Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 359-372

517.929

А. В. Вельгач

Інститут математики НАН України, Київ

Періодичні розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу і їх властивості

Одержано достатні умови існування Т-періодичного неперервно диференційовного при $t \in R$ розв'язку системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь з нелінійним відхиленням аргументу та досліджено його властивості.

Розглянемо систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$x'(t)=Ax(t)+\sum_{i=0}^{m}A_i(t)x(k_it+f_i(t))+\sum_{i=0}^{m}B_i(t)x'(l_it+g_i(t))+F(t), \tag{1}$$

де $t \in (-\infty;+\infty)$, A — стала $(n \times n)$-матриця, $A_i(t)$, $B_i(t)$, $i = 0,...,m$, — деякі неперервні Т-періодичні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ — неперервна Т-періодична вектор-функція, $f_i(t)$, $g_i(t)$, $i=0,...,m$, — деякі невід'ємні неперервні Т-періодичні функції, k_i, l_i, $i=0,...,m$, — деякі цілі додатні числа. Умови існування періодичних розв'язків окремих класів таких систем рівнянь встановлено в [1–5]. Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі пропонується певний спосіб побудови Т-періодичних розв'язків системи рівнянь (1) і вивчаються їх властивості. При цьому відносно системи рівнянь (1) припускаються виконаними такі умови:

1) $|e^{At}| \leq Ne^{-\alpha t}$ при $t \in R^+$, де N, α — деякі додатні числа;
2) матриці $A_i(t)$, $B_i(t)$, $i = 0, ..., m$, такі, що при всіх $t \in R$ виконується співвідношення
$$\sum_{i=0}^{m} \big(|A_i(t)| + |B_i(t)|\big) \leq \delta,$$
де δ — деяке достатньо мале додатнє число;
3) $|F(t)| \leq F^*$ при $t \in R$;
4) $\Delta = K\delta < 1$, де $K = \max\{\frac{N}{\alpha}, |A|\frac{N}{\alpha} + 1\}$.

Розв'язки системи (1) шукатимемо у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t), \tag{2}$$

де $x_j(t)$, $j = 0, 1, ...,$ — деякі неперервно диференційовні T-періодичні вектор-функції.

Підставивши (2) в (1) отримаємо

$$\sum_{j=0}^{\infty} x'_j(t) = A\sum_{j=0}^{\infty} x_j(t) + \sum_{i=0}^{m} A_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} x_j(k_i t + f_i(t)) + \\ + \sum_{i=0}^{m} B_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} x'_j(l_i t + g_i(t)) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_j(t)$, $j = 0, 1, ...,$ задовольняють послідовності систем рівнянь

$$x'_0(t) = Ax_0(t) + F(t), \tag{3_0}$$

$$\begin{aligned} x'_j(t) \quad = \quad & Ax_j(t) + \sum_{i=0}^{m} A_i(t) x_{j-1}(k_i t + f_i(t)) + \\ & + \sum_{i=0}^{m} B_i(t) x'_{j-1}(l_i t + g_i(t)), \quad j = 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{3_j}$$

то ряд (2) буде формальним розв'язком системи (1).

Безпосередньою підстановкою в (3_0) можна переконатися, що вектор-функція

$$x_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau \tag{4_0}$$

є неперервно диференційовним розв'язком системи (3_0). Покажемо, що має місце співвідношення

$$x_0(t+T) = x_0(t). \tag{5_0}$$

Дійсно,

$$x_0(t+T) = \int\limits_{-\infty}^{t+T} e^{A(t+T-\tau)} F(\tau) d\tau = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} F(\tau+T) d\tau = \\ = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau = x_0(t).$$

Враховуючи умови 1) і 3), знаходимо

$$|x_0(t)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau \right| \leq \int\limits_{-\infty}^{t} |e^{A(t-\tau)}||F(\tau)| d\tau \leq \\ \leq F^* N \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = F^* N e^{-\alpha t} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} = F^* \frac{N}{\alpha} \leq M,$$

$$(6_0)\quad |x_0'(t)| = \left| A \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau + F(t) \right| \leq$$
$$\leq |A| \left| \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau \right| + |F(t)| \leq$$
$$\leq F^* \left(|A| \frac{N}{\alpha} + 1 \right) \leq M,$$

де $M = F^* K$.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3_j), $j \in \mathbb{N}$, можна показати, що вектор-функції

$$(4_j)\quad \begin{aligned} x_j(t) \;=\; & \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} \Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau) x_{j-1}(k_i\tau + f_i(\tau)) + \\ & + \sum_{i=0}^{m} B_i(\tau) x_{j-1}'(l_i\tau + g_i(\tau)) \Big) d\tau, \quad j = 1, 2, ..., \end{aligned}$$

є їх розв'язками. Покажемо, що виконуються співвідношення

$$(5_j)\quad x_j(t+T) = x_j(t), \quad j = 1, 2, ...,$$

і мають місце оцінки

$$(6_j)\quad \begin{aligned} &|x_j(t)| \leq M\Delta^j, \\ &|x_j'(t)| \leq M\Delta^j, \quad j = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Дійсно, при $j = 1$, враховуючи (5_0), (6_0) і умови 1)–4) маємо

$$x_1(t+T) = \int\limits_{-\infty}^{t+T} e^{A(t+T-\tau)} \Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau) x_0(k_i\tau + f_i(\tau)) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m} B_i(\tau) x_0'(l_i\tau + g_i(\tau)) \Big) d\tau =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} \Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau+T) x_0(k_i(\tau+T) + f_i(\tau+T)) +$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(\tau+T)x_0'(l_i(\tau+T)+g_i(\tau+T))\Big)d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau)x_0(k_i\tau+f_i(\tau))+$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(\tau)x_0'(l_i\tau+g_i(\tau))\Big)d\tau = x_1(t),$$

$$\begin{aligned}
|x_1(t)| &= \Big|\int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau)x_0(k_i\tau+f_i(\tau)) + \\
&\qquad +\sum_{i=0}^{m} B_i(\tau)x_0'(l_i\tau+g_i(\tau))\Big)d\tau\Big| \le \\
&\le \int\limits_{-\infty}^{t} \big|e^{A(t-\tau)}\big|\Big(\sum_{i=0}^{m}\big|A_i(\tau)\big|\big|x_0(k_i\tau+f_i(\tau))\big| + \\
&\qquad +\sum_{i=0}^{m}\big|B_i(\tau)\big|\big|x_0'(l_i\tau+g_i(\tau))\big|\Big)d\tau \le \\
&\le MN\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^{m}\big|A_i(\tau)\big| + \sum_{i=0}^{m}\big|B_i(\tau)\big|\Big)d\tau \le \\
&\le MN\delta\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau = M\frac{N}{\alpha}\delta = M\Delta,
\end{aligned}$$

$$|x_1'(t)| = \Big|Ax_1(t) + \sum_{i=0}^{m} A_i(t)x_0(k_it+f_i(t)) +$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(t)x_0'(l_it+g_i(t))\Big| \leq$$

$$\leq \quad |A||x_1(t)| + \sum_{i=0}^{m} |A_i(t)||x_0(k_it+f_i(t))| +$$

$$+\sum_{i=0}^{m} |B_i(t)||x_0'(l_it+g_i(t))| \leq$$

$$\leq \quad |A|M\frac{N}{\alpha}\delta + M\delta = M(|A|\frac{N}{\alpha}+1)\delta \leq M\Delta.$$

Міркуючи по індукції, припустимо, що система (3_j), $j \geq 1$, має неперервно диференційовний Т-періодичний розв'язок $x_j(t)$, який визначається формулою (4_j), що задовольняє умови (6_j), і покажемо, що розв'язок $x_{j+1}(t)$ системи (3_{j+1}):

$$x_{j+1}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau)x_j(k_i\tau+f_i(\tau))+$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(\tau)x_j'(l_i\tau+g_i(\tau))\Big)d\tau$$

також є Т-періодичною вектор-функцією, що задовольняє умови (6_{j+1}). Дійсно, враховуючи (5_j), отримуємо

$$x_{j+1}(t+T) = \int\limits_{-\infty}^{t+T} e^{A(t+T-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau)x_j(k_i\tau+f_i(\tau))+$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(\tau)x_j'(l_i\tau+g_i(\tau))\Big)d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau+T)x_j(k_i(\tau+T)+f_i(\tau+T))+$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(\tau+T)x_j'(l_i(\tau+T)+g_i(\tau+T))\Big)d\tau =$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau)x_j(k_i\tau+f_i(\tau))+$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(\tau)x_j'(l_i\tau+g_i(\tau))\Big)d\tau = x_{j+1}(t),$$

тобто вектор-функція $x_{j+1}(t)$ є Т-періодичною. Тепер покажемо, що вектор-функція $x_{j+1}(t)$ задовольняє умови (6_{j+1}).

Справді,

$$|x_{j+1}(t)| = \Big|\int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^{m} A_i(\tau)x_j(k_i\tau+f_i(\tau))+$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(\tau)x_j'(l_i\tau+g_i(\tau))\Big)d\tau\Big| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{t} \big|e^{A(t-\tau)}\big|\Big(\sum_{i=0}^{m}\big|A_i(\tau)\big|\big|x_j(k_i\tau+f_i(\tau))\big|+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\big|B_i(\tau)\big|\big|x_j'(l_i\tau+g_i(\tau))\big|\Big)d\tau \le$$

$$\le M\Delta^j N\delta \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau = M\Delta^j\frac{N}{\alpha}\delta = M\Delta^{j+1},$$

$$|x_{j+1}'(t)| \;=\; \big|Ax_{j+1}(t)+\sum_{i=0}^{m} A_i(t)x_j(k_it+f_i(t)) +$$

$$+\sum_{i=0}^{m} B_i(t)x_j'(l_it+g_i(t))\big| \le$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad |A||x_{j+1}(t)| + \sum_{i=0}^{m} |A_i(t)||x_j(k_i t + f_i(t))| + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=0}^{m} |B_i(t)||x'_j(l_i t + g_i(t))| \leq \\
&\leq \quad |A| M \Delta^j \frac{N}{\alpha}\delta + M\Delta^j \delta = \\
&= \quad M\Delta^j (|A|\frac{N}{\alpha} + 1)\delta \leq M\Delta^{j+1}.
\end{aligned}$$

Таким чином, ми показали, що всі члени ряду $x(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j(t)$ є неперервно диференційовними Т-періодичними вектор-функціями, що задовольняють умови (6_j). Оскільки $\Delta < 1$, то ряд $x(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j(t)$ (разом із першою похідною) рівномірно збігається при всіх $t \in R$ до неперервно диференційовної Т-періодичної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи (1) і для якої виконуються умови

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}, \qquad |x'(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Таким чином, доведена теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* 1)–4)*. Тоді система* (1) *має Т-періодичний неперервно диференційовний при* $t \in R$ *розв'язок* $\gamma(t)$.

Виконуючи в (1) взаємо-однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{7}$$

де $\gamma(t)$ — неперервно диференційовний Т-періодичний розв'язок системи (1), отримуємо систему рівнянь для $y(t)$:

$$y'(t) = Ay(t) + \sum_{i=0}^{m} A_i(t) y(k_i t + f_i(t)) + \sum_{i=0}^{m} B_i(t) y'(l_i t + g_i(t)). \tag{8}$$

Для системи рівнянь (8) має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* 1)–2) *теореми* 1 *і умова:*

4′) $\widetilde{\Delta} = \widetilde{K}\delta < 1$, *де* $\widetilde{K} = \max\{\frac{N}{\alpha-\beta}, |A|\frac{N}{\alpha-\beta} + 1\}$,
β — деяка додатна стала така, що $\beta < \alpha$.

Тоді система рівнянь (8) *має сім'ю неперервно диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків y(t)=y(t,C), де C — довільний сталий вектор розмірності n, у вигляді ряду:*

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j(t), \tag{9}$$

де $y_j(t)$, $j = 0, 1, ...,$ — деякі неперервно диференційовні при $t \in R^+$ вектор-функції, що задовольняють умову

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0, \\ &\lim_{t\to+\infty} |y'(t)| = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Доведення. Підставивши (9) в (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} y'_j(t) = A \sum_{j=0}^{\infty} y'_j(t) + \sum_{i=0}^{m} A_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} y_j(k_i t + f_i(t)) + \\ + \sum_{i=0}^{m} B_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} y'_j(l_i t + g_i(t)). \end{aligned} \tag{11}$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $y_j(t)$, $j = 0, 1, ...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y'_0(t) = Ay_0(t), \tag{12_0}$$

$$\begin{aligned} y'_j(t) \;\; = \;\; & Ay_j(t) + \sum_{i=0}^{m} A_i(t) y_{j-1}(k_i t + f_i(t)) + \\ & + \sum_{i=0}^{m} B_i(t) y'_{j-1}(l_i t + g_i(t)), \qquad j = 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{12_j}$$

то ряд (9) є формальним розв'язком системи (8).

Очевидно, що система (12_0) має сім'ю неперервно диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків $y_0(t) = e^{At}C$, де C — довільний сталий вектор розмірності n. Враховуючи умову 1) маємо:

$$|y_0(t)| = |e^{At}C| \le |e^{At}||C| \le Ne^{-\alpha t}|C| \le \widetilde{M}e^{-\beta t},$$
$$|y_0'(t)| = |Ay_0(t)| \le |A||e^{At}||C| \le |A|Ne^{-\alpha t}|C| \le \widetilde{M}e^{-\beta t},$$

де $\widetilde{M} = \max\{N|C|, |A|N|C|\}$, $\beta < \alpha$.

Послідовно можна показати, що розв'язками систем рівнянь (12_j), $j = 1, 2, ...$, при $t \in R^+$ є вектор-функції

$$y_j(t) = \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^m A_i(\tau)y_{j-1}(k_i\tau + f_i(\tau)) + \\ + \sum_{i=0}^m B_i(\tau)y_{j-1}'(l_i\tau + g_i(\tau))\Big)d\tau.$$

Покажемо, що при всіх $t \in R^+$ виконуються оцінки

$$(13_j) \qquad \begin{aligned} &|y_j(t)| \le \widetilde{M}\Delta^j e^{-\beta t}, \\ &|y_j'(t)| \le \widetilde{M}\Delta^j e^{-\beta t}, \qquad j = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Дійсно, при $j = 1$ маємо

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &= \Big|\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^m A_i(\tau)y_0(k_i\tau + f_i(\tau)) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^m B_i(\tau)y_0'(l_i\tau + g_i(\tau))\Big)d\tau\Big| \le \\ &\le \int\limits_0^t Ne^{-\alpha(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^m \big|A_i(\tau)\big|\big|y_0(k_i\tau + f_i(\tau))\big| + \\ &\quad + \sum_{i=0}^m \big|B_i(\tau)\big|\big|y_0'(l_i\tau + g_i(\tau))\big|\Big)d\tau \le \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le N\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^m \big|A_i(\tau)\big|\widetilde{M}e^{-\beta(k_i\tau+f_i(\tau))}+\\
&\qquad +\sum_{i=0}^m \big|B_i(\tau)\big|\widetilde{M}e^{-\beta(l_i\tau+g_i(\tau))}\Big)d\tau \le
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le N\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^m \big|A_i(\tau)\big|\widetilde{M}e^{-\beta k_i\tau}+\sum_{i=0}^m \big|B_i(\tau)\big|\widetilde{M}e^{-\beta l_i\tau}\Big)d\tau \le\\
&\le N\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\Big(\sum_{i=0}^m \big|A_i(\tau)\big|\widetilde{M}e^{-\beta\tau}+\sum_{i=0}^m \big|B_i(\tau)\big|\widetilde{M}e^{-\beta\tau}\Big)d\tau \le\\
&\le N\widetilde{M}e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau}\Big(\sum_{i=0}^m \big|A_i(\tau)\big|+\sum_{i=0}^m \big|B_i(\tau)\big|\Big)d\tau \le\\
&\le N\widetilde{M}\delta e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau}d\tau \le N\widetilde{M}\delta e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\le\\
&\le \widetilde{M}\frac{N}{(\alpha-\beta)}\delta\Big(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}\Big)\le \widetilde{M}\frac{N}{(\alpha-\beta)}\delta e^{-\beta t}\le \widetilde{M}\widetilde{\Delta}e^{-\beta t},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|y_1'(t)| &\le |A||y_1(t)|+\sum_{i=0}^m |A_i(t)||y_0(k_it+f_i(t))|+\\
&\qquad +\sum_{i=0}^m |B_i(t)||y_0'(l_it+g_i(t))|\le\\
&\le |A|\widetilde{M}\frac{N}{(\alpha-\beta)}\delta e^{-\beta t}+\sum_{i=0}^m |A_i(t)|\widetilde{M}e^{-\beta(k_it+f_i(t))}+\\
&\qquad +\sum_{i=0}^m |B_i(t)|\widetilde{M}e^{-\beta(l_it+g_i(t))}\le\\
&\le |A|\widetilde{M}\frac{N}{(\alpha-\beta)}\delta e^{-\beta t}+\sum_{i=0}^m |A_i(t)|\widetilde{M}e^{-\beta t}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=0}^{m}|B_i(t)|\widetilde{M}e^{-\beta t}\le \\
\le\ &\widetilde{M}\Big(|A|\frac{N}{(\alpha-\beta)}\delta+\delta\Big)e^{-\beta t}= \\
&=\widetilde{M}\Big(|A|\frac{N}{(\alpha-\beta)}+1\Big)\delta e^{-\beta t}\le\widetilde{M}\widetilde{\Delta}e^{-\beta t},
\end{aligned}
$$

тобто мають місце оцінки (13_1). Припустимо, що оцінка (13_j) доведена вже для деякого $j\ge 1$, і покажемо її справедливість при $j+1$. Дійсно, внаслідок умов 1), 2), 4′) і (13_j), отримуємо

$$
\begin{aligned}
|y_{j+1}(t)|\le\int\limits_0^t Ne^{-\alpha(t-\tau)}\Big(&\sum_{i=0}^{m}\big|A_i(\tau)\big|\big|y_j(k_i\tau+f_i(\tau))\big|+ \\
&+\sum_{i=0}^{m}\big|B_i(\tau)\big|\big|y_j'(l_i\tau+g_i(\tau))\big|\Big)d\tau\le \\
\le N\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\Big(&\sum_{i=0}^{m}\big|A_i(\tau)\big|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta(k_i\tau+f_i(\tau))}+ \\
&+\sum_{i=0}^{m}\big|B_i(\tau)\big|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta(l_i\tau+g_i(\tau))}\Big)d\tau\le \\
\le N\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\Big(&\sum_{i=0}^{m}\big|A_i(\tau)\big|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta\tau}+ \\
&+\sum_{i=0}^{m}\big|B_i(\tau)\big|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta\tau}\Big)d\tau\le \\
&\le N\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j\delta e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau}d\tau\le \\
&\le\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j\frac{N}{(\alpha-\beta)}\delta\Big(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}\Big)\le\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^{j+1}e^{-\beta t},
\end{aligned}
$$

$$|y'_{j+1}(t)| \le |A||y_{j+1}(t)| + \sum_{i=0}^{m} |A_i(t)||y_j(k_i t + f_i(t))| +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m} |B_i(t)||y'_j(l_i t + g_i(t))| \le$$
$$\le |A|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j \frac{N}{(\alpha-\beta)}\delta e^{-\beta t} + \sum_{i=0}^{m} |A_i(t)|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta(k_i t + f_i(t))} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m} |B_i(t)|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta(l_i t + g_i(t))} \le$$
$$\le |A|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j \frac{N}{(\alpha-\beta)}\delta e^{-\beta t} + \sum_{i=0}^{m} |A_i(t)|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta t} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m} |B_i(t)|\widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j e^{-\beta t} \le$$
$$\le \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^j \Big(|A|\frac{N}{(\alpha-\beta)} + 1\Big)\delta e^{-\beta t} \le \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^{j+1} e^{-\beta t},$$

Таким чином, справедливість оцінок (13_j), $j = 1, 2, ...$, повністю доведена. Звідси безпосередньо випливає, що ряд

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j(t)$$

і його перша похідна збігаються рівномірно при $t \in R^+$ до неперервно диференційовної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи (8), для якого виконуються оцінки

$$y(t) \le \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\Delta}} e^{-\beta t}, \quad y'(t) \le \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\Delta}} e^{-\beta t},$$

і отже, так побудовані розв'язки відповідають умові (10). Тим самим теорема 2 повністю доведена.

Враховуючи (7) і доведені вище теореми 1, 2 приходимо до такої теореми.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* 1)–3) *теореми* 1 *і умова* $4'$) *теореми* 2. *Тоді система рівнянь* (1) *має сім'ю неперервно диференційовних розв'язків* $x(t) = x(t, C)$, *яка визначається формулою*

$$x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $y(t)$ визначається рядом *(9)* і $\gamma(t)$ — Т-періодичний розв'язок системи рівнянь *(1)*.

Зауваження. *При деяких додаткових припущеннях теорема* 1 *має місце і у випадку, коли відхилення аргументу* $f_i(t)$, $g_i(t)$, $i = 1, ..., m$, *залежать від невідомої функції.*

Література

[1] Дж. Хейл. Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.:Мир, 1984. – 421 с.

[2] Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж. Изд-во Воронежского университета, 1990. – 167 с.

[3] Пелюх Г.П., Блащак Н.І. Про існування і єдиність періодичних розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргумента. //Доп. НАН України. – 1997. – №8. – С. 10-13.

[4] Самойленко А.М., Пелюх Г.П. О периодических решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа. //Доп. НАН України. – 1994. – №3. – С. 19-21.

[5] Пелюх Г.П., Вельгач А.В. Про структуру множини неперервно диференційовних розв'язків однієї граничної задачі для систем диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу. //Нелінійні коливання. – 2007. – №2. – С. 277-289.