правильно вкладених відрізків $u_1, u_2, \ldots, u_k$ (кінці відрізків лежать на межі поверхні), що не мають точок перетину і точок самоперетину. Набір $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — правильно вкладених кривих, що не перетинаються, на поверхні F таких, що після розрізання за ними отримаємо два диски, і таких, що кожне u_i належить межі кожного з цих дисків, називається системою розрізів поверхні F. Проведемо аналогічну конструкцію для функції $-f$. Отримаємо поверхню F' і систему розрізів $v' = \{{v_1}', {v_2}', \ldots, {v_k}'\}$ на ній. Оскільки між рівнями F і F' немає критичних точок, то вони гомеоморфні між собою, а многовид між ними гомеоморфний $F \times [0,1]$. При цьому різним структурам прямого добутку відповідають різні, але ізотопні гомеоморфізми F' на F. Нехай $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ — образ системи розрізів $v' = \{{v_1}', {v_2}', \ldots, {v_k}'\}$ при одному з таких гомеоморфізмів. Якщо поверхня F орієнтовна, то зафіксуємо орієнтацію на ній. Тоді орієнтація 2-диска, що відповідає мінімуму індукує орієнтацію на його межі, у тому числі і на розрізах u. Аналогічно, орієнтація 2-диска, що відповідає максимуму, породжує орієнтацію на кривих v. У випадку неорієнтованої поверхні задамо орієнтації цих 2-дисків довільно, і також отримаємо орієнтації кривих u та v.

Трійку (F, u, v) будемо називати p-діаграмою. p-діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються гомеоморфними, якщо існує такий гомеоморфізм $h : F \to F'$, що $h(u) = u'$ і $h(v) = v'$. При цьому, якщо гомеоморфізм зберігає (змінює) орієнтацію поверхні, то він зберігає (змінює) і орієнтації розрізів. У випадку неорієнтованої поверхні гомеоморфізм зберігає або одночасно змінює орієнтації всіх u-розрізів і, аналогічно, v-розрізів.

p-діаграми (F, u, v) і (F', u', v') називаються напівізотопними, якщо існують такі ізотопії $\varphi_t, \psi_t : F \to F'$, що $\varphi_0 = \psi_0 = id$, $\varphi_1(u) = u'$, $\psi_1(v) = v'$. Отже, різні вибори структури прямого добутку на $F \times [0,1]$ приводять до напівізотопних діаграм.

Використовуючи напівізотопії діаграм можна знищити всі криволінійні двокутники, одна із сторін яких належить системі u, а інша – v. Так само можна знищити всі криволінійні трикутники, у яких одна сторона належить системі u, друга – v, а третя – ∂F. Також за допомогою напівізотопії криві з систем u і v, які ізотопні, можна зробити такими, що співпадають. Діаграму, у якої немає криволінійних двокутників та трикутників, а ізотопні криві з різних систем співпадають, будемо називати нормалізованою.

Теорема 1. *p-функції $f : M \to \boldsymbol{R}$, $g : N \to \boldsymbol{R}$ топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли побудовані за ними нормалізовані p-діаграми гомеоморфні.*

Доведення. Необхідність.

За побудовою p-діаграма за даною функцією задається з точністю до напівізотопії. Аналогічно доведенню теореми 5.3 з [6] для діаграм Хегора, якщо дві діаграми напівізотопні, то нормалізовані діаграми гомеоморфні. Крім того, топологічна еквівалентність функцій породжує гомеоморфізм між p-діаграмами, а отже, і гомеоморфізм між нормалізованими p-діаграмами.

Достатність. Якщо діаграми гомеоморфні, то у них однакові числа k. Тоді функції в околах критичних точок топологічно еквівалентні функціям $h(x, y, z) = \Re(x + iy)^k \pm z$ або $h(x, y, z) = \pm(x^2 + y^2 + z)$. Отже, в околах критичних точок функції топологічно еквівалентні. Так само, як для діаграм Хегора [8], гомеоморфізм нормалізованих p-діаграм задає продовження цих гомеоморфізмів до шуканого гомеоморфізму тривимірного многовиду. Теорема доведена. □

3. p-граф

Побудуємо вкладений в замкнену поверхню орієнтований граф, який будемо називати p-графом. Стягнемо кожну компоненту межі в точку, яку будемо розглядати як вершини p-графа. Ребрами будуть розрізи $u_1, u_2, \ldots, u_k$ та $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Якщо розрізи співпадають, то їм буде відповідати одне "подвійне" ребро. Отже, ребра p-графа розбиті на три типи: 1) u; 2) v і 3) "подвійні". Орієнтації розрізів задають орієнтації ребер. При цьому на подвійних ребрах задано дві орієнтації (u-орієнтація і v-орієнтація). Після стягнення компонент межі поверхні F в точки отримаємо нову замкнену поверхню Φ. При цьому, p-граф є графом, вкладеним в Φ. Далі будемо розглядати такі графи, у яких більше ніж 2 ребра. Випадки з 1 та 2 ребрами розглянуто в прикладах.

Теорема 2. *p–функції $f : M \to \boldsymbol{R}$, $g : N \to \boldsymbol{R}$ топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує гомеоморфізм відповідних поверхонь Φ, який задає ізоморфізм p-графів, зберігає* *тип ребер та зберігає або одночасно змінює орієнтації ребер, як для розрізів.*

Доведення. Необхідність. Необхідність випливає з теореми 1 та однозначності побудови p-графа.

Достатність. Покажемо, як за вкладеним p-графом побудувати p–діаграму. Вирізаємо з поверхні Φ регулярні околи вершин p-графа. Отримуємо, поверхню, гомеоморфну F, і вкладені в неї криві (розрізи), що задаються вкладеннями ребер p-графа. При цьому подвійним ребрам відповідає пара u- і v-розрізів, що співпадають. Тоді гомеоморфізм поверхонь Φ задає гомеоморфізм p–діаграм, а отже, і топологічну еквівалентність p-функцій. Теорема доведена. □

Властивості p-графів.

За побудовою p-граф має такі властивості:

(1) число ребер типу u рівне числу ребер типу v;

(2) u-підграф, що складений з ребер типу u та подвійних ребер розбиває поверхню на дві однозв'язні області і кожне ребро цього підграфа входить в межу кожної з двох областей;

(3) аналогічна властивість для v-підграфа, складеного з ребер типу v та подвійних ребер.

Теорема 3. *Вкладений в замкнену поверхню граф, ребра якого розбиті на три типи так, що виконуються властивості 1)–3), є p-графом деякої p-функції.*

Доведення. Розглянемо чотири тривимірних диска і функції $h(x,y,z) = \Re(x+iy)^k \pm z$ та $h(x,y,z) = \pm(x^2+y^2+z)$ на них, де $(0,0,0)$ — деяка точка на межі, в околі якої диск має рівняння $z \geq 0$. За p-графом побудуємо p-діаграму, яка задає склейку цих дисків між собою. Після склейки отримаємо тривимірний многовид і функцію на ньому. За необхідності згладивши функцію в місцях склейки, отримуємо шукану p-функцію. Теорема доведена. □

4. Приклади обчислень

Число розрізів k однієї з систем будемо називати складністю функції. Якщо F — орієнтована поверхня роду g з d компонентами краю, то $k = 2g + d$, а якщо вона не орієнтована, то $k = g + d$.

Розглянемо випадок орієнтованої поверхні.

1) $k = 1$. Тоді $g = 0$, $d = 1$. Існує єдиний p-граф — петля з подвійним ребром. Дві орієнтації на ньому можуть співпадати або бути протилежними. Проте обидва ці випадки задають напівізотопні діаграми. Отже, існує єдина, з точністю до топологічної еквівалентності, така p-функція.

2) $k = 2$. Тоді $g = 0$, $d = 2$. Також існує єдиний p-граф, гомеоморфний колу з двома вершинами на ньому і подвійними ребрами, а обидві пари орієнтацій на ньому приводять до напівізотопних діаграм. Отже, в цьому випадку існує єдина, з точністю до топологічної еквівалентності, p-функція .

3) $k = 3$. А) $g = 0$, $d = 3$. p-граф, гомеоморфний колу з трьома вершинами на ньому і подвійними ребрами. На подвійних ребрах орієнтації співпадають або протилежні. Тому існує дві, з точністю до топологічної еквівалентності, p-функції.

Б) $g = 1$, $d = 1$. u–підграф має одну вершину і три петлі без точок перетину на торі. Тоді дві з цих петель задають твірні фундаментальної групи тора, а третя є їх добутком. v–підграф має ту саму властивість. Оскільки пара твірних фундаментальної групи виражається через іншу пару твірних за допомогою матриці з $\mathbf{SL(2,Z)}$, то ця матриця задає p-граф. При цьому дві матриці задають один і той самий p-граф, якщо вони однакові, або одну з іншої можна отримати множенням матриці на -1. Отже, у цьому випадку існує нескінченно багато p-графів .

Розглянемо випадок неорієнтованої поверхні.

1) $k = 2$. Тоді $g = 1$, $d = 1$. Існує єдиний p-граф, гомеоморфний 8 з подвійними ребрами. F – гомеоморфна стрічці Мьобіуса. Якщо її подати як прямокутник зі склеєною парою

протилежних сторін, то розрізи гомотопні цим сторонам. Однакові та протилежні орієнтації подвійних ребер задають напівізотопні діаграми. Отже, існує єдина, з точністю до топологічної еквівалентності, така p-функція.

2) $k = 3$. А) $g = 1$, $d = 2$. u–підграф можна отримати з p-графа з попереднього прикладу, якщо до нього добавити одну вершину і ребро, що її з'єднує з вершиною на 8. Один p-граф можна отримати, якщо всім ребрам приписати тип подвійних ребер. Ще один p-граф має вигляд двох 8, вершини яких з'єднані подвійним ребром. На кожному з подвійних ребер, кожну з пари орієнтацій можна вибрати двома способами, тобто всього існує 4 способи для пари. А тому існує вісім, з точністю до топологічної еквівалентності, p-функцій.

Б) $g = 2$, $d = 1$. u–підграф має одну вершину та три петлі. Можливі два не гомеоморфних вкладення його в пляшку Клейна, що дають 4 різних p-графа. На трьох з них можливі по 2 орієнтації (у них існує гомеоморфізм самого графа на себе, що змінює орієнтацію), а у четвертого – 4 орієнтації (такого гомеоморфізму не існує). Отже, в цьому випадку існує 10 топологічно не еквівалентних p-функцій .

Висновок. Побудовано повний топологічний інваріант p-функцій на тривимірних многовидах, доведено теорему реалізації цього інваріанта функцією. Тим самим отримано топологічну класифікацію p-функцій. Ефективність побудованого інваріанту продемонстровано на прикладах. Описано всі функції, складність яких не перевищує 3.

Література

[1] *Jankowski A., Rubinsztein R.* Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary// Comm. Math. – 1972.– V.XVI.– P.99–112.

[2] *Kulinich E. V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Methods of Func. An. and Topology.– 1998.– N1.– P. 22–28.

[3] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface// Topology and its application.– 2002.– V.119, N3.– P.257–267.

[4] *Sharko V. V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Int. conference at Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theoremy.– 1996.– P.19–23.

[5] *Максименко С. І.* Еквівалентність m-функцій на поверхнях, Некоторые вопросы совр. мат.: Праці Ін-ту математики НАН України.–1998.– Т.25.– С.128–134.

[6] *Матвеев С. В.,Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. – М.: Изд-во Моск.гос.ун-та, 1991.– 301с.

[7] *Милнор Дж.* Теория Морса.– М.: Мир,1964.–184 с.

[8] *Пришляк А. О.* Сопряжённость функций Морса// Некоторые вопросы совр. мат.: Праці Ін-ту математики НАН України.–1998.– Т.25.– С94-103.