Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 235-246

И. С. Стрельцова

Астраханский государственный университет, Астрахань
E-mail: strelzova_i@mail.ru

$\mathbb{R}$-конформная геометрия кривых на плоскости: алгебра дифференциальных инвариантов

В работе описывается структура алгебры скалярных дифференциальных инвариантов кривых на плоскости с метриками Евклида или Минковского относительно $\mathbb{R}$-конформных преобразований.

We describe a structure of the algebra of scalar differential invariants of plane curves with respect to conform transformations.

Ключевые слова: *differential invariants, invariant differentiation*

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^2_\varepsilon$ — плоскость с метрикой $ds^2 = dy^2 + \varepsilon dx^2$. Здесь x, y — координаты на плоскости и $\varepsilon = \pm 1$. При $\varepsilon = 1$ это — плоскость Евклида, а при $\varepsilon = -1$ — плоскость Минковского.

Преобразование ϕ плоскости $\mathbb{R}^2_\varepsilon$ называется *конформным*, при преобразовании метрика умножается на некоторую положительную функцию, то есть

$$\phi^*(ds^2) = \lambda ds^2 \tag{1}$$

для некоторой функции $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^2_\varepsilon)$, $\lambda > 0$ [3].

Если же при преобразовании ϕ метрика умножается на положительную константу (то есть в формуле (1) $\lambda \in \mathbb{R}^+$), то такое преобразование будем называть $\mathbb{R}$-*конформным*.

Множество $\mathbb{R}$-конформных преобразований плоскости является группой Ли, которую мы будем называть $\mathbb{R}$-*конформной* группой Ли и обозначать G_{cm}. Она представляет собой полупрямое произведение группы движений G_{m} и группы гомотетией G_{h}.

В предлагаемой работе мы даем полное описание алгебры дифференциальных инвариантов кривых относительно $\mathbb{R}$-конформных преобразований плоскости $\mathbb{R}^2_\varepsilon$.

Мы вводим понятие $\mathbb{R}$-конформной кривизны кривой, которая в нашем случае играет такую же важную роль, как и обычная кривизна на плоскости Евклида. Но, в отличии от кривизны кривой, $\mathbb{R}$-конформная кривизна — дифференциальный инвариант не второго, а третьего порядка. Дифференциальные инварианты k-го порядка получаются из нее последовательным применением операции инвариантного дифференцирования.

Полученное описание алгебры дифференциальных инвариантов можно применить к интегрированию нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих алгебру симметрий $\mathcal{G}_{\mathrm{cm}}$.

Отметим, что в работе [5] описана структура алгебры дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости Минковского.

2. Дифференцальные инварианты и инвариантные дифференцирования

Базис алгебры Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{cm}}$ состоит из следующих векторных полей: $X = \partial_x, Y = \partial_y$ (параллельные переносы), $Z = x\partial_y + \varepsilon y\partial_x$ (повороты[1]) и $H = x\partial_x + y\partial_y$ (гомотетии). Заметим, что эти векторные поля — контактные векторные поля с производящими функциями

$$h_1 = p_1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = x + \varepsilon y p_1, \quad h_4 = y - p_1 x \tag{2}$$

[1] Для плоскости Минковского — гиперболические повороты.

соответственно. Поэтому алгебру Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{cm}}$ можно отождествить с алгеброй Ли контактных векторных полей X_h с производящими функциями вида

$$h(x, y, p_1) = a_1 + a_2 p_1 + a_3(x + \varepsilon y p_1) + a_4(y - p_1 x), \tag{3}$$

где $a_1, \ldots, a_4$ — константы [2, 7].

Пусть φ — некоторая кривая на $\mathbb{R}^2_\varepsilon$, заданная в виде графика функции $y = f(x)$ и пусть $J^k\mathbb{R}$ — пространство k-джетов гладких функций на $\mathbb{R}$. Напомним, что функция $I \in C^\infty(J^k\mathbb{R})$ называется (скалярным) *дифференциальным инвариантом* кривой относительно группы Ли G, если она не является постоянной и сохраняется под действием k-го продолжения этой группы [1]. Число k называется *порядком* дифференциального инварианта.

Найдем дифференциальный инвариант кривой третьего порядка относительно группы G_{cm}. Для его построения используем дифференциальные инварианты группы движений G_{m}. Пусть $x, y, p_1, p_2, \cdots, p_k$ — канонические координаты на пространстве $J^k\mathbb{R}$. Как известно, первый дифференциальный инвариант кривой относительно группы G_{m} это — кривизна кривой, являющаяся инвариантом второго порядка:

$$I_2 = \frac{p_2}{(p_1^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Дифференцирование ∇ на $J^\infty\mathbb{R}$ будем называть *инвариантным дифференцированием* группы Ли G если для любого векторного поля $X^* \in \mathcal{G}^\infty$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "X^*"'] & C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) \arrow[d, "X^*"] \\
C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) \arrow[r, "\nabla"] & C^\infty(J^\infty\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Инвариантное дифференцирование позволяет строить новые дифференциальные инварианты из уже известных. Действительно, пусть, например, I — дифференциальный инвариант группы Ли G и ∇ — инвариантное дифференцирование. Тогда

$$X^*(\nabla(I)) = \nabla(X^*(I)) = 0$$

для любого векторного поля $X^* \in \mathcal{G}^\infty$. Таким образом, функция $\nabla(I)$ тоже является дифференциальным инвариантом.

Через $\frac{d}{dx} : C^\infty(J^\infty\mathbb{R}) \to C^\infty(J^\infty\mathbb{R})$ обозначим полную производную по переменной x:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_1\frac{\partial}{\partial y} + \cdots + p_k\frac{\partial}{\partial p_{k-1}} \cdots .$$

Пусть $X = A(x,y)\partial_x + B(x,y)\partial_y$ — векторное поле на $\mathbb{R}^2$ из алгебры Ли $\mathcal{G}$. Следующая лемма [4] указывает метод вычисления инвариантных дифференцирований.

Лемма 1. *Если функция $\lambda \in C^\infty(J^k\mathbb{R})$ удовлетворяет уравнению*

$$X^*(\lambda) - \lambda\frac{dA}{dx} = 0 \tag{5}$$

для любого векторного поля $X^* \in \mathcal{G}^\infty$, то $\nabla = \lambda\frac{d}{dx}$ — инвариантное дифференцирование группы Ли G.

Применим доказанную лемму к группе движений.

Лемма 2. *Дифференцирование*

$$D = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + \varepsilon}}\frac{d}{dx}$$

является инвариантным дифференцированием группы движений G_{m}.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую лемму к векторным полям X, Y, Z при $k = 1$.

Продолжения этих векторных полей в пространство 1-джетов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X^{(1)} =&\partial_x, \\ Y^{(1)} =&\partial_y, \\ Z^{(1)} =&-\varepsilon y\partial_x + x\partial_y + (1+\varepsilon p_1^2)\partial_{p_1}. \end{aligned}$$

Следовательно функция $\lambda = \lambda(x, y, p_1)$ должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad (1+\varepsilon p_1^2)\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} + p_1\lambda = 0.$$

Ее общее решение имеет вид:

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{p_1^2+\varepsilon}},$$

где C — произвольная постоянная. □

Дифференциальный инвариант третьего порядка относительно группы движений G_{m} получим, применяя к инварианту I_2 оператор D:

$$I_3 = \frac{p_3(p_1^2+\varepsilon) - 3p_1p_2^2}{(p_1^2+\varepsilon)^3}.$$

3. $\mathbb{R}$-конформная кривизна

Векторное поле H порождает 1-параметрическую группу

$$h_t : (x, y) \mapsto (e^t x, e^t y)$$

на плоскости. Ее поднятие в пространство 3-джетов имеет вид:

$$h_t^{(3)} : (x, y, p_1, p_2, p_3) \mapsto (e^t x, e^t y, p_1, e^{-t}p_2, e^{-2t}p_3).$$

Поэтому на дифференциальные инварианты I_2 и I_3 она действует следующим образом:

$$h_t^{(3)*}(I_2) = e^{-t}I_2 \quad \text{и} \quad h_t^{(3)*}(I_3) = e^{-2t}I_3. \tag{6}$$

Мы видим, что абсолютные инварианты I_2 и I_3 группы Ли G_{m} являются относительными инвариантами группы Ли G_{cm}. Таким образом, функция

$$J_3 = \frac{I_3}{I_2^2} = \frac{p_3(p_1^2+\varepsilon) - 3p_1p_2^2}{p_2^2} \tag{7}$$

является (абсолютным) дифференциальным инвариантом третьего порядка группы G_{cm}. Этот инвариант мы будем называть $\mathbb{R}$-*конформной кривизной.*

Пусть φ — некоторая кривая, заданная уравнением $y = f(x)$. Ограничение J_3 на график 3-джета функции f будем называть $\mathbb{R}$-*конформной кривизной кривой* φ и обозначать K_φ, то есть

$$K_\varphi = J_3|_{j^3(f)}.$$

Очевидно, $\mathbb{R}$-конформная кривизна не определена в точках кривой, где вторая производная функции f обращается в нуль. В том числе она не определена для прямых.

Пример 8. *$\mathbb{R}$-конформная кривизна параболы $y = x^2 + px + q$ (p, q — постоянные) равна $-6x$.*

Пример 9. *Найдем кривые, для которых $\mathbb{R}$-конформная кривизна равна нулю. Для этого нужно решить обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка $K_\varphi = 0$, или, в терминах функции y, уравнение*

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{y'^2+\varepsilon}.$$

Поэтому искомые кривые удовлетворяют уравнению

$$(y+a)^2 + \varepsilon(x+b)^2 = c^2,$$

и определяют либо окружности (при $\varepsilon = 1$), либо гиперболы (при $\varepsilon = -1$). Здесь a, b, c — произвольные постоянные.

Теорема 1. *Для всякой гладкой функции $\lambda = \lambda(x)$, определенной в интервале $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, существует кривая φ, такая, что ее конформная кривизна K_φ равна $\lambda(x)$ в некотором интервале $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{y'''(y'^2+\varepsilon)-3y'y''^2}{y''^2}=\lambda(x)$$

относительно функции y.

Пусть $\varepsilon=-1$. Зададим начальные данные для функции y в некоторой фиксированной точке x_0 так, чтобы $y'(x_0)\neq\pm1$ и $y''(x_0)\neq0$. Значение функции y в этой точке можно выбрать произвольным. Для $\varepsilon=1$ начальные данные достаточно выбрать так, чтобы $y''(x_0)\neq0$. Тогда по теореме существования для значений x из некоторой окрестности точки x_0 это уравнение имеет решение $y=f(x)$. Таким образом, конформная кривизна кривой φ, задаваемой уравнением $y=f(x)$ равна $K_\varphi(x)=\lambda(x)$. □

4. Структура алгебры скалярных дифференциальных инвариантов

Найдем алгебру скалярных дифференциальных инвариантов кривых относительно группы G_{cm}. Применяя лемму 1 к векторным полям X,Y,Z,H при $k=2$ мы находим, что

$$\lambda=\frac{p_1^2+\varepsilon}{p_2}.$$

Таким образом, оператор

$$\nabla=\frac{p_1^2+\varepsilon}{p_2}\frac{d}{dx}$$

является инвариантным дифференцированием. Используя инвариантное дифференцирование ∇, мы можем построить дифференциальные инварианты высших порядков:

$$J_4=\nabla(J_3),\dots,J_k=\nabla(J_{k-1}),\dots.$$

Укажем вид дифференциального инварианта четвертого порядка в координатах:

$$J_4 = -\frac{1+p_1^2}{p_2^4}(3p_2^4 - 2p_2^2p_1p_3 + 2p_3^2 + 2p_3^2p_1^2 - p_2p_4 - p_2p_4p_1^2).$$

Теорема 2. *Функции $J_3, J_4, \ldots, J_k, \ldots$ образуют полную систему локальных дифференциальных инвариантов кривой относительно $\mathbb{R}$-конформных преобразований плоскости $\mathbb{R}^2_\varepsilon$.*

Доказательство. Простой подсчет размерности алгебры дифференциальных инвариантов группы G_{cm} показывает, что не существует дифференциальных инвариантов порядка < 3 и существует ровно $k-2$ дифференциальных инвариантов порядка не выше k $(k \geq 3)$.

В самом деле, размерность орбиты общего положения продолжения в пространство 3-джетов группы Ли G_{cm} равна четырем, а размерность самого пространства $J^3\mathbb{R}$ равна пяти. Поэтому существует только один дифференциальный инвариант третьего порядка. При повышении порядка джетов на единицу размерность орбиты группы G_{cm} не меняется, а размерность пространства джетов увеличивается на единицу. Поэтому каждый раз при переходе от пространства $(k-1)$-джетов к пространству k-джетов возникает только один новый дифференциальный инвариант, который имеет порядок k. Но так как инвариант J_k получается из J_{k-1} применением к последнему инвариантного дифференцирования ∇, то (с точностью до калибровочного преобразования) J_k и есть этот новый инвариант. $\square$

Следствие 1. *Всякий локальный дифференциальный инвариант кривой порядка $\leq k$ $(k \geq 3)$ имеет вид*

$$F(J_3, \ldots, J_k),$$

где F — некоторая гладкая функция.

5. $\mathbb{R}$-конформная эквивалентность кривых

Две кривые φ и γ на плоскости $\mathbb{R}^2_\varepsilon$ будем называть *конформно эквивалентными*, если существует $\mathbb{R}$-конформное преобразование, переводящее одну кривую в другую.

У группы Ли $G_{\rm cm}$ есть вырожденные орбиты.

Кривую φ будем называть *невырожденной* если ее поднятие в $J^4\mathbb{R}$ не имеет общих точек с вырожденной орбитой.

Пусть φ — кривая на плоскости, на которой дифференциал конформной кривизны невырожден, то есть $dK_\varphi \neq 0$. Тогда функцию K_φ можно принять за новый параметр t на кривой и ограничение дифференциального инварианта $J = J_4$ на кривую φ может быть представлено в виде некоторой функции от этого параметра: $J_\varphi = F_\varphi(t)$.

Теорема 3. *Если на двух невырожденных кривых φ и γ дифференциалы конформных кривизн не вырождаются, то одна кривая может быть переведена в другую $\mathbb{R}$-конформным преобразованием тогда и только тогда, когда $F_\varphi \equiv F_\gamma$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть для кривых $\gamma = \{y = g(x)\}$ и $\varphi = \{y = f(x)\}$ выполняется условие $F_\varphi \equiv F_\gamma \equiv F$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$J = F(K), \tag{8}$$

определяющее гиперповерхность E в пространстве 4-джетов. Так как функции $y = g(x)$ и $y = f(x)$ являются решениями этого дифференциального уравнения, то поднятия кривых γ и φ в пространство $J^4\mathbb{R}$ лежат на гиперповерхности E.

Пусть $\gamma^{(4)}$ и $\varphi^{(4)}$ — поднятия кривых γ и φ в пространство 4-джетов соответственно. Покажем, что кривую $\gamma^{(4)}$ сдвигом вдоль траекторий векторных полей X, Y, Z, H можно перевести в кривую $\varphi^{(4)}$. Для этого достаточно показать, что поднятие группы $G_{\rm cm}$ в $J^4\mathbb{R}$ действует транзитивно на решениях уравнения (8).

Любое векторное поле $X \in \mathcal{G}^{(4)}_{\mathrm{cm}}$ является инфинитезимальной симметрией уравнения E. Здесь $\mathcal{G}^{(4)}$ — поднятие алгебры Ли $\mathcal{G}$ в $J^4\mathbb{R}$. Каждая симметрия уравнения раскладывается на две составляющие — характеристическую симметрию и тасующую симметрию [7].

Напомним [7], что характеристические симметрии действуют на пространстве $J^k\mathbb{R}$ вдоль решений и, стало быть, переводят каждое решение в себя. С точностью до умножения на функцию они представляют собой векторное поле

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x} + p_1\frac{\partial}{\partial y} + \cdots + p_k\frac{\partial}{\partial p_{k-1}}.$$

Тасующие же симметрии, напротив, переводят одно решение в другие. Укажем вид тасующих симметрий. Поднятие векторного поля $X = A(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{G}_{\mathrm{cm}}$ в пространство k-джетов имеет вид:

$$X^{(k)}_h = S^{(k)}_h + A\Delta_k,$$

где $h = B - p_1 A$. Поэтому

$$S^{(k)}_h = X^{(k)}_h - A\Delta_k,$$

то есть

$$S^{(k)}_h = h\frac{\partial}{\partial y} + \Delta_1(h)\frac{\partial}{\partial p_1} + \cdots + \Delta^{(k)}_k(h)\frac{\partial}{\partial p_k},$$

Векторное поле $S^{(k)}_h$ называют *эволюционным дифференцированием.*

В силу теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения E, достаточно доказать транзитивность действия группы $G^{(3)}_{\mathrm{cm}}$ на пространстве начальных данных решений. Не сложно показать, что группа Ли, порожденная векторными полями $S^{(4)}_{h_1}, \dots S^{(4)}_{h_4}$ действует на E глобально транзитивно. Таким образом, любая точка $a_0 \in E$ может быть переведена в любую другую точку $a_1 \in E$ комбинацией сдвигов вдоль векторных полей $S^{(4)}_{h_1}, \dots S^{(4)}_{h_4}$. Поэтому из теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения E следует, что кривая γ может быть (локально) переведена в кривую φ. □

Пример 10. *Проиллюстрируем доказанную теорему на примере кривых*

$$\varphi = \{y = -x^2 | x < 0\}$$

и

$$\gamma = \{y = -\sqrt{x} | x > 0\}.$$

Вычисляя для них конформные кривизны, получим: $K_\varphi = 6x$ *и* $K_\gamma = -6\sqrt{x}$. *Дифференциальные инварианты четвертого порядка равны*

$$J_\varphi = 3 + 12x^2$$

и

$$J_\gamma = 12x\left(1 + \frac{1}{4x}\right)$$

соответственно. Мы видим, что функции F *для этих кривых совпадают:*

$$F_\varphi(t) = F_\gamma(t) = 3 + \frac{t^2}{3}.$$

В тоже время очевидно, что поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ *вокруг начала координат кривая* φ *совмещается с кривой* γ.

Список литературы

[1] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **28**, М., 1988, 297 стр.

[2] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*, М., "Наука 1986. 336 стр.

[3] Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, М. "Наука" , 1986. 224 стр.

[4] Коновенко Н.Г. *Алгебры дифференциальных инвариантов геометрических величин на аффинной прямой.* (в печати)

[5] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. *Расслоения кривых на плоскости Минковского*, "Симметрии: теоретический и методический аспекты" Сборник научных трудов II международного семинара, (12 – 14 сентября 2007 г., Астрахань), Астрахань, 2007. стр. 53 – 58.

[6] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. *Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского.*, Науковий журнал Математичні методи та фізико-механічні поля. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, т. 50, №4. - Львів; 2007. - с.49.

[7] Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V., *Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations*, Cambridge University Press, 496 pp., (2007).