Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 323-332

УДК 517.5

Г. П. Бахтина
Р. В. Подвысоцкий

Разделяющее преобразование и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях

In this work new inequalityes for inner radii of non-overeapping domains are obtained.

Раздел геометрической теории функций комплексного переменного, связанный с разработкой методов решения экстремальных задач о неналегающих областях, представляет собой известное классическое направление. С результатами, методами и историей развития этого направления можно ознакомиться в работах [1–12]. Важным элементом исследования экстремальных задач является теория квадратичных дифференциалов и один из ключевых ее результатов – "Основная структурная теорема"Дж. А. Дженкинса, описывающая глобальную структуру траекторий квадратичных дифференциалов на конечной римановой поверхности (см.[2]). В работах [6, 7] был разработан метод разделяющего преобразования, который при определенных условиях позволяет сводить задачи с большим числом неизвестных параметров к задачам с меньшим их числом. Это обстоятельство явилось ключевым для решения ряда трудных задач (см.[6, 7]).

Подавляющее большинство результатов о неналегающих областях связано, в той или иной степени, с получением точных оценок произведений внутренних радиусов этих областей см.[1–16].

В 1974 г. в работе [5] получен первый результат для функционалов "типа суммы". В [17] этот результат получил дальнейшее развитие. Исследование подобных задач наталкивается на определенные трудности, для преодоления которых необходимо найти новые методы. Целью данной работы является применение к задачам о функционалах “типа суммы” нового метода, использующее разделяющее преобразование, развитого в работах [8–12].

В последнее время возрос интерес к экстремальным задачам с так называемыми свободными полюсами соответствующих квадратичных дифференциалов (см.[3, 4–12). Новые задачи этого типа решены в данной работе.

2. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ – множества натуральных и комплексных чисел соответственно. Как обычно, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ есть расширенная комплексная плоскость или сфера Римана.

Пусть $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — произвольный набор различных точек единичной окружности, подчиненных условию

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi. \qquad (1)$$

Системой неналегающих областей (с.н.о.) называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \varnothing, \quad k \neq m, \quad k, m = \overline{1, n}$.

Введем в рассмотрение области

$$E_k = \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$$k = \overline{1, n} \quad E_{n+1} = E_1, \quad \text{arga}_{n+1} = 2\pi, \arg a_{n+2} = \arg a_2 + 2\pi$$

Обозначим $\theta_k = \frac{1}{\pi}\text{arg}\ \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $k = \overline{1, n}$. Ясно, что $\Sigma_{k=1}^n \theta_k = 2$.

Функция

$$\xi = \pi_k(w) = -i(e^{-i \arg a_k} w)^{\frac{1}{\theta_k}}, \quad k = \overline{1, n},$$

при надлежащем выборе ветви однолистно отображает область E_k на правую полуплоскость. Для удобства связную компоненту множества Q, содержащую точку b, обозначим $[Q]_b$. Будем говорить, что с.н.о. удовлетворяет дополнительному условию неналегания относительно набора точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, если $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, и при каждом $k = \overline{1,n}$ существует хотя бы одна горизонтальная прямая

$$l_k(\eta) = \{\xi : \mathcal{I}m\xi = \eta\}, \qquad \eta \in (-1,1),$$

не имеющая общих точек с множеством $\pi_k\left(\left[B_k \cap \overline{E}_k\right]_{a_k}\right)$ и с множеством $\pi_k\left(\left[B_{k+1} \cap \overline{E}_k\right]_{a_{k+1}}\right)$, где $\pi_k(D)$ – образ множества D при отображении π_k. Внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ обозначим через $r(B,a)$ (см.[6, 13]).

3. Результаты и доказательства. Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$\sum_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \qquad (2)$$

на классе всех с.н.о., удовлетворяющих дополнительному условию неналегания относительно систем точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих условию (1).

Эта задача относится к типу задач со свободными полюсами на окружности. Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, подчиненных условию (1), и любой с.н.о., удовлетворяющей дополнительному условию неналегания относительно A_n, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 4.$$

В частности, знак равенства в этом неравенстве достигается тогда, когда точки a_k и области B_k являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}dw^2 \qquad (3)$$

Доказательство. Обозначим через $\{D\}^*$ множество, симметричное множеству D относительно мнимой оси. Рассмотрим при всех $k = \overline{1,n}$ следующие области

$$G_k^{(1)} = \pi_k\left([B_k \cap \overline{E}_k]_{a_k}\right) \cup \left\{\pi_k\left([B_k \cap E_k]_{a_k}\right)\right\}^*,$$

$$G_k^{(2)} = \pi_k\left([B_{k+1} \cup \overline{E}_k]_{a_{k+1}}\right) \cup \left\{\pi_k\left(\left[B_{k+1} \cap \overline{E}_k\right]_{a_k}\right)\right\}^*.$$

Используя работы [6, 7] получаем неравенства

$$r(B_k, a_k) \leq \sqrt{\theta_{k-1}\theta_k r(G_{k_1}^{(1)}, -i) r(G_{k-1}^{(2)}, i)}.$$

Тогда для функционала (2) можем записать оценка

$$\sum_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \sum_{k=1}^{n}\left[\theta_{k-1} r(G_{k-1}^{(2)}, i) \cdot \theta_k \cdot r(G_k^{(1)}, -i)\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\theta_{k-1} r(G_{k-1}^{(2)}, i) + \theta_k r(G_k^{(1)}, -i)\right] = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\left[r(G_k^{(1)}, -i) + r(G_k^{(2)}, i)\right].$$

Теорема доказана.

Далее сформулируем лемму, принадлежащую А. К. Бахтину и являющуюся существенным обобщением результата [17].

Лемма 1. *Пусть a_1, $a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq a_2$, и $\mathcal{L}$ – множество всех прямых, имеющих одну и только одну точку пересечения с открытым отрезком (a_1, a_2).*

Тогда для произвольных областей комплексной плоскости B_1, B_2, $a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$, которые удовлетворяют условию $(B_1 \cap l) \cup (B_2 \cap l) = \varnothing$ хотя бы для одной прямой $l \in \mathcal{L}$, выполняется неравенство

$$r(B_1, a_1) + r(B_2, a_2) \leq 2|a_1 - a_2|$$

Равенство достигается для полуплоскостей, общая граница которых есть прямая $l \in \mathcal{L}$ ортогональная отрезку (a_1, a_2).

Доказательство леммы. Пусть B_1^0 есть компонента множества $\mathbb{C}\backslash l$ содержащая точку a_1, a B_2^0 — вторая компонента множества $\mathbb{C}\backslash l$, содержащая точку a_2. Ясно, что B_1^0 и B_2^0 — полуплоскости удовлетворяющие условиям леммы. Тогда $B_1 \subset B_1^0$ и $B_2 \subset B_2^0$. Тогда очевидно, что

$$r(B_1, a_1) + r(B_2, a_2) \leq r(B_1^0, a_1) + r(B_2^0, a_2) = 2|a_1 - a_2| \sin\theta,$$

где θ– угол между отрезком (a_1, a_2) и l. Отсюда следует справедливость леммы.

По построению области $G_k^{(2)}$ и $G_k^{(1)}$ не пересекаются с прямой $l_k(\eta)$, ортогональной к отрезку $(-i, i)$, и, кроме того, $i\eta \in \underline{l_k(\eta)}$. Таким образом, условия леммы выполнены при всех $k = \overline{1, n}$.

Тогда из (4) вытекает, что

$$\sum r(B_k, a_k) \leq 2\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 4.$$

Случай равенства проверяется непосредственно с учетом свойства разделяющего преобразования ([6–12]).

Следствие 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *– набор неотрицательных чисел,* $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$*. Тогда для функционала*

$$I_n = \sum_{p=0}^{n-1} \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_{k+p}}(B_k, a_k),$$

где $\alpha_{n+p} = \alpha_p,\ p = \overline{1, n}$*, заданного на множестве всех с.н.о., удовлетворяющих дополнительному условию неналегания, относительно систем точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *единичной окружности, подчиненных условию* (1)*, справедливо неравенство*

$$I_n \leq 4.$$

Знак равенства достигается при выполнении условий теоремы 1.

Доказательство следствия 1. Действительно, в силу известного неравенства получаем

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_{k+p}}(B_k, a_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k+p}\ r(B_k, a_k)$$

Тогда имеет место соотношение

$$\sum_{p=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_{k+p}}(B_k, a_k) \leq \sum_{k=1}^{n}(\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{k+p})r(B_k, a_k) = \sum_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$$

так как по условиям следствия 1

$$\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{k+p} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1. \quad (5)$$

Из (5) и теоремы 1 получаем утверждение следствия 1.

Частным случаем следствия 1 является такой результат.

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *справедливо неравенство*

$$\sqrt{r(B_1, a_1)r(B_2, a_2)}+ \\ + \sqrt{r(B_2, a_2)r(B_3, a_3)} + \ldots + \sqrt{r(B_n, a_n)r(B_1, a_1)} \leq 4.$$

Знак равенства достигается при выполнении условий теоремы 1.

Аналогично теореме 1 можно доказать другой результат.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, подчиненной условию* (1) *и любой системы неналегающих областей, удовлетворяющей дополнительному условию неналегания относительно A_n, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} (\theta_k \cdot \theta_{k-1})^{-1/2}\ r(B_k, a_k) \leq 2n.$$

Знак равенства достигается, в частности, тогда, когда точки a_k и области B_k являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (3).

Доказательство. Используя неравенство (4), получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n}(\theta_{k-1}\theta_k)^{-1/2}r(B_k,a_k)\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\left\{r(G_{k-1}^{(2)},i)r(G_k^{(1)}-i)\right\}^{1/2}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[r(G_{k-1}^{(2)},i)+r(G_k^{(1)},-i)]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[r(G_k^{(1)},-i)+r(G_k^{(2)}i)]\leq 2n.$$

Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема 2 доказана.

Для обобщения теоремы 2 нам необходимы дополнительные определения.

В предыдущих теоремах использовались системы точек расположенные на окружности. Рассмотрим теперь системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $k=\overline{1,n}$, $n\geq 2$, удовлетворяющие условию (1). Такие системы точек называются n лучевыми (см.[8–12, 16]). Каждой n лучевой системе $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ соответствует система точек $\tilde{A}_n=\{\frac{a_k}{|a_k|}\}_{k=1}^n$, расположенная на единичной окружности. Поэтому области E_k, величины θ_k и функции $\xi=\pi_k(w)$ для $A_n=\{a_k\}^n$ по определению полагаем равными соответственно E_k, θ_k и $\xi=\pi_k(w)$, $k=\overline{1,n}$, построенным для системы $\tilde{A}=\{\frac{a_k}{|a_k|}\}_{k=1}^n$. Аналогично предыдущему будем говорить, что с.н.о. $\{B_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяет дополнительному условию неналегания относительно n лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, если $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$, и при каждом

$k = \overline{1,n}$ существует хотя бы одна горизонтальная прямая

$$l_k(\eta) = \{\xi : \mathcal{I}m\xi = \eta\}, \quad \eta \in \left(-|a_k|^{1/\theta_k}, |a_{k+1}|^{1/\theta_k}\right)$$

не имеющая общих точек ни с множеством $\pi_k([B_k \cap \bar{E}_k]_{a_k})$, ни с множеством $\pi_k([B_{k+1} \cap \bar{E}_k]_{a_{k+1}})$. Совершенно аналогично строятся области $G_k^{(1)}$, $G_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$.

Как и ранее, используя результаты работ [6, 7] и [8–12] получаем соотношения

$$r(B_k, a_k) \leq (\theta_{k-1}\theta_k)^{1/2}|a_k|^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\theta_{k-1}}+\frac{1}{\theta_k})+1}\cdot$$
$$\cdot\left(r(G_k^{(1)}, -i|a_k|^{\frac{1}{\theta_k}})\; r(G_{k-1}^{(2)}, i|a_k|^{\frac{1}{\theta}_{k-1}})\right)^{1/2}.$$

Таким образом, будем иметь для функционала следующую оценку

$$I_n =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{\frac{1}{2}(1/\theta_{k-1}+\frac{1}{\theta_k})}}{(\theta_{k-1}\theta_k)^{1/2}|a_k|} \cdot r(B_k, a_k) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[r(G_k^{(1)}, -i|a_k|^{\frac{1}{\theta_k}}) + r(G_k^{(2)}, i|a_{k+1}|^{1/\theta_k})\right] \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}(|a_k|^{1/\theta_k} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\theta_k}}).$$

Отсюда вытекает такой результат.

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда для любой n лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что*

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^{1/\theta_k} + |a_{k+1}|^{1/\theta_k}\right) = 2n,$$

и любой с.н.о. $\{B_k\}_{k=1}^n$, которая удовлетворяет дополнительному условию неналегания относительно A_n, справедливо неравенство

$$I_n \leq 2n.$$

Знак равенства достигается, в частности, когда a_k и B_k являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (3).

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность А.К.Бахтину за постановку задач и полезные советы при подготовке к работе.

Список литературы

[1] Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1966.—628с.

[2] Н.А. Лебедев. Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.:Наука, 1975.—336с.

[3] Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр.лит., 1962.—256с.

[4] Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов// Изв. АН СССР. Сер.мат.– 1968.— 32,№ 5.–С.1033—1043.

[5] Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях.:Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук.– Киев. 1975.—11с.

[6] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат.наук. – 1994. – 49. №1(295). – С.3-76.

[7] Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов в геометрической теории функций.: Уч.пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточ. ун-та, 2003.— 116с.

[8] Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на двух окружностях// Доп.НАН України.– 2005.–№ 7.–С.12—16.

[9] Бахтин А.К. Приведенные модули открытых множеств и экстремальные задачи со свободными полюсами// Там же.–2006. – № 5.– С.7—13.

[10] Бахтин А.К. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств// Там же. – № 10. – С.7—13.

[11] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б., Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – Т.73. – С.308.

[12] Бахтин А.К. Точные оценки для внутренних радиусов систем неналегающих областей и открытых множеств// Укр.мат.журн.–2007. – Т.59, № 12.С.1601—1618.

[13] Tsuji M. Potential theory in modern function theory. – Tokyo.1959.590p.

[14] Подвысоцкий Р.В. Оценка произведения внутренних радиусов частично неналегающих областей// Укр.мат.журн. –2008. – Т.60, № 7. – С.1004-1008.

[15] Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы// Доп.НАН України.- 2005.– № 8.– С.13—15.

[16] Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Об экстремальных задачах для симметричных неналегающих областях// Укр.мат.журн.–1997.– Т.49, № 2.– С.179-185.

[17] Stankiewicz J., Stankiewicz Z. On the mapping of the unit disk onto disjoining domains// Материалы 3-й Петрозаводской международной конференции по теории функций комплексного переменного, посвященной 100-летию Г.М.Голузина. – Петрозаводск: Изд-во Петр.гос.унта, 2006. – С.36.