Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 390-399

Я. І. Грушка

Інститут математики НАН України, м. Київ
E-mail: `grushka@imath.kiev.ua`

Узагальнення теореми про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора

Let $\{T(t) : t \geq 0\}$ be a C_0-semigroup of bounded linear operators in a complex Banach Space $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ and A be it's generator. The well known **uniform convergence theorem** states that the generator A is bounded for the semigroups $\{T(t)\}$, satisfying $\overline{\lim\limits_{t\to+0}} \|T(t) - \mathbb{I}\| < 1$, where $\mathbb{I}$ is the identity operator in $\mathfrak{X}$.
In this article we prove that for a wide enough class of semigroups $\{T(t)\}$ in $\mathfrak{X}$ the following generalization of this theorem is true.
If there exists a non-negative and measurable Lebesgue on $[0, \infty)$ *function* $\beta(t)$ *satisfying the conditions:*

$$\frac{\beta(t)}{t} \to 0,\ t \to +0; \quad \overline{\lim_{t\to+0}} \|T(t) - T(\beta(t))\| < 1$$

then the generator A is bounded.

Ключові слова: *півгрупа операторів, одиничний оператор, рівномірна збіжність*

1. Нехай $\{T(t) : t \geq 0\}$ — півгрупа класу C_0 в банаховому просторі $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ з генератором A. Добре відома теорема про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора стверджує, що якщо для півгрупи $\{T(t)\}$ виконується умова

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \|T(t) - \mathbb{I}\| < 1,$$

де $\mathbb{I}$ — одиничний (тотожний) оператор в просторі $\mathfrak{X}$, то генератор A є лінійним обмеженим оператором в просторі $\mathfrak{X}$ [1].

Певне узагальнення теореми про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора було отримано в роботі [2]. У цій роботі було доведено таке твердження.

Якщо для півгрупи $\{T(t) : t \geq 0\}$ *класу* C_0 *з нормальним генератором* A *в гільбертовому просторі* $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|)$ *існує функція* $\beta : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$*, що задовольняє умову*

$$\beta(t) \geq 0,\ t > 0; \quad \frac{\beta(t)}{t} \to 0,\ t \to +0, \tag{1}$$

і для якої

$$\varlimsup_{t \to +0} \|T(t) - T(\beta(t))\| < 1,$$

то генератор A *— обмежений.*

Мета цієї роботи — показати, що наведене вище твердження справедливе для більш широкого класу півгруп, а саме, для довільних півгруп $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$, класу C_0 в банаховому просторі $\mathfrak{X}$, у яких множина цілих векторів експоненціального типу генератора A є щільною в $\mathfrak{X}$.

2. Нехай B — довільний (взагалі кажучи, необмежений) лінійний оператор в банаховому просторі $\mathfrak{X}$. Через $\mathcal{D}(B)$ будемо позначати область визначення оператора B.

Для довільної півгрупи $\{T(t) : t \geq 0\}$ класу C_0 з генератором A в просторі $\mathfrak{X}$ покладемо:

$$M(t) := M_T(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} \|T(s)\|, \quad t \geq 0.$$

Очевидно, що функція $M(t)$ не спадає на $[0, \infty)$. Якщо $f \in \mathcal{D}(A)$, то при $t \geq 0$ маємо:

$$\|T(t)f - f\| = \left\| \int_0^t T(\xi) Af \, d\xi \right\| \leq M(t)\, \|Af\|\, t. \tag{2}$$

Нехай функція $\beta : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ — обмежена, вимірна за Лебегом на $[0, \infty)$ і задовольняє умову (1), а також істотно відмінна від нуля в околі нуля, тобто

$$\forall h>0 \quad \mathbf{m}\left(\{\tau\in(0,h)\mid\beta(\tau)>0\}\right)>0, \tag{3}$$

де $\mathbf{m}$ — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Покладемо:

$$\widetilde{\beta}(t):=\frac{1}{t}\int_0^t\beta(\xi)d\xi,\ t\in(0,\infty);\quad \widetilde{\beta}(0):=0. \tag{4}$$

Очевидно, що функція $\widetilde{\beta}$ має такі властивості:

(1) $\widetilde{\beta}$ *неперервна на* $[0,\infty)$.

(2) $\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t}\to 0,\ t\to+0$.

(3) $\widetilde{\beta}(t)>0,\ t>0$.

3. Для доведення основного результату цієї роботи нам знадобиться така лема.

Лема 1. *Нехай:*

1. $T(t)=e^{tA}$, $t\geq 0$, *де* $A\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *(тут* $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *— простір лінійних неперервних операторів над простором* $\mathfrak{X}$*).*

2. *Функція* $\beta:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ *— обмежена, вимірна за Лебегом на* $[0,\infty)$ *і задовольняє умови* (1) *та* (3).

Тоді якщо для деяких чисел $\delta>0$ *і* $q\in(0,1)$ *виконується умова* $\|T(t)-T(\beta(t))\|\leq q$, $t\in(0,\delta)$, *то*

$$\|A\|\leq\frac{(1-q)-\sqrt{(1-q)^2-4M(\delta)(M(\delta)+1)\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t}}}{2M(\delta)\widetilde{\beta}(t)},$$

де $t\in(0,\delta_1)$ *і* δ_1 *— довільне дійсне число, яке відповідає вимогам* $\delta_1\in(0,\delta)$ *і*

$$4M(\delta)(M(\delta)+1)\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t}<(1-q)^2$$

при $t\in(0,\delta_1)$, *а* $\widetilde{\beta}$ *— функція, визначена в* (4). *(Оскільки* $\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t}\to 0$ *при* $t\to+0$, *то таке число* δ_1 *завжди існує.)*

Доведення. Оскільки генератор A півгрупи $\{T(t)\}$ — обмежений, то, використовуючи властивості півгруп і нерівність (2) для довільного вектора $f \in \mathfrak{X}$ і функціоналу $g \in \mathfrak{X}^*$ при $t \in (0, \delta)$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \frac{T(t)f - f}{t}, g \right\rangle\right| &\geq \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g\rangle \, d\xi\right| - \\
&- \left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g\rangle \, d\xi - \left\langle \frac{T(t)f - f}{t}, g \right\rangle\right| = \\
&= \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g\rangle \, d\xi\right| - \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t \langle (T(\beta(\xi)) - T(\xi))Af, g\rangle \, d\xi\right| \geq \\
&\geq \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g\rangle \, d\xi\right| - \frac{1}{t}\int\limits_0^t \|T(\beta(\xi)) - T(\xi)\| \, \|Af\| \, \|g\| \, d\xi \geq \\
&\geq \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t \langle T(\beta(\xi))Af, g\rangle \, d\xi\right| - q\, \|Af\| \, \|g\| \geq \\
&\geq |\langle Af, g\rangle| - q\, \|Af\| \, \|g\| - \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t \langle Af - T(\beta(\xi))Af, g\rangle \, d\xi\right| \geq \\
&\geq |\langle Af, g\rangle| - q\, \|Af\| \, \|g\| - \frac{1}{t}\int\limits_0^t M(t) \left\|A^2 f\right\| \|g\| \, \beta(\xi) \, d\xi = \\
&= |\langle Af, g\rangle| - q\, \|Af\| \, \|g\| - M(t) \left\|A^2 f\right\| \|g\| \, \widetilde{\beta}(t).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
|\langle Af, g\rangle| &\leq \left|\left\langle \frac{T(t)f - f}{t}, g \right\rangle\right| + \\
&+ M(t) \left\|A^2 f\right\| \|g\| \, \widetilde{\beta}(t) + q\, \|Af\| \, \|g\| \leq \\
&\leq \frac{(M(\delta) + 1)}{t} \|f\| \, \|g\| + M(\delta) \, \|A\|^2 \, \|f\| \, \|g\| \, \widetilde{\beta}(t) + q\, \|A\| \, \|f\| \, \|g\|,
\end{aligned}$$

де $t \in (0,\delta)$, $f \in \mathfrak{X}$, $g \in \mathfrak{X}^*$. Звідси, враховуючи довільність елементів $f \in \mathfrak{X}$ та $g \in \mathfrak{X}^*$, отримуємо:

$$\|A\| \le \frac{(M(\delta)+1)}{t} + M(\delta)\,\|A\|^2\,\widetilde{\beta}(t) + q\,\|A\|\,, \quad t \in (0,\delta),$$

тобто:

$$M(\delta)\widetilde{\beta}(t)\,\|A\|^2 - (1-q)\,\|A\| + \frac{(M(\delta)+1)}{t} \ge 0, \quad t \in (0,\delta). \tag{5}$$

Вираз у правій частині (5) є квадратним тричленом відносно $\|A\|$, його дискримінант:

$$D(t) = (1-q)^2 - 4M(\delta)(M(\delta)+1)\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t},$$

за умовою леми, є додатним при $t \in (0,\delta_1)$. Тому з нерівності (5) випливає, що при $t \in (0,\delta_1)$ має місце хоча б одна з нерівностей:

$$\|A\| \le \alpha_1(t) :=$$
$$:= \frac{(1-q) - \sqrt{(1-q)^2 - 4M(\delta)(M(\delta)+1)\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t}}}{2M(\delta)\widetilde{\beta}(t)}\,, \tag{6}$$

$$\|A\| \ge \alpha_2(t) :=$$
$$:= \frac{(1-q) + \sqrt{(1-q)^2 - 4M(\delta)(M(\delta)+1)\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t}}}{2M(\delta)\widetilde{\beta}(t)}\,. \tag{7}$$

Доведемо, що нерівність (7) не може виконуватись при жодному $t \in (0,\delta_1)$.

З властивостей **1** та **3** функції $\widetilde{\beta}$ випливає, що функції $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ неперервні і додатні на $(0,\delta_1)$. Крім того, з додатності дискримінанта $D(t)$ випливає, що

$$\alpha_1(t) < \alpha_2(t), \quad t \in (0,\delta_1). \tag{8}$$

Неважко переконатись, що $\alpha_1(t) \to \infty$, $t \to +0$. Отже, існує число $\eta \in (0,\delta_1)$ таке, що $\|A\| \le \alpha_1(t)$, $t \in (0,\eta)$. Покладемо:

$$\eta_0 := \sup\left\{\eta \in (0,\delta_1)\ :\ \|A\| \le \alpha_1(t),\ t \in (0,\eta)\right\}. \tag{9}$$

Тоді, внаслідок неперервності $\alpha_1(\cdot)$,

$$\|A\| \le \alpha_1(\eta_0). \tag{10}$$

Доведемо, що $\eta_0 = \delta_1$. Припустимо противне, тобто $\eta_0 < \delta_1$. Тоді для довільного $h \in (\eta_0, \delta_1)$ внаслідок (9) та умов (6)-(7) існує число $t_h \in (\eta_0, h)$ таке, що $\|A\| \ge a_2(t_h)$. Отже, в силу неперервності $\alpha_2(\cdot)$, $\|A\| \ge a_2(\eta_0)$. Але остання нерівність суперечить нерівностям (10) і (8). Отже, припущення невірне. Тому нерівність (6) має місце при всіх $t \in (0, \delta_1)$. □

4. Нехай A — замкнений лінійний оператор зі щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$ в просторі $\mathfrak{X}$. Позначимо через $C^\infty(A)$ множину всіх нескінченно диференційовних векторів оператора A:

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n), \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для числа $\alpha > 0$ покладемо:

$$\mathfrak{E}^\alpha(A) = \left\{ x \in C^\infty(A) \,|\, \exists c = c(x) > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \left\| A^k x \right\| \le c\alpha^k \right\}.$$

Множина $\mathfrak{E}^\alpha(A)$ є банаховим простором щодо норми

$$\|x\|_{\mathfrak{E}^\alpha(A)} = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n}.$$

Тоді $\mathfrak{E}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{E}^\alpha(A)$ — лінійний локально-опуклий простір відносно топології індуктивної границі банахових просторів

$$\mathfrak{E}(A) = \liminf_{\alpha \to \infty} \mathfrak{E}^\alpha(A).$$

Елементи простору $\mathfrak{E}(A)$ називаються цілими векторами експоненціального типу оператора A.

Теорема 1. *Нехай*

1. $\{T(t) : t \ge 0\}$ *— півгрупа класу C_0 в банаховому просторі $\mathfrak{X}$ з генератором A.*

2. *Множина* $\mathfrak{E}(A)$ *цілих векторів експоненціального типу оператора* A *всюди щільна в* $\mathfrak{X}$.

Тоді якщо існує вимірна за Лебегом на $[0,\infty)$ *функція* β*, що задовольняє умову* (1)*, для якої*

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\|T(t)-T(\beta(t))\|<1, \tag{11}$$

то генератор A *— обмежений.*

Зауваження 1. *Загальновідомо, що коли* $\{T(t)\,:\,t\geq 0\}$ *—* C_0*-півгрупа з нормальним генератором* A *в гільбертовому просторі* $(\mathfrak{H},\|\cdot\|)$*, то множина* $\mathfrak{E}(A)$ *всюди цільна в* $\mathfrak{H}$*. Отже, наведений у вступній частині статті основний результат роботи* [2] *є частинним випадком теореми 1.*

Доведення теореми 1. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що функція $\beta(\cdot)$ обмежена на $[0,\infty)$. Справді, з умови $\frac{\beta(t)}{t}\to 0$, $t\to+0$, випливає, що функція β обмежена в деякому околі нуля. Тому ми завжди можемо замінити функцію β на функцію β_1, яка є обмежена на $[0,\infty)$ і дорівнює β в околі нуля.

Також, не обмежуючи загальності, можна вважати, що функція β істотно відмінна від нуля в околі нуля, тобто задовольняє умову (3). Справді, якщо функція β не задовольняє (3), то вона дорівнює нулю майже скрізь, за мірою Лебега, у деякому околі нуля. Тому, використовуючи умову (11) і враховуючи сильну неперервність півгрупи $\{T(t)\}$, неважко довести, що $\overline{\lim\limits_{t\to+0}}\|T(t)-\mathbb{I}\|<1$. І отже, ми приходимо до відомого випадку, для якого теорема 1 вже доведена.

З умови (11) випливає існування таких чисел $\delta>0$ і $q\in(0,1)$, що

$$\|T(t)-T(\beta(t))\|\leq q,\quad t\in(0,\delta). \tag{12}$$

Нехай $\alpha>0$. Покладемо:

$$T_\alpha(t):=T(t)\restriction\mathfrak{E}^\alpha(A),\quad t\geq 0,$$

де $T(t) \upharpoonright \mathfrak{E}^{\alpha}(A)$ — звуження півгрупи $T(t)$ на простір $\mathfrak{E}^{\alpha}(A)$. Неважко переконатись, що $\{T_{\alpha}(t) : t \geq 0\}$ — півгрупа класу C_0 в (банаховому) просторі $(\mathfrak{E}^{\alpha}(A), \|\cdot\|_{\mathfrak{E}^{\alpha}(A)})$, причому генератором півгрупи $\{T_{\alpha}(t)\}$ є оператор $A_{\alpha} = A \upharpoonright \mathfrak{E}^{\alpha}(A)$, тобто оператор $A_{\alpha}x = Ax \in \mathfrak{E}^{\alpha}(A)$, $x \in \mathfrak{E}^{\alpha}(A)$. Згідно з [3, теорема 1], A_{α} є лінійним неперервним оператором на просторі $(\mathfrak{E}^{\alpha}(A), \|\cdot\|_{\mathfrak{E}^{\alpha}(A)})$. Крім того, при $x \in \mathfrak{E}^{\alpha}(A)$, $t \geq 0$ і $n \in \mathbb{N}_0$ маємо:

$$\|A^n T(t)x\| = \|T(t)A^n x\| \leq \|T(t)\| \, \|A^n x\| \leq \|T(t)\| \, \|x\|_{\mathfrak{E}^{\alpha}(A)} \, \alpha^n.$$

Отже, для $x \in \mathfrak{E}^{\alpha}(A)$ $\|T(t)x\|_{\mathfrak{E}^{\alpha}(A)} \leq \|T(t)\| \, \|x\|_{\mathfrak{E}^{\alpha}(A)}$, $t \geq 0$. Тобто $\|T_{\alpha}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{E}^{\alpha}(A))} \leq \|T(t)\|$, $t \geq 0$, а тому:

$$M_{T_{\alpha}}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \|T_{\alpha}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{E}^{\alpha}(A))} \leq M_T(t) = M(t), \quad t \geq 0. \tag{13}$$

При $x \in \mathfrak{E}^{\alpha}(A)$, $t \in (0, \delta)$ і $n \in \mathbb{N}_0$ використовуючи нерівність (12) отримуємо:

$$\begin{gathered} \|A^n(T(t) - T(\beta(t)))x\| = \|(T(t) - T(\beta(t)))A^n x\| \leq \\ \leq \|T(t) - T(\beta(t))\| \, \|A^n x\| \leq q \, \|x\|_{\mathfrak{E}^{\alpha}(A)} \, \alpha^n, \end{gathered}$$

тобто,

$$\|T_{\alpha}(t) - T_{\alpha}(\beta(t))\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{E}^{\alpha}(A))} \leq q, \quad t \in (0, \delta).$$

Нехай число $\delta_1 > 0$ задовольняє умову

$$4M(\delta)(M(\delta) + 1)\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t} < (1 - q)^2, \qquad t \in (0, \delta_1).$$

Тоді, згідно з (13),

$$4M_{T_{\alpha}}(\delta)(M_{T_{\alpha}}(\delta) + 1)\frac{\widetilde{\beta}(t)}{t} < (1 - q)^2, \qquad t \in (0, \delta_1).$$

Звідси, використовуючи лему 1 і нерівність (13), при довільному фіксованому $\tau \in (0, \delta_1)$ отримуємо:

$$
\begin{aligned}
(14)\quad & \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{E}^\alpha(A))} \le \\
& \le \frac{2(M_{T_\alpha}(\delta)+1)}{\tau\left((1-q)+\sqrt{(1-q)^2-4M_{T_\alpha}(\delta)(M_{T_\alpha}(\delta)+1)\frac{\widetilde{\beta}(\tau)}{\tau}}\right)} \le \\
& \le \frac{2(M(\delta)+1)}{\tau\left((1-q)+\sqrt{(1-q)^2-4M(\delta)(M(\delta)+1)\frac{\widetilde{\beta}(\tau)}{\tau}}\right)} =: \\
& =: Q_\tau,
\end{aligned}
$$

де $\alpha > 0$, а константа Q_τ не залежить від числа α.

Розглянемо довільний вектор $x \in \mathfrak{X}$. Оскільки множина $\mathfrak{E}(A)$ — щільна в $\mathfrak{X}$, то, згідно з [3, теорема 4], вектор x можна подати у вигляді:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{де} \quad x_k \in \mathfrak{E}^k(A),\ k \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{\mathfrak{E}^k(A)} < \infty.$$

Проте, згідно із (14),

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|_{\mathfrak{E}^k(A)} = \\
& \qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x_k\|_{\mathfrak{E}^k(A)} \le Q_\tau \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{\mathfrak{E}^k(A)} < \infty.
\end{aligned}
$$

А тому, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} Ax_k$ — збіжний. Звідси отримуємо, враховуючи замкнутість оператора A, що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Отже, довільний вектор $x \in \mathfrak{X}$ належить до області визначення $\mathcal{D}(A)$. Це і означає, що $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$. □

Література

[1] Голдстейн Дж. Полугрупы линейных операторов и их приложения. – Киев: "Выща школа", 1989. – 347 с.

[2] Grushka Ya.I. On the Uniform Convergence Theorem of Semigroups // Proceedings of the Mark Krein International Conference on Operator Theory and Applications, volume II. – Operator Theory Advances and Applications, vol. 118. – Bassel; Boston; Berlin: Birkhauser Verlag, 2000. – P. 177-179.

[3] Радыно Я.В. Векторы экспоненциального типа и их приложения // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 1987. – **Т. CLXXX**. – С. 184–185.