Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 82-90

В. М. Кузаконь

Одесская национальная академия пищевых технологий,
Одесса
E-mail: kuzakon_v@ukr.net

Дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости Лобачевского

В работе дается полное описание алгебры дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости Лобачевского относительно группы движений. Показано, что дифференциальные инварианты любого порядка получаются из дифференциальных инвариантов второго порядка при помощи дифференцирования последних вдоль инвариантных векторных полей.

Ключевые слова: *расслоения кривых, дифференциальные инварианты, джеты, инвариантные дифференцирования*

1. Введение

В работах [5,6] мы построили алгебру скалярных дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости Минковского. В этой работе мы рассмотрим плоскость Лобачевского.

В качестве модели плоскости Лобачевского мы выберем модель Пуанкаре: верхнюю открытую полуплоскость

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$$

с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \tag{1}$$

Геодезическими в этой модели являются вертикальные лучи, а также дуги окружностей с центром на оси x.

Инфинитезимальные симметрии метрики (1) имеют вид

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{x^2 - y^2}{2}\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Сдвиги вдоль траекторий этих векторных полей порождают группу движений на плоскости Лобачевского.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ — расслоение кривых. В координатах такое расслоение можно задать с помощью некоторой гладкой (класса C^∞) функцией двух переменных $u = f(x, y)$, такой, что ее дифференциал $df \neq 0$. Линии уровня этой функции совпадают с кривыми расслоения φ.

Функция f определена с точностью до калибровочного преобразования $f \to F(f)$, где $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция. Калибровочное преобразование порождается векторными полями вида

$$H = h(u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Движения полуплоскости вместе с калибровочным преобразованием прямой порождают псевдогруппу Ли G, действующую в полупространстве $\mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}$ с координатами x, y, u.

Найдем алгебру дифференциальных инвариантов этого расслоения относительно группы движений.

Рассмотрим расслоение

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+, \quad \pi : (u, x, y) \mapsto (x, y).$$

Пусть $J^k(\pi)$ — многообразие k-джетов локальных сечений расслоения π. Введем на $J^k(\pi)$ следующие (локальные) координаты:

$$x, y, u, u_{1,0}, u_{0,1}, \ldots, u_{s,t}, \ldots u_{0,k}.$$

Здесь координата $u_{s,t}$ отвечает частной производной

$$\frac{\partial^{s+t} u}{\partial x^s \partial y^t}, \quad (0 \leq s + t \leq k).$$

Продолжения векторных полей X, Y, Z и H в пространство 2-джетов $J^2(\pi)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
X^{(2)} =&\frac{\partial}{\partial x},\\
Y^{(2)} =&Y - (xu_{1,0} + yu_{0,1})\frac{\partial}{\partial u_{1,0}} + (yu_{1,0} - xu_{0,1})\frac{\partial}{\partial u_{0,1}} -\\
&-(u_{1,0} + 2xu_{2,0} + 2yu_{1,1})\frac{\partial}{\partial u_{2,0}} + (yu_{2,0} - u_{0,1} -\\
&- 2xu_{1,1} - yu_{0,2})\frac{\partial}{\partial u_{1,1}} + (u_{1,0} + 2yu_{1,1} - 2xu_{0,2})\frac{\partial}{\partial u_{0,2}},\\
Z^{(2)} =&Z - u_{1,0}\frac{\partial}{\partial u_{1,0}} - u_{0,1}\frac{\partial}{\partial u_{0,1}} -\\
&- 2u_{2,0}\frac{\partial}{\partial u_{2,0}} - 2u_{1,1}\frac{\partial}{\partial u_{1,1}} - 2u_{0,2}\frac{\partial}{\partial u_{0,2}},\\
H^{(2)} =&H + h'u_{1,0}\frac{\partial}{\partial u_{1,0}} + h'u_{0,1}\frac{\partial}{\partial u_{0,1}} + (h''u_{1,0}^2 + h'u_{2,0})\frac{\partial}{\partial u_{2,0}} +\\
&+(h''u_{0,1}u_{1,0} + h'u_{1,1})\frac{\partial}{\partial u_{1,1}} + (h''u_{0,1}^2 + h'u_{0,2})\frac{\partial}{\partial u_{0,2}}.
\end{aligned}$$

Простые арифметические вычисления показывают, что первые дифференциальные инварианты расслоения φ возникают в пространстве 2-джетов $J^2(\pi)$.

Вычислим эти дифференциальные инварианты. Для этой цели мы используем инвариантные дифференцирования псевдогруппы Ли G.

2. Инвариантные дифференцирования

Пусть $J^\infty(\pi)$ — пространство бесконечных джетов расслоения π, $\mathcal{G}$ — алгебра Ли псевдогруппы Ли G и $\mathcal{G}_\infty$ — поднятие $\mathcal{G}$ в $J^\infty(\pi)$.

Дифференциальный оператор

$$\nabla : C^\infty(J^\infty(\pi)) \to C^\infty(J^\infty(\pi))$$

будем называть *инвариантным дифференцированием* псевдогруппы Ли G если он коммутирует с любым элементом $X^* \in \mathcal{G}_\infty$, то есть

$$X^* \circ \nabla = \nabla \circ X^*. \tag{2}$$

С расслоением φ, заданном функцией $u = f(x,y)$ связаны два векторных поля на $\mathbb{R}^2_+$: поля единичных векторов касательных и нормальных к кривым расслоения. Эти векторные поля имеют вид

$$A = \frac{y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \left(f_y \frac{\partial}{\partial x} - f_x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

и

$$B = \frac{y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \left(f_x \frac{\partial}{\partial x} + f_y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

соответственно. Они инвариантны относительно движений плоскости и калибровочного преобразования и порождают инвариантные дифференцирования

$$\nabla_t = \frac{y}{\sqrt{u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2}} \left(u_{0,1} \frac{d}{dx} - u_{1,0} \frac{d}{dy} \right)$$

и

$$\nabla_n = \frac{y}{\sqrt{u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2}} \left(u_{1,0} \frac{d}{dx} + u_{0,1} \frac{d}{dy} \right)$$

на $C^\infty(J^\infty(\pi))$. Здесь

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} &= \frac{\partial}{\partial x} + u_{1,0} \frac{\partial}{\partial u} + u_{2,0} \frac{\partial}{\partial u_{1,0}} + u_{1,1} \frac{\partial}{\partial u_{0,1}} + u_{3,0} \frac{\partial}{\partial u_{2,0}} + \cdots \\
\frac{d}{dy} &= \frac{\partial}{\partial y} + u_{0,1} \frac{\partial}{\partial u} + u_{1,1} \frac{\partial}{\partial u_{1,0}} + u_{0,2} \frac{\partial}{\partial u_{0,1}} + u_{2,1} \frac{\partial}{\partial u_{2,0}} + \cdots .
\end{aligned}$$

— операторы полного дифференцирования по переменным x и y соответственно.

3. Дифференциальные инварианты

Построенные инвариантные дифференцирования порождают два дифференциальных инварианта второго порядка псевдогруппы Ли G. Действительно, не трудно заметить, что коммутатор операторов ∇_t и ∇_n линейно выражается через эти операторы:

$$[\nabla_t, \nabla_n] = I_1 \nabla_t + I_2 \nabla_n \tag{3}$$

Коэффициенты $I_1, I_2 \in C^\infty(J^2(\pi)$ и являются этими дифференциальными инвариантами.

Указжем их координатное представление:

$$I_1 = \frac{yu_{2,0}u_{0,1}^2 + yu_{0,2}u_{1,0}^2 - u_{0,1}^3 - u_{0,1}u_{1,0}^2 - 2yu_{0,1}u_{1,0}u_{1,1}}{(u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2)^{3/2}}$$

и

$$\begin{aligned} I_2 =& \frac{1}{(u_{1,0}^2 + u_{0,1}^2)^{3/2}} (u_{1,0}^3 + u_{1,0}u_{0,1}^2 + yu_{1,0}^2 u_{1,1} - \\ & - yu_{1,0}u_{0,1}u_{2,0} + yu_{1,0}u_{0,1}u_{0,2} - yu_{1,1}u_{0,1}^2). \end{aligned}$$

Пусть I — дифференциальный инвариант k-го порядка псевдогруппы Ли G и ∇ — инвариантное дифференцирование.

По определению инвариантного дифференцирования, функция $\nabla(I)$ является дифференциальным инвариантом $(k+1)$-го порядка. Действительно, в силу (2) мы получаем:

$$X^{(k+1)}(\nabla(I)) = \nabla(X^{(k)}(I)) = 0.$$

Здесь $X^{(k)}$ — k-е продолжение векторного поля $X \in \mathcal{G}$.

Таким образом, функции

$$I_{1,1} = \nabla_t(I_1), I_{1,2} = \nabla_n(I_1), I_{2,1} = \nabla_t(I_2) \quad \text{и} \quad I_{2,2} = \nabla_n(I_2)$$

являются дифференциальными инвариантами третьего порядка.

Записанные в координатах, они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
I_{1,1} = &-\frac{y^2}{(u_{1,0}{}^2+u_{0,1}{}^2)^3}(-u_{0,1}{}^5 u_{3,0} + (3\,u_{2,0}u_{1,1}+3\,u_{1,0}u_{2,1})u_{0,1}{}^4 - \\
&- u_{1,0}((u_{3,0}+3\,u_{1,2})u_{1,0}+6\,u_{1,1}{}^2-3\,u_{2,0}(u_{2,0}-u_{0,2}))u_{0,1}{}^3 + \\
&+ u_{1,0}{}^2((u_{0,3}+3\,u_{2,1})u_{1,0}-9\,u_{1,1}(u_{2,0}-u_{0,2}))u_{0,1}{}^2 - \\
&- 3\,u_{1,0}{}^3(u_{1,0}u_{1,2}-2\,u_{1,1}{}^2-u_{0,2}(u_{2,0}-u_{0,2}))u_{0,1}+u_{1,0}{}^5u_{0,3} - \\
&- 3\,u_{1,1}u_{1,0}{}^4u_{0,2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{1,2} = &\frac{-2}{(u_{1,0}{}^2+u_{0,1}{}^2)^3}(y((-1/2\,yu_{2,1}-1/2\,u_{2,0})u_{0,1}{}^5 + \\
&+ (((-1/2\,u_{3,0}+u_{1,2})y+1/2\,u_{1,1})u_{1,0}+1/2\,y(u_{2,0}u_{0,2} + \\
&+ 2\,u_{1,1}{}^2))u_{0,1}{}^4 - 3\,u_{1,0}(((-1/6\,u_{2,1}+1/6\,u_{0,3})y+1/3\,u_{2,0})u_{1,0} + \\
&+ yu_{1,1}(u_{0,2}-u_{2,0}))u_{0,1}{}^3 + 1/2\,u_{1,0}{}^2(((-u_{3,0}+u_{1,2})y + \\
&2\,u_{1,1})u_{1,0}+3\,y(-8/3\,u_{1,1}{}^2-4/3\,u_{2,0}u_{0,2}+u_{0,2}{}^2+u_{2,0}{}^2))u_{0,1}{}^2 + \\
&+ 3\,u_{1,0}{}^3(((1/3\,u_{2,1}-1/6\,u_{0,3})y-1/6\,u_{2,0})u_{1,0} + \\
&+ yu_{1,1}(u_{0,2}-u_{2,0}))u_{0,1} - 1/2\,u_{1,0}{}^4((yu_{1,2}-u_{1,1})u_{1,0} - \\
&- y(u_{2,0}u_{0,2}+2\,u_{1,1}{}^2)))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2,1} = &\frac{2}{(u_{1,0}{}^2+u_{0,1}{}^2)^3}(y((-1/2\,u_{1,1}-1/2\,yu_{1,2})u_{1,0}{}^5 + \\
&+ (((u_{2,1}-1/2\,u_{0,3})y+1/2\,u_{2,0})u_{0,1}-1/2\,(-u_{1,1}{}^2 + \\
&+ u_{0,2}(u_{0,2}-u_{2,0}))y)u_{1,0}{}^4 + \\
&+ 1/2\,u_{0,1}(((-u_{3,0}+u_{1,2})y-2\,u_{1,1})u_{0,1} + \\
&+ 8\,yu_{1,1}(-1/2\,u_{2,0}+u_{0,2}))u_{1,0}{}^3 \\
&- 1/2\,(((-u_{2,1}+u_{0,3})y-2\,u_{2,0})u_{0,1} - \\
&- 2\,(-5\,u_{1,1}{}^2+(u_{0,2}-u_{2,0})^2)y)u_{0,1}{}^2u_{1,0}{}^2 + \\
&+ u_{0,1}{}^3(((-1/2\,u_{3,0}+u_{1,2})y-1/2\,u_{1,1})u_{0,1} - \\
&- 2\,yu_{1,1}(-2\,u_{2,0}+u_{0,2}))u_{1,0} - 1/2\,u_{0,1}{}^4((-u_{2,0}+yu_{2,1})u_{0,1} - \\
&- y(u_{1,1}{}^2+u_{2,0}(u_{0,2}-u_{2,0}))))),
\end{aligned}$$

$$I_{2,2} = -\frac{y^2}{({u_{1,0}}^2 + {u_{0,1}}^2)^3}(-u_{2,1}{u_{1,0}}^5 + ((u_{3,0} - 2\,u_{1,2})u_{0,1} -$$
$$- u_{1,1}(-2\,u_{2,0} + u_{0,2}))u_{1,0}{}^4 - u_{0,1}((-u_{2,1} + u_{0,3})u_{0,1} - 6\,{u_{1,1}}^2 +$$
$$+ (u_{0,2} - u_{2,0})(-2\,u_{2,0} + u_{0,2}))u_{1,0}{}^3 - ((-u_{3,0} + u_{1,2})u_{0,1} -$$
$$- 9\,u_{1,1}(u_{0,2} - u_{2,0}))u_{0,1}{}^2 u_{1,0}{}^2 - u_{0,1}{}^3((-2\,u_{2,1} + u_{0,3})u_{0,1} -$$
$$- {u_{2,0}}^2 + 6\,{u_{1,1}}^2 + 3\,u_{2,0}u_{0,2} - 2\,{u_{0,2}}^2)u_{1,0} +$$
$$+ (u_{0,1}u_{1,2} - 2\,u_{1,1}(-1/2\,u_{2,0} + u_{0,2}))u_{0,1}{}^4).$$

Этими инвариантами исчерпываются все дифференциальные инварианты третьего порядка.

Действительно, размерность пространства дифференциальных инвариантов — это коразмерность регулярных орбит продолжения псевдогруппы Ли G в расслоение $J^k(\pi)$. Например, размерность пространства 1-джетов $J^1(\pi)$ равна пяти. Орбита общего положения порождена продолжениями $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$ векторных полей X, Y, Z в $J^k(\pi)$, а также продолжениями в $J^k(\pi)$ векторных полей $\frac{\partial}{\partial u}$ и $u\frac{\partial}{\partial u}$ и поэтому тоже имеет размерность пять.

Таким образом, у расслоения кривых φ не существует дифференциальных инвариантов первого порядка. Размерность орбиты общего положения в $J^k(\pi)$ равна $k+4$, а размерность пространства $J^k(\pi)$ равна $2+C^k_{k+2}$. Поэтому коразмерность орбиты равна

$$\nu(k) = C^k_{k+2} - k - 2. \tag{4}$$

Это число совпадает с числом функционально независимых дифференциальных инвариантов, порядок которых не выше k.

Таким образом, число $\mu(k)$ инвариантов k-го порядка можно вычислить по формуле:

$$\mu(k) = \nu(k) - \nu(k-1) = k. \tag{5}$$

В частности, число функционально независимых дифференциальных инвариантов порядка не выше 3 равно пяти.

Приведенные рассуждения показывают, что инварианты I_1, I_2, $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{2,1}$ и $I_{2,2}$ функционально зависимы. Поэтому между построенными инвариантами должно быть одно соотношение (типа уравнения Gala в [5]).

Инварианты четвертого порядка можно получить из инвариантов третьего порядка также применяя к ним операторы ∇_t и ∇_n. В силу формулы (3) композиции операторов $\nabla_t \circ \nabla_n$ и $\nabla_n \circ \nabla_t$ порождают одни и те же инварианты по модулю инвариантов более низкого порядка.

Мы получаем 6 инвариантов 4-порядка. Всего же мы получили 12 инвариантов порядка не менее 4. Поэтому число функционально независимых инвариантов порядка не менее четырех равно девяти и между построенными инвариантами должны существовать три соотношения. Одно из них — соотношение, о котором мы упоминали выше. Два других мы получаем, применяя к нему операторы ∇_t и ∇_n.

Аналогично мы можем получить дифференциальные инварианты любого порядка.

Итак, мы получаем следующую теорему, которая описывает структуру дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости Лобачевского.

Теорема 1. *Все дифференциальных инварианты расслоения кривых на плоскости Лобачевского относительно группы движений порождены дифференциальными инвариантами второго порядка I_1 и I_2 и их всевозможными производными по ∇_t и ∇_n.*

Список литературы

[1] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.28. М., 1988.

[2] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М., "Наука 1986. 336 стр.

[3] Кузаконь В. М. Диференціальні інваріанти субмерсій многовидів // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 295-–298.

[4] Кузаконь В.М. Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. 48, №4. – С. 95–99

[5] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. *Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского.*, Науковий журнал Математичні методи та фізико-механічні поля. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, т. 50, №4. - Львів; 2007. - С. 49–55.

[6] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. *Расслоения кривых на плоскости Минковского*, "Симметрии: теоретический и методический аспекты" Сборник научных трудов II международного семинара, (12 – 14 сентября 2007 г., Астрахань), Астрахань, 2007. С. 53 – 58.