Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 400-416

517.929

Р. І. Качурівський

Інститут математики НАН України, Київ

Г. П. Пелюх

Інститут математики НАН України, Київ

Про існування періодичних розв'язків систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

Одержані достатні умови існування і єдиності неперервно диференційовного N-періодичного (N — ціле додатне число) розв'язку систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу і досліджені його властивості.

We obtain sufficient conditions for existence and unicity of continuously differentiable and N-periodic (N — positive integer) solution to system of differential-functional equations of neutral type with linear deviations of the argument. We also investigate properties of this solution.

Розглянемо систему диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t-1)), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$ — невироджена $(n \times n)$-матриця, дійсні частини власних значень якої відмінні від нуля, вектор-функція $f(t, x, y, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервною за всіма змінними та N-періодичною по t (N — ціле додатне число). Питання про існування періодичних розв'язків деяких класів таких систем рівнянь досліджувались в [[1]- [7]]. Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі встановлюються умови існування і єдиності N-періодичного розв'язку системи (1), пропонується метод його побудови і вивчаються його властивості.

Не порушуючи загальності, далі будемо вважати, що

$$A = \mathrm{diag}\Big(A_1, A_2\Big),$$

де $A_1,\ A_2$ — дійсні, сталі матриці розміру $(p\times p)$ та $(n-p\times n-p)$ відповідно, власні значення яких задовольняють умовам

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A_1) < 0,\ i = \overline{1,p},$$

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A_2) > 0,\ i = \overline{p+1,n}.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) для довільних $(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{z}}),\ (t,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ має місце співвідношення

$$|f(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{z}}) - f(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \le L(|\bar{\bar{x}}-\bar{x}| + |\bar{\bar{y}}-\bar{y}| + |\bar{\bar{z}}-\bar{z}|),$$

де L — деяке додатне число;

2) $\max\limits_{t\in[0;N)} |f(t,0,0,0)| = f^* < +\infty;$

3)$|e^{A_1 t}| \le N_1 e^{-\alpha_1 t},\ |e^{-A_2 t}| \le N_2 e^{-\alpha_2 t},\ t\in\mathbb{R}^+$, *де α_1, α_2, N_1, N_2 — деякі додатні сталі, $N_1, N_2 \ge 1$;*

$$4)\ \Delta = 2L\Big((\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2})(|A|+1)+1\Big) < 1,$$

де

$$|A| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Тоді існує єдиний неперервно диференційовний N-періодичний розв'язок $\gamma(t)$ системи рівнянь (1).

Доведення. Якщо $x(t)$ — деякий періодичний розв'язок системи рівнянь (1), тобто виконується умова

$$x(t+N)=x(t),\ t\in\mathbb{R},$$

то, приймаючи до уваги (1), отримуємо

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t)&=Ax(t)+f(t,x(t),x(t+N-1),\dot{x}(t+N-1)),\\
\dot{x}(t+1)&=Ax(t+1)+f(t+1,x(t+1),x(t),\dot{x}(t)),\\
\dot{x}(t+2)&=Ax(t+2)+f(t+2,x(t+2),x(t+1),\dot{x}(t+1)),\\
&\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{x}(t+N-1)&=Ax(t+N-1)+\\
&\qquad f(t+N-1,x(t+N-1),x(t+N-2),\dot{x}(t+N-2)).
\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення

$$x(t+i)=x_i(t),\ i=\overline{0,N-1}$$

$$X(t)=(x_0(t),x_1(t),\ldots,x_{N-1}(t)),$$

$$\begin{gathered}
\widetilde{f}(t,X(t),\dot{X}(t))=\Big(f(t,x_0(t),\dot{x}_{N-1}(t),\dot{x}_{N-1}(t)),\\
f(t+1,x_1(t),x_0(t),\dot{x}_0(t)),f(t+2,x_2(t),x_1(t),\dot{x}_1(t)),\ldots,\\
\ldots,f(t+N-1,x_{N-1}(t),x_{N-2}(t),\dot{x}_{N-2}(t))\Big).
\end{gathered} \tag{2}$$

Очевидно, що в силу умови 2) та N-періодичності по t вектор-функції $f(t,x,y,z)$, матимуть місце співвідношення

$$\widetilde{f}(t+N,X,Y)=\widetilde{f}(t,X,Y),\ t\in\mathbb{R},$$

$$\max_{t\in[0;N)}|\widetilde{f}(t,0,0)|=f^*. \tag{3}$$

На основі умови 1), для довільних $t\in\mathbb{R}$,

$$\bar{X}=(\bar{x}_0,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{N-1}),\qquad \bar{Y}=(\bar{y}_0,\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{N-1}),$$

$$\bar{\bar{X}}=(\bar{\bar{x}}_0,\bar{\bar{x}}_1,\ldots,\bar{\bar{x}}_{N-1}),\qquad \bar{\bar{Y}}=(\bar{\bar{y}}_0,\bar{\bar{y}}_1,\ldots,\bar{\bar{y}}_{N-1}),$$

що належать $\mathbb{R}^{nN}$, одержимо

$$|f(t,\bar{x}_0,\bar{x}_{N-1},\bar{y}_{N-1})-f(t,\bar{\bar{x}}_0,\bar{\bar{x}}_{N-1},\bar{\bar{y}}_{N-1})|\leq$$

$$\leq L\Big(|\bar{x}_0 - \bar{\bar{x}}_0| + |\bar{x}_{N-1} - \bar{\bar{x}}_{N-1}| + |\bar{y}_{N-1} - \bar{\bar{y}}_{N-1}|\Big) \leq \tag{4}$$

$$\leq 2L\Big(|\bar{X} - \bar{\bar{X}}| + |\bar{Y} - \bar{\bar{Y}}|\Big).$$

Аналогічно отримуємо

$$|f(t+i, \bar{x}_i, \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}) - f(t+i, \bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{x}}_{i-1}, \bar{\bar{y}}_{i-1})| \leq \tag{5}$$
$$\leq 2L\Big(|\bar{X} - \bar{\bar{X}}| + |\bar{Y} - \bar{\bar{Y}}|\Big), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Звідси безпосередньо випливає, що вектор-функція $\widetilde{f}(t, X, Y)$ задовольняє умові

$$|\widetilde{f}(t, \bar{X}, \bar{Y}) - \widetilde{f}(t, \bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}})| \leq 2L\Big(|\bar{X} - \bar{\bar{X}}| + |\bar{Y} - \bar{\bar{Y}}|\Big) \tag{6}$$

при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}} \in \mathbb{R}^{nN}$.

Розглянемо тепер систему

$$\dot{X}(t) = \tilde{A}X(t) + \widetilde{f}(t, X(t), \dot{X}(t)), \tag{7}$$

де $\tilde{A} = \mathrm{diag}[A, A, \ldots, A]$.

Очевидно, що якщо $\gamma(t)$ — N-періодичний розв'язок системи диференціально-різницевих рівнянь (1), то вектор-функція $\Gamma(t) = (\gamma(t), \gamma(t+1), \ldots, \ldots, \gamma(t+N-1))$ буде N-періодичним розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь (7).

Для побудови N-періодичного розв'язку системи (7) скористаємося методом послідовних наближень, які визначимо за допомогою співвідношень

$$X_0(t) = 0, \ \dot{X}_0(t) = 0,$$

$$X_m(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(t-\tau)\widetilde{f}(\tau, X_{m-1}(\tau), \dot{X}_{m-1}(\tau))d\tau, \tag{8}$$

$$\dot{X}_m(t) = \widetilde{A}X_m(t) + \widetilde{f}(t, X_{m-1}(t), \dot{X}_{m-1}(t)),$$
$$m = 1, 2, \ldots,$$

де

$$\widetilde{G}(t) = \mathrm{diag}\Big(G(t), G(t), \ldots, G(t)\Big),$$

$$G(t) = \begin{cases} -\mathrm{diag}\Big(0, e^{A_2 t}\Big), \text{ при } t < 0, \\ \mathrm{diag}\Big(e^{A_1 t}, 0\Big), \text{ при } t > 0. \end{cases}$$

Розмірковуючи за індукцією, неважко переконатися у тому, що $X_m(t)$, $m \geq 0$, є неперервно диференційовними при $t \in \mathbb{R}$ і N-періодичними.

Покажемо, що послідовності вектор-функцій $X_m(t)$, $\dot{X}_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, визначені співвідношеннями (8), рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при $t \in \mathbb{R}$ і всіх цілих $m \geq 1$ мають місце оцінки

$$|X_m(t) - X_{m-1}(t)| \leq M_1 \Delta^{m-1},$$

(9)

$$|\dot{X}_m(t) - \dot{X}_{m-1}(t)| \leq M_2 \Delta^{m-1},$$

де

$$M_1 = \Big(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\Big) f^*, \;\; M_2 = \Big(|A|(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}) + 1\Big) f^*.$$

Справді, в силу (3) маємо

$$|X_1(t) - X_0(t)| = |\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(t-\tau)\widetilde{f}(t,0,0)d\tau| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{G}(t-\tau)||\widetilde{f}(t,0,0)|d\tau \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)||\widetilde{f}(t,0,0)|d\tau \leq$$

$$\leq f^*\Big(\int\limits_{-\infty}^{t} N_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)}d\tau + \int\limits_{t}^{+\infty} N_2 e^{-\alpha_2(\tau-t)}d\tau\Big) \leq$$

$$\leq f^*\Big(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\Big),$$

$$|\dot{X}_1(t) - \dot{X}_0(t)| = |\widetilde{A}X_1(t) + \widetilde{f}(t,0,0)| \le$$
$$\le |\widetilde{A}||X_1(t)| + |\widetilde{f}(t,0,0)| \le |A||X_1(t)| + |\widetilde{f}(t,0,0)| \le$$
$$\le \Big(|A|(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}) + 1\Big) f^*,$$

тобто оцінки (9) мають місце при $m = 1$.

Припустимо, що оцінки (9) доведені уже для деякого $m-1$ і покажемо, що вони не зміняться при переході до m. Справді, в силу (9) та умови (6) одержимо

$$|X_m(t) - X_{m-1}(t)| =$$
$$= \Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}(t-\tau)\Big(\widetilde{f}(\tau, X_{m-1}(\tau), \dot{X}_{m-1}(\tau)) - \widetilde{f}(\tau, X_{m-2}(\tau), \dot{X}_{m-2}(\tau))\Big)d\tau\Big| \le$$
$$\le 2L\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widetilde{G}(t-\tau)|\Big(|X_{m-1}(\tau) - X_{m-2}(\tau)| + |\dot{X}_{m-1}(\tau) - \dot{X}_{m-2}(\tau)|\Big)d\tau \le$$
$$\le 2L(M_1 + M_2)\Delta^{m-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widetilde{G}(t-\tau)|d\tau =$$
$$= 2L\Big((\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2})f^* + \Big(|A|(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}) + 1\Big)f^*\Big)\Delta^{m-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widetilde{G}(t-\tau)|d\tau =$$
$$= f^*\Delta^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widetilde{G}(t-\tau)|d\tau \le f^*\Delta^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)|d\tau \le$$
$$\le f^*\Delta^{m-1}\Big(\int\limits_{-\infty}^{t}N_1e^{-\alpha_1(t-\tau)}d\tau + \int\limits_{t}^{+\infty}N_2e^{-\alpha_2(\tau-t)}d\tau\Big) =$$
$$= \Big(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\Big)f^*\Delta^{m-1} = M_1\Delta^{m-1},$$
$$|\dot{X}_m(t) - \dot{X}_{m-1}(t)| =$$

$$= |\widetilde{A}X_m(t) +$$
$$+ \widetilde{f}(t, X_{m-1}(t), \dot{X}_{m-1}(t)) - \widetilde{A}X_{m-1}(t) - \widetilde{f}(t, X_{m-2}(t), \dot{X}_{m-2}(t))| \leq$$

$$\leq |\widetilde{A}| \cdot |X_m(t) - X_{m-1}(t)| +$$
$$+ 2L\Big(|X_{m-1}(t) - X_{m-2}(t)| + |\dot{X}_{m-1}(t) - \dot{X}_{m-2}(t)|\Big) \leq$$
$$\leq |\tilde{A}|M_1\Delta^{m-1} + 2L(M_1 + M_2)\Delta^{m-2} =$$

$$= |\tilde{A}|M_1\Delta^{m-1} + 2L\Big((\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2})(|A| + 1) + 1\Big)f^*\Delta^{m-2} \leq$$

$$\leq |A|M_1\Delta^{m-1} + f^*\Delta^{m-1} =$$
$$= \Big(|A|(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}) + 1\Big)f^*\Delta^{m-1} = M_2\Delta^{m-1}.$$

Таким чином, оцінки (9) мають місце при всіх $m \geq 1$ і, отже, послідовності вектор-функцій $X_m(t)$, $\dot{X}_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, а вектор-функція

$$\Gamma(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (X_m(t) - X_{m-1}(t)) \tag{10}$$

буде неперервно диференційовним N-періодичним розв'язком системи рівнянь (7).

Покажемо тепер, що так побудований розв'язок

$$\Gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \ldots, \gamma_{N-1}(t))$$

системи (7) буде єдиним.

Дійсно, припустивши, що існує ще один неперервно диференційовний N-періодичний розв'язок $Y(t)$ системи рівнянь (7) ($\Gamma(t) \not\equiv Y(t)$), одержимо

$$|\Gamma(t) - Y(t)| =$$

$$= \Big| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(t-\tau)\Big(\widetilde{f}(\tau,\Gamma(\tau),\dot{\Gamma}(\tau)) - \widetilde{f}(t,Y(\tau),\dot{Y}(\tau))\Big)d\tau\Big| \leq$$

$$\leq 2L \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{G}(t-\tau)|\Big(|\Gamma(\tau)-Y(\tau)| + |\dot{\Gamma}(\tau)-\dot{Y}(\tau)|\Big)d\tau \leq$$

$$\leq 2L||\Gamma(t)-Y(t)|| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|d\tau \leq$$

$$\leq 2L||\Gamma(t)-Y(t)||\Big(\int\limits_{-\infty}^{t} N_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)}d\tau + \int\limits_{t}^{+\infty} N_2 e^{-\alpha_2(\tau-t)}d\tau\Big) =$$

$$= 2L\Big(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\Big)||\Gamma(t)-Y(t)||,$$

$$|\dot{\Gamma}(t)-\dot{Y}(t)| =$$
$$= |\widetilde{A}\Gamma(t) + \widetilde{f}(t,\Gamma(t),\dot{\Gamma}(t)) - \widetilde{A}Y(t) - \widetilde{f}(t,Y(t),\dot{Y}(t))| \leq$$
$$\leq |\widetilde{A}|\cdot|\Gamma(t)-Y(t)| + 2L\Big(|\Gamma(t)-Y(t)| + |\dot{\Gamma}(t)-\dot{Y}(t)|\Big) \leq$$
$$\leq 2L|A|\Big(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\Big)||\Gamma(t)-Y(t)|| + 2L||\Gamma(t)-Y(t)|| =$$
$$= 2L\Big(|A|(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}) + 1\Big)||\Gamma(t)-Y(t)||,$$

де $||\Gamma(t)-Y(t)|| = \max\limits_{t\in[0;N)}\Big(|\Gamma(t)-Y(t)| + |\dot{\Gamma}(t)-\dot{Y}(t)|\Big)$.

Звідси випливає

$$||\Gamma(t)-Y(t)|| \leq \Delta||\Gamma(t)-Y(t)||,$$

що можливо лише у випадку, коли $\Gamma(t)\equiv Y(t)$. Отримане протиріччя завершує доведення твердження, що вектор-функція $\Gamma(t) = (\gamma_0(t),\gamma_1(t),\ldots,\gamma_{N-1}(t))$, яка визначається співвідношенням (10), є єдиним неперервно диференційовним N-періодичним розв'язком системи рівнянь (7).

Оскільки система (7) має вигляд

$$
(11)\qquad \begin{cases} \dot{x}_0(t)=Ax_0(t)+f(t,x_0(t),x_{N-1}(t),\dot{x}_{N-1}(t)),\\ \dot{x}_1(t)=Ax_1(t)+f(t+1,x_1(t),x_0(t),\dot{x}_0(t)),\\ \dot{x}_2(t)=Ax_2(t)+f(t+2,x_2(t),x_1(t),\dot{x}_1(t)),\\ \cdots\ \cdots\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \dot{x}_{N-1}(t)=Ax_{N-1}(t)+f(t+N-1,x_{N-1}(t),x_{N-2}(t),\dot{x}_{N-2}(t)), \end{cases}
$$

то можна переконатися, врахувавши N-періодичність по t вектор-функції $f(t,x,y,z)$, що вектор-функція

$$\bar{\Gamma}(t)=(\gamma_{N-1}(t+1),\gamma_0(t+1),\dots,\gamma_{N-2}(t+1))$$

також буде N-періодичним розв'язком системи (7). В силу єдиності отримаємо

$$
(12)\qquad \begin{gathered} \gamma_{N-1}(t+1)=\gamma_0(t),\\ \gamma_0(t+1)=\gamma_1(t),\\ \gamma_1(t+1)=\gamma_2(t),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{N-2}(t+1)=\gamma_{N-1}(t),\\ t\in\mathbb{R}, \end{gathered}
$$

звідки безпосередньо випливає, що $\gamma_{N-1}(t)=\gamma_0(t-1)$.

Оскільки в силу (11) маємо

$$\dot{\gamma}_0(t)=A\gamma_0(t)+f(t,\gamma_0(t),\gamma_{N-1}(t),\dot{\gamma}_{N-1}(t)),$$

то приймаючи до уваги (12), отримуємо

$$\dot{\gamma}(t)=A\gamma(t)+f(t,\gamma(t),\gamma(t-1),\dot{\gamma}(t-1)),$$

де $\gamma(t)=\gamma_0(t),\ t\in\mathbb{R}$.

Таким чином, неперервно диференційовна N-періодична вектор-функція $\gamma(t)$ є розв'язком системи (1).

Припустимо, що існує ще один неперервно диференційовний N-періодичний розв'язок $\tilde{\gamma}(t)$ системи рівнянь (1) ($\gamma(t)\not\equiv\tilde{\gamma}(t)$). Тоді N-періодична вектор-функція

$$\tilde{\Gamma}(t)=(\tilde{\gamma}(t),\tilde{\gamma}(t+1),\dots,\tilde{\gamma}(t+N-1)$$

буде задовольняти систему (7). В силу єдиності N-періодичного розв'язку системи (7), одержимо

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Отримане протиріччя завершує доведення теореми.

Виконуючи в (1) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{13}$$

де $\gamma(t)$ — N-періодичний розв'язок цієї системи, одержуємо систему рівнянь вигляду

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + \Phi(t, y(t), y(t-1), \dot{y}(t-1)), \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned}\Phi(t, y(t), y(t-1), \dot{y}(t-1)) &= \\ = f(t, \gamma(t) + y(t), \gamma(t-1) &+ y(t-1), \dot{\gamma}(t-1)+ \\ &+ \dot{y}(t-1)) - f(t, \gamma(t), \gamma(t-1), \dot{\gamma}(t-1)).\end{aligned}$$

Очевидно, що вектор-функція $\Phi(t, x, y, z)$ відповідає умовам 1) – 2) теореми 1 і $\Phi(t, 0, 0, 0) \equiv 0$ при $t \in \mathbb{R}$.

Розглянемо систему (14) при $t \leq 0$. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1) – 3) теореми 1 і умова*

$$4')\ \Delta_- = \Big(\frac{N_1}{\alpha_1 + \alpha_*} + \frac{N_2}{\alpha_2 - \alpha_*}\Big)(3 + |A|)L < 1,$$

де α_* — деяка додатна стала така, що $0 < \alpha_2 - \alpha_* < 1$.

Тоді існує $(n-p)$-параметрична сім'я $y_-(t)$ розв'язків системи (14) у вигляді ряду

$$y_-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \tag{15}$$

($y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots,$ — деякі неперервно диференційовні вектор-функції), для яких виконується умова

$$\lim_{t \to -\infty} y_-(t) = 0.$$

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь

$$\dot{y}_0(t) = Ay_0(t),$$
$$\dot{y}_1(t) = Ay_1(t) + \Phi(t, y_0(t), y_0(t-1), \dot{y}_0(t-1)),$$

$$\dot{y}_i(t) = Ay_i(t) + \Big[\Phi(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-1} \dot{y}_j(t-1)) - \\ -\Phi(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-2} \dot{y}_j(t-1))\Big], \tag{16}$$

$$i = 2, 3, \dots$$

Легко переконатися, що неперервно диференційовні при $t \leq 0$ вектор-функції

$$y_0(t) = \mathrm{diag}\Big(0, e^{A_2 t} C_{n-p}\Big),$$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{0} G(t-\tau)\Phi(\tau, y_0(\tau), y_0(\tau-1), \dot{y}_0(\tau-1))d\tau,$$

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{0} G(t-\tau)\sigma_{i-1}(\tau)d\tau, \tag{17}$$

$$\dot{y}_0(t) = \mathrm{diag}\Big(0, A_2 e^{A_2 t} C_{n-p}\Big),$$
$$\dot{y}_1(t) = Ay_1(t) + \Phi(t, y_0(t), y_0(t-1), \dot{y}_0(t-1)),$$
$$\dot{y}_i(t) = Ay_i(t) + \sigma_{i-1}(t),$$
$$i = 2, 3, \dots$$

де C_{n-p} — довільний вектор-стовпець розмірності $n-p$,

$$\sigma_{i-1}(t)=\Phi(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j(t),\sum_{j=0}^{i-1}y_j(t-1),\sum_{j=0}^{i-1}\dot{y}_j(t-1))-$$

$$-\Phi(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j(t),\sum_{j=0}^{i-2}y_j(t-1),\sum_{j=0}^{i-2}\dot{y}_j(t-1)),$$

є розв'язками відповідних систем рівнянь (16) при $t\le 0$.

Покажемо, що ряд (15), члени якого визначаються формулами (17), рівномірно збігається при всіх $t\le 0$ і його сума $y_-(t)\to 0$ при $t\to-\infty$. Для цього достатньо показати, що при $t\le 0$ виконуються наступні співвідношення:

$$|y_i(t)|\le \widehat{M_1}\Delta_-^i e^{\alpha_* t},\ |\dot{y}_i(t)|\le \widehat{M_2}\Delta_-^i e^{\alpha_* t}, \quad i=0,1,\ldots \tag{18}$$

де

$$\widehat{M_1}=N_2|C_{n-p}|,\ \widehat{M_2}=(|A|+1)\widehat{M_1}.$$

Справді, нехай $i=0$. Тоді в силу умови 3) теореми 1 маємо

$$|y_0(t)|=|\mathrm{diag}(0,e^{A_2t}C_{n-p})|\le N_2e^{\alpha_2 t}|C_{n-p}|\le \widehat{M_1}e^{\alpha_2 t},$$

$$|\dot{y}_0(t)|=|\mathrm{diag}(0,A_2e^{A_2t}C_{n-p})|\le |A_2|\widehat{M_1}e^{\alpha_2 t}\le \widehat{M_2}e^{\alpha_2 t}.$$

Звідси випливає:

$$|y_0(t)|\le \widehat{M_1}e^{\alpha_* t},\ |\dot{y}_0(t)|\le \widehat{M_2}e^{\alpha_* t},\ \text{при } t\le 0,$$

де α_* — деяка додатна стала така, що $0<\alpha_2-\alpha_*<1$.

Припустимо, що співвідношення (18) доведені уже для деяких
$m=0,1,\ldots,i-1$ і покажемо, що вони не зміняться при переході від $i-1$ до i. Дійсно, на підставі (17) і умов теореми одержуємо

$$|y_i(t)|=|\int_{-\infty}^{0}G(t-\tau)\sigma_{i-1}(\tau)d\tau|\le$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} |G(t-\tau)| L\Big(|y_{i-1}(\tau)| + |y_{i-1}(\tau-1)| + |\dot{y}_{i-1}(\tau-1)|\Big) d\tau \le$$

$$\le L(3+|A|)\widehat{M}_1 \Delta_-^{i-1}\Big(\int_{-\infty}^{t} N_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} e^{\alpha_* \tau} d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{0} N_2 e^{-\alpha_2(\tau-t)} e^{\alpha_* \tau} d\tau\Big) \le$$

$$\le L(3+|A|)\widehat{M}_1 \Delta_-^{i-1}\Big(\frac{N_1}{\alpha_1+\alpha_*} + \frac{N_2}{\alpha_2-\alpha_*}\Big) e^{\alpha_* t} \le \widehat{M}_1 \Delta_-^{i} e^{\alpha_* t},$$

$$|\dot{y}_i(t)| = |Ay_i(t) + \sigma_{i-1}(t)| \le$$
$$\le |A||y_i(t)| + L\Big(|y_{i-1}(t)| + |y_{i-1}(t-1)| + |\dot{y}_{i-1}(t-1)|\Big) \le$$
$$\le |A|\widehat{M}_1 \Delta_-^{i} e^{\alpha_* t} + L(3+|A|)\widehat{M}_1 \Delta_-^{i-1} e^{\alpha_* t} \le$$

$$\le |A|\widehat{M}_1 \Delta_-^{i} e^{\alpha_* t} + L(3+|A|)\Big(\frac{N_1}{\alpha_1+\alpha_*} + \frac{N_2}{\alpha_2-\alpha_*}\Big)\widehat{M}_1 \Delta_-^{i-1} e^{\alpha_* t} \le$$
$$\le \widehat{M}_2 \Delta_-^{i} e^{\alpha_* t}.$$

Цим самим справедливість нерівностей (18) доведена для довільних $i = 0, 1, \dots,$ звідки безпосередньо випливає, що

$$\lim_{t\to-\infty} y_i(t) = 0.$$

Тоді в силу умови $4'$) ряди

$$y_-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

$$\dot{y}_-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{y}_i(t), \tag{19}$$

члени яких визначаються формулами (17), рівномірно збігаються при $t \le 0$ і виконується співвідношення

$$\lim_{t\to-\infty} y_-(t) = 0.$$

Для доведення теореми залишається показати, що ряд

$$\Phi(t, y_0(t), y_0(t-1), \dot{y}_0(t-1)) + \sum_{i=2}^{\infty}\Big[\Phi(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-1} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-1} \dot{y}_j(t-1)) - \Phi(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t), \sum_{j=0}^{i-2} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{i-2} \dot{y}_j(t-1))\Big], \tag{20}$$

де $y_i(t)$ визначаються формулами (17), рівномірно збігається при $t \le 0$ і його сума дорівнює $\Phi(t, y_-(t), y_-(t-1), \dot{y}_-(t-1))$.

Оскільки при всіх $m \ge 0$ мають місце співвідношення

$$\Phi(t, y_0(t), y_0(t-1), \dot{y}_0(t-1)) + \sum_{i=2}^{m+1} \sigma_{i-1}(t) = \Phi(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(t), \sum_{j=0}^{m} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{m} \dot{y}_j(t-1)),$$

то в силу умови 1) теореми 1 знаходимо

$$\Big|\Phi(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(t), \sum_{j=0}^{m} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{m} \dot{y}_j(t-1)) - \Phi(t, y_-(t), y_-(t-1), \dot{y}_-(t-1))\Big| \le$$
$$\le L\Big(|\sum_{j=0}^{m} y_j(t) - y_-(t)| + |\sum_{j=0}^{m} y_j(t-1) - y_-(t-1)| + |\sum_{j=0}^{m} \dot{y}_j(t-1) - \dot{y}_-(t-1)|\Big).$$

Далі, оскільки ряди (15) і (19) є рівномірно збіжними при $t \le 0$, то для кожного додатного числа $\frac{\varepsilon}{3L}$ знайдеться таке натуральне число m_0, що при всіх $m \ge m_0$, $t \le 0$ виконуються нерівності

$$\Big|\sum_{j=0}^{m} y_j(t) - y_-(t)\Big| < \frac{\varepsilon}{3L}, \ \Big|\sum_{j=0}^{m} \dot{y}_j(t-1) - \dot{y}_-(t-1)\Big| < \frac{\varepsilon}{3L}.$$

Приймаючи до уваги останні співвідношення, отримуємо, що для довільних $\varepsilon > 0$, $t \le 0$, і всіх $m \ge m_0$ має місце нерівність

$$\Big|\Phi(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(t), \sum_{j=0}^{m} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{m} \dot{y}_j(t-1)) - \Phi(t, y_-(t), y_-(t-1), \dot{y}_-(t-1))\Big| < \varepsilon,$$

звідки випливає рівність

$$\lim_{m\to\infty} \Phi(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(t), \sum_{j=0}^{m} y_j(t-1), \sum_{j=0}^{m} \dot{y}_j(t-1)) = \Phi(t, y_-(t), y_-(t-1), \dot{y}_-(t-1)).$$

Цим самим теорема 2 повністю доведена.

Приймаючи до уваги заміну змінних (13) і доведені вище теореми, отримуємо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теорем 1 і 2. Тоді існує $(n-p)$-параметричне сімейство розв'язків $x_-(t)$ системи (1) у вигляді ряду*

$$x_-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \gamma(t),$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, визначаються формулами (17), таких, що має місце співвідношення

$$\lim_{t\to-\infty} (x_-(t) - \gamma(t)) = 0.$$

Розглянемо тепер систему (14) при $t \ge 0$. Має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1) – 3) теореми 1 і умова*

$$4') \ \Delta_+ = \max\Big\{1 + (|A|+1)\frac{N_2}{\alpha_2+\alpha^*}; \\ \frac{N_1}{\alpha_1-\alpha^*} + \frac{N_2}{\alpha_2+\alpha^*}\Big\}(3+|A|)e^{\alpha^*}L < 1,$$

де α^* *— деяка додатна стала така, що* $0 < \alpha_1 - \alpha^* < 1$.

Тоді існує p-параметричне сімейство розв'язків $x_+(t)$ *системи (1) у вигляді ряду*

$$x_+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \gamma(t),$$

($y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ *— деякі неперервно диференційовні вектор-функції), для яких виконується умова*

$$\lim_{t\to+\infty}(x_+(t) - \gamma(t)) = 0.$$

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 3.

Зауваження 1. Використовуючи відому теорему Флоке, одержані результати можна узагальнити на випадок системи рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t-1)),$$

де елементи матриці $A(t)$ є неперервними N-періодичними (N — ціле додатне число) функціями, $f(t,x,y,z) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервною за всіма змінними і N-періодичною по t.

Література

[1] *Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский, А.С. Потапов, А.Е. Родкина, Б.Н. Садовский.* Теория уравнений нейтрального типа. // Мат. анализ (Итоги науки и техники), — 1981. — Т.19. — С.55-126.

[2] *В.Г. Курбатов.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. //Воронеж. : Издательство Воронежского университета, — 1990. — 167 с.

[3] *Дж. Хейл.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. // – М. : Мир, 1984. — 421 с.

[4] *Г.П. Пелюх, О.П. Олійниченко.* Асимптотичні властивості глобальних розв'язків системи диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з нелінійними відхиленнями аргументу. // Нелінійні коливання, — 2002. — 5, №4 — С. 489 – 503.

[5] *Ю. А. Митропольський, А. М. Самойленко, Д. И. Мартынюк.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. // КИЕВ. : НАУКОВА ДУМКА. — 1984. — 212 с.

[6] *Г.П. Пелюх, Н.І.Блащак.* Про існування і єдиність періодичних розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргумента. // Доп. НАН України, — 1997. — №8 — С. 10 – 13.

[7] *А.М.Самойленко, Г.П. Пелюх.* О периодических решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа. // Доп. НАН України, — 1994. — №3 — С. 19 – 21.