Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 45-106

И. Ю. Власенко

Институт математики НАН України
E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Е. А. Полулях

Институт математики НАН України
E-mail: polukyah@imath.kiev.ua

Пример неблуждающего множества, не имеющего рекуррентных и предельных точек[1]

Строятся примеры гладких потоков и каскадов на бесконечномерных многообразиях, таких, что все их точки неблуждающие, но множество их предельных, а тем более рекуррентных точек пусто.

1. Вступление

Как известно, для типичной C^1-гладкой динамической системы ее множество неблуждающих точек совпадает с множеством предельных точек и с замыканием множества рекуррентных точек. Поэтому примеры гладких динамических систем с отличающимся поведением не так часты.

В этой работе строятся примеры гладких динамических систем на компактных многообразиях с различающимися граничным, неблуждающим и цепно-рекуррентным множествами, а также пример динамической системы, такой,

[1]Работа выполнена в рамках целевой программы НАН Украины "Современные методы иследования математических моделей в задачах природоведения и общественных науках" НИР № 0107U00233

что все ее точки неблуждающие, но множество ее предельных, а тем более рекуррентных точек пусто. Надеемся, что подобные примеры, кроме новизны, послужат хорошей иллюстрацией различия свойств предельных и неблуждающих точек. Для полноты изложения, не претендуя на новизну, здесь также приводится простой пример потока, у которого все точки цепно-рекуррентны, но нет неблуждающих точек (пример 2.4).

Множество неблуждающих точек, не являющихся предельными, изучалось в работах авторов [4, 14]. Используя разработанную там теорию, мы строим последовательность компактных многообразий все возрастающей размерности и динамических систем на них, таких, что у каждой системы — элемента этой последовательности — множество неблуждающих точек состоит из подмногообразия меньшей размерности, а множество предельных точек одно и то же и состоит из двух точек. Полученное в индуктивном пределе пространство (того же класса, что и $\mathbb{R}^\infty$, $\mathbb{T}^\infty$, $\mathbb{CP}^\infty$) является некомпактным неполным метрическим пространством. Полученные в индуктивном пределе динамические системы на этом пространстве — поток и каскад — обладают следующим интересным свойством: все их точки являются неблуждающими, но не являются предельными (кроме двух точек, которые можно выколоть — пространство при этом топологически не ухудшится и останется некомпактным неполным метрическим пространством).

Полученный таким образом пример позволяет положительно ответить на поставленный в книге [7] вопрос о существовании потоков без блуждающих и устойчивых по Пуассону траекторий, в частности, дает пример гладкого потока на неполном метрическом пространстве с центром

Биркгофа, не совпадающим с замыканием множества рекуррентных точек.

2. Предварительные сведения

2.1. **Множества траекторий.** Пусть X — топологическое пространство и $f : X \to X$ — гомеоморфизм.

Обозначим через $O_f(x)$ траекторию точки x под действием f, т.е. множество $\{f^n(x) |\ n \in \mathbb{Z}\}$. Пусть также

$$O_f^+(x) = \{f^n(x) |\ n \in \mathbb{Z}^+\} \quad \text{и} \quad O_f^-(x) = \{f^n(x) |\ n \in \mathbb{Z}^-\}$$

обозначают положительную и отрицательную полутраектории точки x соответственно.

2.1.1. *Множество неблуждающих точек динамической системы.*

Определение 2.1. *Точка $x \in X$ называется* ***неподвижной (фиксированной)*** *точкой f если $f(x) = x$. Множество всех неподвижных точек f обозначим через* $\mathrm{Fix}(f)$.

Определение 2.2. *Точка x называется* ***периодической*** *периода n для гомеоморфизма f, если*

$$f^n(x) = x$$

и

$$f^k(x) \neq x \qquad \text{для} \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Множество всех периодических точек f обозначается через $\mathrm{Per}(f)$.

Для каждой точки $x \in X$ определим ее *ω-предельное* $\omega_f(x)$ и *α-предельное* $\alpha_f(x)$ множества относительно f с помощью следующих формул:

$$\omega_f(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{+\infty} f^n(x)} \qquad \text{и} \qquad \alpha_f(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{+\infty} f^{-n}(x)}.$$

Другими словами, $y \in \omega_f(x)$ тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность $\{N_i\} \subset \mathbb{N}$, что

$$\lim_{i\to\infty} N_i = +\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{i\to\infty} f^{N_i}(x) = y.$$

Аналогично, $y \in \alpha_f(x)$ тогда и только тогда, для некоторой последовательности $\{N_i\} \subset \mathbb{N}$, такой, что

$$\lim_{i\to\infty} N_i = +\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{i\to\infty} f^{-N_i}(x) = y.$$

Ясно, что $\omega_f(x) = \alpha_{f^{-1}}(x)$.

Зачастую, когда понятно о каком гомеоморфизме идет речь, мы будем опускать индекс f и обозначать множества $\omega_f(x)$ и $\alpha_f(x)$ через $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ соответственно.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. *Множества $\alpha(x)$ и $\omega(x)$ — замкнуты, инвариантны относительно f и содержащиеся в замыкании $\overline{O_f(x)}$ орбиты точки x. В частности, если $y \in \omega(x)$, то*

$$\alpha(y) \cup \omega(y) \ \subset \ \overline{O_f(y)} \ \subset \ \omega(x).$$

Обозначим

$$\mathrm{Lim}_-(f) = \bigcup_{x\in M} \alpha(x), \qquad \mathrm{Lim}_+(f) = \bigcup_{x\in M} \omega(x),$$

$$\mathrm{Lim}(f) = \mathrm{Lim}_-(f) \,\cup\, \mathrm{Lim}_+(f).$$

Множество $\mathrm{Lim}(f)$ называется *предельным множеством* f.

Определение 2.3. *Точка x называется **рекуррентной** для гомеоморфизма f, если $x \in \alpha(x) \cup \omega(x)$.*

*Если $x \in \alpha(x)$ то мы будем называть эту точку α-**рекуррентной** или α-рекуррентной. Аналогично определяется ω-**рекуррентность**.*

Заметим, что возможен случай, когда $x \in \alpha(x) \cap \omega(x)$. Такая точка является одновременно α- и ω-рекуррентной.

Обозначим через $\mathrm{Rec}_+(f)$ и $\mathrm{Rec}_-(f)$ соответственно множества всех ω- и α-рекуррентных точек f. Их объединение

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}_+(f) \cup \mathrm{Rec}_-(f)$$

является множеством всех *рекуррентных* точек f. Очевидно, что

$$\mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f).$$

Следующее определение было дано Биркгофом в [8].

Определение 2.4. *Точка $x \in X$ называется* ***блуждающей*** *точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что*

$$f^m(U) \cap U = \varnothing \quad \text{для всех } m > 0.$$

Все остальные точки называют ***неблуждающими****. Таким образом, точка $x \in X$ является неблуждающей для f, если для любой ее окрестности V найдется такое целое число $m \in \mathbb{Z}$, что $f^m(V) \cap V \neq \varnothing$.*

Множество блуждающих точек f обозначим через $W(f)$. Поскольку каждая блуждающая точка входит в блуждающее множество вместе со своей окрестностью, то $W(f)$ открыто в X.

Множество неблуждающих точек f обозначается $\Omega(f)$. Оно замкнуто в X как дополнение к $W(f)$.

Так как периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, то множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

Пример 2.1. Всякая *изолированная* точка пространства X является либо периодической, либо блуждающей.

Лемма 2.2. *Если X хаусдорфово пространство, то число m в определении 2.4 неблуждающей точки можно выбрать сколь угодно большим по модулю.*

Доказательство. Пусть для некоторой окрестности V неблуждающей точки $x \in X$ найдется только конечное множество чисел $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ таких, что

$$f^{m_i}(V) \cap V \neq \varnothing.$$

Мы получим противоречие, показав, что тогда x неблужающая точка для f.

Отметим, что x не может быть периодической, так как если p — период x, то $x \in f^{pk}(V) \cap V \neq \varnothing$ для каждого $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Далее, так как X хаусдорфово, то точки

$$x,\ f^{m_1}(x),\ \ldots,\ f^{m_k}(x)$$

имеют попарно непересекающиеся окрестности

$$U_0, U_1, \ldots, U_k,$$

соответственно. Рассмотрим следующую окрестность

$$U = V \bigcap \bigcap_{i=0}^{k} f^{-m_i}(U_i)$$

точки x.

Мы утверждаем, что тогда $f^k(U) \cap U = \varnothing$ для всех $k \neq 0$. Действительно, если $k \notin \{m_1, \ldots, m_k\}$, то по предположению об окрестности V

$$f^k(U) \cap U \subset f^k(V) \cap V = \varnothing.$$

Если же $k = m_i$, то

$$f^{m_i}(U) \cap U \subset f^{m_i} f^{-m_i}(U_i) \cap U_0 = U_i \cap U_0 = \varnothing.$$

Следовательно, x — блуждающая точка для f. □

Отметим, что неблуждающее множество, в отличие от множества периодических точек, зависит от того, на каком пространстве действует динамическая система.

Утверждение 2.1. *Пусть* (Y, g) — *динамическая система и* Y_1 — *ее инвариантное подпространство. Положим* $g_1 = g|_{Y_1}$. *Тогда* $\Omega(g_1) \subseteq \Omega(g)$.

Доказательство. Утверждение следует из того, что для каждого $y \in Y_1$ все открытые окрестности точки y в пространстве Y_1 — это в точности пересечения открытых окрестностей точки y в пространстве Y с подпространством Y_1. □

Заметим, что f-инвариантного подпространства $A \subseteq X$ выполнено неравенство $\Omega(f|_A) \subseteq \Omega(f)$, но при этом множества $\Omega(f|_A)$ и $\Omega(f)$, вообще говоря, не обязаны совпадать, даже если $\Omega(f) \subseteq A$.

Это замечание приводит к понятию центра динамической системы, которое было введено Биркгофом в [8].

2.1.2. *Центр Биркгофа динамической системы.* Рассмотрим динамическую систему (X, f). Наивное определение ее центра Биркгофа состоит в том, чтобы максимально проитерировать конструкцию неблуждающего множества. Положим $\Omega_1(f) = \Omega(f)$ и по индукции определим

$$\Omega_{n+1}(f) = \Omega(f|_{\Omega_n(f)}).$$

Пересечение полученной последовательности вложенных друг в друга замкнутых инвариантных множеств

$$\Omega(f) = \Omega_1(f) \supset \Omega_2(f) \supset \cdots \supset \Omega_n(f) \supset \cdots$$

обозначим через $\Omega_\omega(f)$. Используя трансфинитную индукцию можно определить множества $\Omega_\lambda(f)$ для всех порядковых чисел λ. Тогда, согласно лемме Цорна, убывающая цепочка множеств $\{\Omega_\lambda(f)\}$ должна остановиться на некотором счетном ординале α, для которого

$$\Omega_\gamma(f) = \Omega(f|_{\Omega_\gamma(f)}).$$

Полученное замкнутое инвариантное множество и называется *центром* (*Биркгофа*). Будем обозначать его через $BC(f)$.

Опишем построение $BC(f)$ более детально.

База индукции. Положим $\Omega_1(f) = \Omega(f)$.

Шаг индукции. Пусть λ — некоторое порядковое число. Предположим, что множества $\Omega_\alpha(f)$ уже определены для всех ординалов $\alpha < \lambda$.

Для того, чтобы определить множество $\Omega_\lambda(f)$, рассмотрим два случая:

(i) λ имеет предшествующий элемент $(\lambda-1) < \lambda$ в классе Ξ всех ординалов. Это означает, что для любого $\beta \in \Xi$ либо $\beta \leq (\lambda - 1)$, либо $\beta \geq \lambda$.

Положим

$$\Omega_\lambda(f) = \Omega\left(f|_{\Omega_{\lambda-1}(f)}\right).$$

Тогда, в частности, имеем, что $\Omega_{n+1}(f) = \Omega\left(f|_{\Omega_n(f)}\right)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

(ii) λ не имеет непосредственно предшествующего ему порядкового числа. Тогда положим

$$\Omega_\lambda(f) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \Omega_\alpha(f)\ ,$$

в частности, $\Omega_\omega(f) = \cap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n(f)$.

Таким образом, мы получили набор замкнутых инвариантных подмножеств $\{\Omega_\lambda(f)\}_{\lambda\in\Xi}$ пространства X. При этом, по построению, соотношения

$$\Omega_\alpha(f) \supseteq \Omega_\beta(f) \quad \text{и} \quad \alpha \leq \beta$$

равносильны. Таким образом, порядок, индуцированный отношением включения на семействе множеств $\{\Omega_\lambda(f)\}$, является полным порядком.

Лемма 2.3. *Существует порядковое число γ такое, что*

$$\Omega_{\gamma+1}(f) = \Omega_\gamma(f)$$

(следовательно, и $\Omega_\alpha(f) = \Omega_\gamma(f)$ для всех $\alpha > \gamma$).

Доказательство. Заметим, что для каждого ординала λ существует порядковое число $(\lambda+1)$, следующее непосредственно за λ. Действительно, пусть $A_\lambda = \{\alpha \in \Xi \mid \alpha > \lambda\}$. Тогда A_λ вполне упорядочено и содержит наименьший элемент $\lambda + 1$. Поэтому для каждого ординала α либо $\alpha \le \lambda$, либо $\alpha \ge \lambda + 1$.

Предположим, что $\Omega_{\lambda+1}(f) \subsetneqq \Omega_\lambda(f)$ для всех $\lambda \in \Xi$.

Обозначим

$$B_\lambda = \Omega_\lambda(f) \setminus \Omega_{\lambda+1}(f), \qquad \lambda \in \Xi.$$

Тогда $B_\lambda \cap B_{\lambda'} = \varnothing$ для $\lambda \ne \lambda' \in \Xi$. Воспользуемся теоремой Цермело (см. [12, 13]) и выберем из каждого B_λ по точке $x_\lambda \in B_\lambda$, $\lambda \in \Xi$ (напомним, что $B_\lambda \in 2^X$ для всех $\lambda \in \Xi$). Множество всех $\xi < \alpha$, $\xi \in \Xi$, обозначим через $\Gamma(\alpha)$.

Тогда для каждого $\alpha \in \Xi$ получим инъективное отображение $\Phi_\alpha : \Gamma(\alpha) \to X$, заданное формулой: $\Phi_\alpha(\beta) = x_\beta$.

Пусть $\aleph_\mu$ — кардинальное число, соответствующее мощности множества X. По определению,

$$\aleph_\alpha = \mathrm{card}(\Gamma(\omega_\alpha)) \ ,$$

где ω_α — порядковое число, соответствующее предельному порядковому типу.

Напомним (см. [13]), что порядковый тип ξ вполне упорядоченного множества Z называется *предельным*, если он является наименьшим порядковым числом среди всех порядковых чисел, соответствующих всем возможным упорядочениям множества Z, превращающим его во вполне упорядоченное множество. (Предельные порядковые типы принято индексировать по возрастанию элементами Ξ.)

Таким образом получаем неравенство

$$\operatorname{card} X = \aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} = \operatorname{card}(\Gamma(\omega_{\mu+1})) \ ,$$

которое, очевидно, противоречит существованию инъективного отображения

$$\Phi_{\omega_{\mu+1}} : \Gamma(\omega_{\mu+1}) \to X \ .$$

Следовательно, найдется такое $\gamma \in \Xi$, что

$$B_\gamma = \Omega_\gamma(f) \setminus \Omega_{\gamma+1}(f) = \varnothing.$$

Но тогда $\Omega_\gamma(f) = \Omega_{\gamma+1}(f)$. □

Используя лемму, дадим следующее определение.

Определение 2.5. *Пусть $\gamma \in \Xi$ — наименьший ординал, удовлетворяющий утверждению леммы 2.3 (он существует, так как Ξ вполне упорядочено).*

Замкнутое инвариантное подмножество

$$BC(f) = \Omega_\gamma(f)$$

динамической системы (X, f) называется ее ***центром,*** *порядковое число γ называется* ***глубиной центра*** *динамической системы (X, f).*

Замечание 2.1. Применяя теорему Бэра – Хаусдорфа (см. [1]) для топологических пространств со счетной базой (в частности, для сепарабельных метрических пространств), легко показать, что глубина центра произвольной динамической системы с таким фазовым пространством является счетным трансфинитом.

Заметим, что множество рекуррентных точек всегда содержится в центре Биркгофа. Поэтому, если множество рекуррентных точек всюду плотно в неблуждающем множестве, то стабилизация наступает уже на первом шаге.

2.1.3. *Цепно-рекуррентные множества.* Такие множества являются своего рода метрическим аналогом неблуждающих множеств. Они введены Конли [9] для описания динамики типичных гомеоморфизмов и оказались удобным способом для описания динамики произвольных систем.

Определение 2.6. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение метрического пространства (X, d) в себя и $\varepsilon > 0$. Непустая конечная последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ из X называется ε-**цепью**, относительно f, если*

$$d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$$

для всех $i = 1, \ldots, n$.

Будем говорить, что такая ε-цепь *начинается* в x_0, *заканчивается* в x_n и имеет длину n.

Обозначим через $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ множество концов всевозможных ε-цепей с началом в x. Очевидно, что при $\varepsilon < \varepsilon'$ каждая ε-цепь от x к y также является ε'-цепью, поэтому $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f) \subseteq \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f)$ при $\varepsilon < \varepsilon'$. В действительности верно более сильное утверждение:

Лемма 2.4. *Каждое множество $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ открыто и*

$$\overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)} \subseteq \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f) \qquad \text{\it при} \qquad \varepsilon < \varepsilon'.$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ и

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}, y$$

— ε-цепь с началом в x и концом в y. Так как

$$d(f(x_{n-1}), y) < \varepsilon,$$

то $d(f(x_{n-1}), y) + \delta < \varepsilon$ для некоторого достаточно малого $\delta > 0$. Поэтому для произвольной точки y' из δ-окрестности точки y последовательность

$$x_0 = x, \ \ x_1, \ \ \ldots, \ \ x_{n-1}, \ \ y'$$

является ε-цепью от x к y', т.е. $y' \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$. Таким образом множество $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ содержит δ-окрестность точки y и поэтому оно открыто.

Предположим, что $y \in \overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)}$. Тогда найдется такая точка $y' \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$, что $d(y', y) < \varepsilon' - \varepsilon$. Пусть

$$x, \ \ x_1, \ \ \ldots, \ \ x_{n-1}, \ \ y'$$

произвольная ε-цепь с началом в x и концом в y'. Тогда

$$x, \ \ x_1, \ \ \ldots, \ \ x_{n-1}, \ \ y$$

является ε'-цепью между x и y. Действительно,

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon < \varepsilon'$$

и

$$d(f(x_{n-1}), y) < d(f(x_{n-1}), y') + d(y', y) < \varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon = \varepsilon'.$$

Следовательно, $y \in \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f)$. □

Обозначим

$$\mathcal{C}(x, f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{C}_\varepsilon(x, f).$$

Из леммы 2.4 вытекает, что $\mathcal{C}(x, f) = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)}$, а значит $\mathcal{C}(x, f)$ замкнуто в X.

Определение 2.7. *Точка $x \in X$ называется **цепно-рекуррентной** для f, если $x \in \mathcal{C}(x, f)$. Множество цепно-рекуррентных точек f обозначается через $\mathcal{C}(f)$.*

Несложно видеть, что каждая неблуждающая точка является цепно-рекуррентной, поэтому имеют место следующие включения:

$$\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{C}(f).$$

Лемма 2.5. *Если $f : X \to X$ равномерно непрерывный гомеоморфизм, то $\mathcal{C}(f)$ замкнуто и $\mathcal{C}(f^{-1}) \subset \mathcal{C}(f)$. В частности, если f^{-1} также равномерно непрерывен, то $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. (1) Вначале докажем, что

$$\mathcal{C}(f^{-1}) \subset \mathcal{C}(f).$$

Действительно, равномерная непрерывность f означает, что для произвольного $\omega > 0$ найдется такое $\delta(\omega) > 0$, что из $d(x,y) < \delta(\omega)$ вытекает, что $d(f(x), f(y)) < \omega$.

Пусть $x \in \mathcal{C}(f^{-1})$ и $\omega > 0$. Необходимо найти ω-цепь относительно f с началом и концом в x. По определению, существует $\delta(\omega)$-цепь относительно f^{-1} с началом и концом в x:

$$x = x_0,\ \ x_1,\ \ \ldots,\ \ x_{n-1},\ \ x_n = x,$$

т.е. $d(f^{-1}(x_i), x_{i+1}) < \delta(\omega)$. Но тогда

$$d(f \circ f^{-1}(x_i), f(x_{i+1})) \ =\ d(f(x_{i+1}), x_i) \ <\ \omega.$$

Таким образом, обратная последовательность

$$x = x_n,\ \ x_{n-1},\ \ \ldots,\ \ x_1,\ \ x_0 = x$$

является искомой ω-цепью относительно f.

(2) Покажем теперь, что $\mathcal{C}(f)$ замкнуто. Пусть x — предельная точка $\mathcal{C}(f)$ и $\varepsilon > 0$. Нужно построить ε-цепь относительно f с началом и концом в x.

Выберем произвольным образом три числа $\omega, \delta, \varepsilon' > 0$ так, чтобы

$$\omega + \varepsilon' < \varepsilon, \qquad \varepsilon' + \delta < \varepsilon, \qquad \delta < \delta(\omega),$$

где $\delta(\omega)$ — константа в определении равномерной непрерывности f.

Так как x предельная точка для $\mathcal{C}(f)$, то найдется точка $y \in \mathcal{C}(f)$ такая, что $d(x, y) < \delta$. Тогда $d(f(x), f(y)) < \omega$.

Так как y цепно-рекуррентна для f, то существует ε'-цепь

$$y,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ y$$

с началом и концом в точке $y \in X$ и $d(x, y) < \omega$. Мы утверждаем, что последовательность

$$x,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ x$$

является ε-цепью с началом и концом в x. Действительно

$$d(f(x), y_1) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), y_1) < \omega + \varepsilon' < \varepsilon,$$

$$d(f(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon' < \varepsilon, \text{ для } i = 1, \ldots, k-1,$$

$$d(f(y_k), x) \leq d(f(y_k), y) + d(y, x) < \varepsilon' + \delta < \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Следствие 2.1. *Пусть $f : X \to X$ — гомеоморфизм метрического компакта X. Тогда $\mathcal{C}(f)$ — замкнутое непустое множество, причем $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. Так как X компактно, то $\mathrm{Lim}(f)$, а значит и $\mathcal{C}(f)$, непусты. Замкнутость $\mathcal{C}(f)$ и равенство

$$\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$$

следует из равномерной непрерывности f и f^{-1} согласно лемме 2.5. □

2.2. **Неблуждающее множество корней гомеоморфизмов.** Заметим, что неблуждающее множество может измениться при переходе от гомеоморфизма к его степени. Покажем, что при таком переходе оно не увеличивается.

Лемма 2.6. *Пусть $g : X \to X$ — гомеоморфизм. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$\Omega(g^n) \subseteq \Omega(g).$$

Обратное включение, вообще говоря, не верно. Примеры итерационно неустойчивых неблуждающих множеств приведены, например, в [10]. Один из приведенных здесь примеров также будет обладать этим свойством.

В работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Предположим, что пространство X хаусдорфово. Тогда для каждого гомеоморфизма $g : X \to X$ и $n \geq 2$ множество $\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$ нигде не плотно в X.*

Было показано, что отсюда достаточно просто следует итерационная устойчивость центра Биркгофа.

Следствие 2.2. *Если $\Omega(g) = X$, то $\Omega(g^n) = \Omega(g) = X$ для всех $n \geq 2$.*

Доказательство. Так как $\Omega(g^n)$ замкнуто, то множество

$$\Omega(g) \setminus \Omega(g^n) = X \setminus \Omega(g^n)$$

открыто в X. Но по теореме 2.1 оно также нигде не плотно в X. Следовательно, $X \setminus \Omega(g^n) = \varnothing$, т.е. $\Omega(g^n) = X$. $\square$

Более слабая форма этого следствия была ранее опубликована в [15].

Для доказательства теоремы 2.1 была разработана теория K-зацепленных точек динамической системы. По сути, определение зацепленных точек является частным случаем определения точек, соединяемых для произвольно малого ε с помощью ε-цепей (см. определение 2.6), когда все сдвиги между траекториями, кроме двух, равны нулю. K-зацепленные точки также, по сути, являются некоторым специальным классом цепно-рекуррентных точек.

Напомним эти определения, поскольку они существенно понадобятся нам для построения и понимания приведенных здесь примеров.

Определение 2.8. *Скажем, что точка x* ***зацеплена*** *с точкой y под действием гомеоморфизма $g : X \to X$, если для любых сколь угодно малых окрестностей V_x и V_y точек x и y соответственно найдется сколь угодно большое по модулю число $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такое, что*

$$g^t\left(V_x\right) \cap V_y \neq \varnothing.$$

Другими словами, g-орбита любой окрестности точки x пересекается с любой окрестностью точки y.

Если при этом число t всегда можно выбрать положительным (отрицательным), то будем называть точку x ***ω-зацепленной (α-зацепленной)*** *с y.*

Пример 2.2. Неблуждающая точка зацеплена сама с собой.

Пример 2.3. Пусть g — диффеоморфизм Морса-Смейла многообразия M и x, y — две периодические точки g. Напомним, что каждая точка, принадлежащая пересечению неустойчивого многообразия $W^u(x)$ точки x и устойчивого многообразия $W^s(y)$ точки y, называется *гетероклинической*. Пусть $\gamma \in W^u(x) \cap W^s(y)$ — гетероклиническая точка. Тогда γ является ω-зацепленной со всеми точками неустойчивого многообразия $W^u(y)$ и α-зацепленной со всеми точками устойчивого многообразия $W^s(x)$.

Этот пример изображен на рис. 1а).

Лемма 2.7. *Предположим, что пространство X хаусдорфово, $g : X \to X$ — гомеоморфизм и пусть*

$$x \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n).$$

Тогда для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ точка x зацеплена с точкой $g^k(x)$ под действием g^n.

Замечание 2.2. Для зацепленности под действием g точек одной орбиты, например x и $g^k(x)$, достаточно требовать, чтобы для произвольной окрестности U точки x нашлось сколь угодно большое по модулю число N такое, что

$$U \cap g^{k-N}(U) \neq \varnothing.$$

2.3. K**-зацепленность.** Пусть $g : X \to X$ гомеоморфизм, $n \geq 2$ и $K = \{k_1, \ldots k_l\}$ — конечная последовательность чисел, таких, что каждое $k_i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Мы допускаем, что некоторые из k_i, возможно даже все, могут совпадать друг с другом.

Определение 2.9. *Скажем, что точка $x \in X$ — K-**зацеплена** под действием гомеоморфизма g^n, если для произвольно малой окрестности U точки x найдутся как угодно большие по модулю числа $N_1, \ldots, N_l \in \mathbb{Z}$ такие, что*

$$U \cap g^{k_1 - nN_1}(U) \cap g^{k_2 - nN_2}(U) \cap \cdots \cap g^{k_l - nN_l}(U) \neq \varnothing.$$

Замечание 2.3. Таким образом K-зацепленность точки x под действием g^n означает, что x "одновременно зацеплена" со всеми точками $g^{k_1}(x), \ldots, g^l(x)$, см. замечание 2.2. Так как числа N_i можно выбирать сколь угодно большими по модулю, то можно также считать, что если $k_i = k_j$ для некоторых $i \neq j$, то $N_i \neq N_j$ и, поэтому, $g^{k_i - nN_i}(U)$ и

$g^{k_j - nN_j}(U)$ представляют собой разные множества. Другими словами, зацепление точки x с точкой $g^{k_i}(x) = g^{k_j}(x)$ производится разными итерациями гомеоморфизма g^n.

Замечание 2.4. Если $0 \in K$, то x зацеплена под действием g^n с собой и, следовательно, является неблуждающей точкой для g^n, т.е. $x \in \Omega(g^n)$.

Лемма 2.8. *Пусть точка $x \in \mathrm{Int}\,[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)]$ — K-зацеплена под действием g^n, где*

$$K = \{k_1, \ldots, k_l\}$$

и каждое $k_i = 0, \ldots, n-1$. Тогда найдется такое

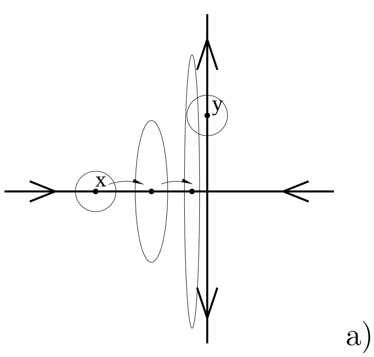
$$k' \in \{1, \ldots, n-1\},$$

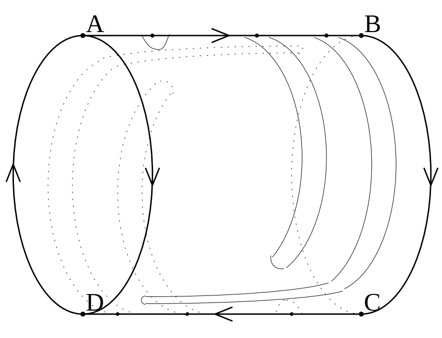
что x — также K'-зацеплена относительно g^n, где

$$K' = \{k_1, \ldots, k_l,\, k',\, k_1 + k',\, \ldots,\, k_l + k'\} \pmod n$$

и все суммы берутся по модулю n.

Подчеркнем, что в формулировке леммы $k' \neq 0 \pmod n$.





b)

Рис. 1. Примеры зацепленных точек.

На рис. 1b) изображен пример потока на сегменте цилиндра. В этом примере точки отрезка AB зацеплены с точками отрезка CD, и наоборот, точки отрезка CD зацеплены с точками отрезка AB. Появление такого цикла из зацепленных точек приводит к тому, что все точки сегмента являются циклически зацепленными.

Пример 2.4. *Если на рис. 1b) выбросить граничные окружности, то оставшаяся система на открытом цилиндре является простейшим примером потока, у которого нет неблуждающих точек, а все точки цепно-рекуррентны.*

Этот пример является ключом к пониманию дальнейших рассуждений, которые будут использоваться для построения основных примеров данной работы. Именно, из системы можно выделить две части, если разрезать ее по отрезкам AB и CD. Мы получим два диска, один из которых дает зацепление от AB к CD, другой — от CD к AB, см. рис. 2a). На каждом диске отрезки AB и CD зеркально повернуты друг относительно друга, а между ними траектории потока закручены специальным образом, чтобы зацеплять точки соответствующих отрезков. Строго структура потоков на этих дисков описывается с помощью так называемого косого произведение потоков относительно функции на декартовом произведении многообразий, которое вводится в разделе 4.2.

Теперь перекомпонуем эти диски таким образом, чтобы получить пример на другом многообразии. Склеивая диски на рис. 2a), получим большой диск, как на рис. 2b). Если еще дополнительно отождествить противоположные стороны, то получим систему на бутылке Клейна.

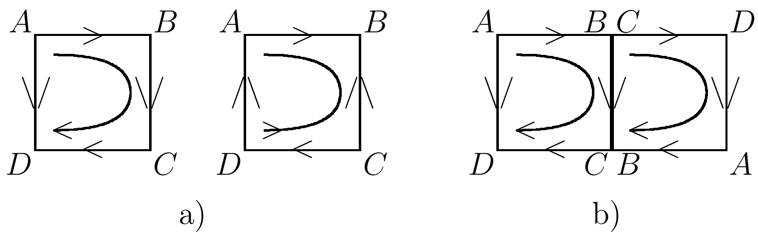


Рис. 2. К описанию примера на цилиндре.

Эту бутылку Клейна можно интерпретировать как результат операции умножения на отрезок с перекручиванием, примененный к окружности ABCD, с последующей склейкой противоположных сторон. (Далее в этой работе выражению "умножение на отрезок с перекручиванием" будет дан точный смысл). При этом цепно-рекуррентные точки окружности ABCD, бывшие ранее не зацепленными, становятся циклически зацепленными.

На рис. 3 изображен следующий шаг: бутылка Клейна умножается на отрезок с перекручиванием, и противоположные бутылки Клейна склеиваются в одну. При этом все точки бутылки Клейна становятся циклически зацепленными, а точки окружности ABCD становятся зацепленными сами с собой, то есть неблуждающими.

Если к полученному многообразию применить эту же конструкцию, то уже его точки станут циклически зацепленными, а все точки бутылки Клейна станут неблуждающими, и т. д. В основных примерах данной работы используется достаточно похожее построение, которое индуктивно продолжается бесконечности. Отличие только в том, что мы получаем неблуждающее множество уже на первом шаге.

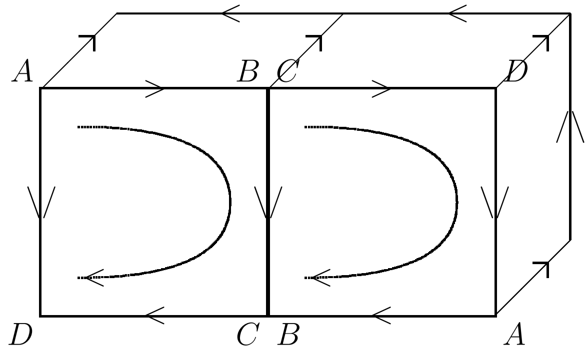


Рис. 3. Надстройка над бутылкой Клейна.

3. Построение примеров.

Наша цель — построить (неполное) метрическое пространство M и гомеоморфизм $F : M \to M$ такие, что $\Omega(F) = M$ и $\mathrm{Rec}(F) = \{a\}$, где $a \in M$ — единственная неподвижная точка динамической системы (M, F).

3.1. **Построение пространства** M**.** Построим сначала по индукции топологическое пространство M, на котором потом будет задана наша динамическая система.

Построение начнем с единичной окружности комплексной плоскости

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} .$$

Зададим на M_1 инволюцию

$$T_1(z) = \bar{z} = \Re(z) - \Im(z), \qquad z \in M_1.$$

Это отображение представляет собой зеркальное отражение окружности относительно вещественной оси. Иначе его можно записать еще и так:

$$T_1(\exp(i\varphi)) = \exp(-i\varphi) \ , \quad \varphi \in [0, 2\pi) \ .$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, на котором задана непрерывная инволюция $T_X : X \to X$.*

Пусть заданы вложение

$$\hat{j} : X \to X \times I \ , \quad \hat{j} : x \mapsto (x, 0) \ , \quad x \in X \ ,$$

и инволюция

$$\widehat{T} : X \times I \to X \times I \ , \quad \widehat{T} : (x, t) \mapsto (x, 1-t) \ , \quad (x, t) \in X \times I \ .$$

Пусть еще заданы разбиение

$$\mathfrak{f} = \bigcup_{\substack{x \in X \\ t \in (0,1)}} \{(x, t)\} \cup \bigcup_{x \in X} \{(x, 1), (T_X(x), 0)\}$$

пространства $X \times I$ и проекция на фактор-пространство

$$\widehat{\mathrm{pr}} : X \times I \to Y = (X \times I)/\mathfrak{f} \ .$$

Тогда корректно определено фактор-отображение

$$T_Y = \mathrm{fact}\, \widehat{T} : Y \to Y \ .$$

Это отображение является инволюцией на пространстве Y и удовлетворяет соотношению

$$T_Y \circ j = j \circ T_X : X \to Y \ , \tag{71}$$

где $j = \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j} : X \to Y$.

Отображение j является вложением. Пространство Y хаусдорфово и компактно.

Доказательство. Начнем с того, что отображение j является вложением. Действительно, образ вложения

$$\hat{j}(X) = X \times \{0\}$$

пересекается с каждым элементом разбиения $\mathfrak{f}$ не более чем в одной точке. Следовательно, отображение $\mathrm{pr}\,|_{\hat{j}(X)}$ инъективно, а вместе с ним инъективно и отображение j. Так как пространство X — компактно и хаусдорфово по условию (следовательно, и пространство $X \times I$ — хаусдорфово), то j является гомеоморфизмом на свой образ.

Проверим, что отображение $\widehat{T}$ сохраняет разбиение $\mathfrak{f}$.

a) Пусть $t \in (0,1)$. Тогда $\widehat{T}(x,t) = (x, 1-t) \in \mathfrak{f}$.

b) $\widehat{T}(\{(x,1), (T_X(x), 0)\}) = \{(x,0), (T_X(x), 1)\} =$
$= \{T_X((T_X(x)), 0), (T_X(x), 1)\} \in \mathfrak{f}$ (напомним, что $T_X \circ T_X = \mathrm{Id}_X$ по условию).

Значит, отображение $T_Y = \mathrm{fact}\,\widehat{T} : Y \to Y$ корректно определено и является инволюцией:

$$T_Y \circ T_Y = \mathrm{fact}(\widehat{T} \circ \widehat{T}) = \mathrm{fact}\,\mathrm{Id}_{X\times I} = \mathrm{Id}_Y\,.$$

Проверим равенство (71).

$$\begin{aligned}
T_Y \circ j(x) &= T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j}(x) = T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(x,0) = \\
&= T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(T_X^{-1}(x), 1) = T_Y \circ \widehat{\mathrm{pr}}(T_X(x), 1) = \\
&= \widehat{\mathrm{pr}} \circ \widehat{T}(T_X(x), 1) = \widehat{\mathrm{pr}}(T_X(x), 0) = \\
&= \widehat{\mathrm{pr}} \circ \hat{j} \circ T_X(x) = j \circ T_X(x)\,.
\end{aligned}$$

Пространство Y компактно как фактор-пространство компактного пространства $X \times I$. Хаусдорфовость пространства Y следует из того, что пространство X хаусдорфово и Y есть локально-тривиальное расслоение над окружностью со слоем X (это проверяется непосредственно). $\square$

Пусть для некоторого $n \geq 1$ уже построен компакт M_n, на котором задана инволюция T_n.

Обозначим через $\widehat{T}_{n+1} : M_n \times I \to M_n \times I$ инволюцию

$$\widehat{T}_{n+1}(y,t) = (y, 1-t) \ , \quad (y,t) \in M_n \times I \ .$$

Рассмотрим последовательность пространств и отображений

$$M_n \xrightarrow{\hat{j}_n} M_n \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}_{n+1}} M_{n+1} = (M_n \times I)/\mathfrak{f}_{n+1} \ . \tag{72}$$

Здесь $\hat{j}_n : y \mapsto (y,0)$, $y \in M_n$, — вложение. Разбиение $\mathfrak{f}_{n+1}$ задается соотношением

$$\mathfrak{f}_{n+1} = \bigcup_{\substack{x \in M_n \\ t \in (0,1)}} \{(x,t)\} \cup \bigcup_{x \in M_n} \{(x,1), (T_n(x), 0)\} \ , \tag{73}$$

а pr_{n+1} — отображение проекции.

Согласно предложению 3.1 отображение

$$j_n = \mathrm{pr}_{n+1} \circ \hat{j}_n : M_n \to M_{n+1}$$

является вложением, пространство M_{n+1} хаусдорфово и компактно, и на этом пространстве корректно определена инволюция

$$T_{n+1} = \mathrm{fact}\, \widehat{T}_{n+1}$$

такая, что $T_{n+1} \circ j_n = j_n \circ T_n$.

Следовательно, по индукции получаем цепочку пространств и отображений, все пространства в ней компактные и Хаусдорфовы, а все отображения — вложения:

$$S^1 = M_1 \xrightarrow{j_1} M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{j_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots \ . \tag{74}$$

Кроме того, для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "j_n"'] \arrow[d, "T_n"'] & M_{n+1} \arrow[d, "T_{n+1}"] \\ M_n \arrow[r, "j_n"'] & M_{n+1} \end{tikzcd} \tag{75}$$

Обозначим

$$M = \varinjlim(M_n, j_n)\ .$$

3.2. **Построение потока f пространства M.** Напомним, что *потоком* (или *однопараметрической группой автоморфизмов*) на топологическом пространстве X называется непрерывное отображение

$$f : X \times \mathbb{R} \to X,$$

удовлетворяющее свойствам

(i) $f(\cdot, 0) = \mathrm{Id}_X : X \to X$;
(ii) $f(f(\cdot, t), \tau) = f(\cdot, t+\tau) : X \to X$ для любых $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Наша цель построить
построим по индукции семейство потоков

$$f_n : M_n \times \mathbb{R} \to M_n, \quad n \in \mathbb{N}\ ,$$

потребуем, чтобы семейство $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяло следующим требованиям:

(1′) $j_{n-1} \circ f_{n-1} = f_n \circ (j_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$, если $n > 1$;
(2′) $\mathrm{Fix}(f_n) = \mathrm{Rec}(f_n) = \{a_n\}$, $a_n = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a)$;
(3′) при $n > 1$ для каждого $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$ и для любой открытой окрестности $U = U(x)$ точки x в M_n найдется $T = T(U) > 0$ такое, что $f_n(U, t) \cap U \neq \varnothing$ для всех $t > T$;

(4′) $T_n \circ f_n = f_n^- \circ (T_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$, $f_n^-(x,t) = f_n(x,-t)$, $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$;

(5′) $T_n(O_{f_n}(x)) = O_{f_n}(x)$ для каждого $x \in M_n$.

Заметим, что свойство (3′) можно переформулировать в таком виде:

(3″) $j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq \Omega(F_n)$, если $n > 1$.

3.2.1. *База индукции. Поток f_1 на пространстве M_1.* Наша цель — построить на пространстве M_1 поток f_1, который бы удовлетворял требованиям (2′), (4′) и (5′), которые сформулированы выше.

Начнем построение с потока $h : I \times \mathbb{R} \to I$,

(76)
$$h(x,t) = \begin{cases} 0 \,, & x = 0 \,; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\pi(x - \dfrac{1}{2}))) \,, & x \in (0,1) \,; \\ 1 \,, & x = 1 \,. \end{cases}$$

То, что h задает непрерывное действие аддитивной группы $\mathbb{R}$ на отрезке, проверяется непосредственно. Простая проверка показывает также, что

(77) $$h(x,t) + h(1-x,-t) = 1 \,.$$

Динамика потока h очень простая: концы отрезка являются положениями равновесия, интервал $(0,1) = O_h(1/2)$ является траекторией, выходящей из 0 и входящей в 1.

Обозначим $\hat{f}_1 = h : I \times \mathbb{R} \to I$.

Очевидно, что пространство M_1 можно представить как фактор-пространство $M_1 = I/\mathfrak{f}_1$, где

$$\mathfrak{f}_1 = \{0,1\} \cup \bigcup_{x \in (0,1)} \{x\} \,.$$

Пусть $\mathrm{pr}_1 : I \to I/\mathfrak{f}_1 = M_1$ — отображение проекции.

Рассмотрим разбиение

$$\tilde{\mathfrak{f}}_1 = \bigcup_{\substack{x\in(0,1)\\ t\in\mathbb{R}}} \{x,t\} \cup \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{(0,t),(1,t)\}$$

пространства $I\times\mathbb{R}$. Легко видеть, что отображение $\hat{f}_1$ переводит элементы разбиения $\tilde{\mathfrak{f}}_1$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_1$, поэтому определено непрерывное фактор-отображение

$$\operatorname{fact}\hat{f}_1 = f_1 : (I\times\mathbb{R})/\tilde{\mathfrak{f}}_1 \to I/\mathfrak{f}_1 \ .$$

Воспользуемся здесь следующим полезным утверждением о произведении проекций. Доказательство этого утверждения приведено в разделе 4.1.

Утверждение (Утверждение 4.1)**.** *Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, $\mathfrak{f}$ — разбиение пространства X на компактные подмножества, $\mathfrak{i}$ — разбиение пространства Y на одноточечные подмножества.*

Пусть проекция $\mathrm{pr}_X : X\to X/\mathfrak{f}$ является замкнутым отображением.

Пусть, кроме того, разбиение $\tilde{\mathfrak{f}}$ пространства $X\times Y$ является произведением разбиений $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{i}$.

Тогда отображение

$$\pi = \mathrm{pr}_X \times Id_Y : X\times Y \to X/\mathfrak{f}\times Y$$

факторно, и следовательно, пространства $(X\times Y)/\tilde{\mathfrak{f}}$ и $X/\mathfrak{f}\times Y$ канонически гомеоморфны.

Очевидно, разбиение $\tilde{\mathfrak{f}}_1$ является произведением разбиения $\mathfrak{f}_1$ и разбиения $\mathfrak{i}$ пространства $\mathbb{R}$ на одноточечные множества. Так как пространство I хаусдорфово и компактно, а пространства $I/\mathfrak{f}_1\cong S^1$ и $\mathbb{R}$ хаусдорфовы, то мы находимся в условиях предложения 4.1 (см. также замечание 4.1) и можно считать, что отображение f_1 задано на пространстве $I/\mathfrak{f}_1 \times \mathbb{R} = M_1 \times \mathbb{R}$. Пусть

$$\pi = \mathrm{pr}_1 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : I \times \mathbb{R} \to M_1 \times \mathbb{R}$$

— проекция (см. предложение 4.1). Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\hat{f}_1} & I \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ M_1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow[f_1]{} & M_1 \end{array}$$

Используя эту диаграмму, для любых $x \in M_1$ и t, $\tau \in \mathbb{R}$ получим соотношения:

$$\begin{aligned} f_1(x,0) &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,0)) = \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),0) = \\ &= \mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x)) = x \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(f_1(x,t),\tau) &= f_1(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,t)),\tau) = \\ &= f_1(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau) = \\ &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau)) = \\ &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t),\tau) = \\ &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\mathrm{pr}_1^{-1}(x),t+\tau) = \\ &= \mathrm{pr}_1 \circ \hat{f}_1(\pi^{-1}(x,t+\tau)) = \\ &= f_1(x,t+\tau) \ . \end{aligned}$$

Следовательно, отображение f_1 задает непрерывный поток на M_1.

Представим M_1 как единичную окружность в комплексной плоскости

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \ .$$

Отображение проекции принимает вид

$$\mathrm{pr}_1(x) = \exp(2\pi i x) \ , \quad x \in [0, 1] \ .$$

Ясно, что в таком представлении

$$f_1(\exp(2\pi i x), t) = \exp(2\pi i h(x, t)) \ , \quad x \in I \ .$$

Далее, учитывая соотношения (77), получаем

$$\begin{aligned} T_1 \circ f_1(\exp(2\pi i x), t) &= T_1 \circ \exp(2\pi i h(x, t)) = \\ &= \exp(2\pi i (1 - h(x, t))) = \\ &= \exp(2\pi i h(1 - x, -t)) = \\ &= f_1^-(\exp(2\pi i (1 - x)), t) = \\ &= f_1^- \circ (T_1 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\exp(2\pi i x), t) \ . \end{aligned}$$

Здесь $f_1^-(z, t) = f_1(z, -t)$, $(z, t) \in M_1 \times \mathbb{R}$. Поэтому требование $(4')$ для M_1 выполнено.

Обозначим $a = \mathrm{pr}_1(0) = \exp(0)$. Тогда M_1 состоит из неподвижной точки, $\mathrm{Fix}(f_1) = \{a\}$, и блуждающей траектории

$$\{\exp(2\pi i x) \mid x \in (0, 1)\} = O_{f_1}(\exp(\pi i)),$$

которая выходит из точки a и входит в эту же точку с другой стороны. Значит, требование $(2')$ для M_1 выполнено.

Динамическая система (M_1, f_1) состоит всего из двух траекторий, мощности которых как множеств различны (одна равна 1, другая — *continuum*). Так как инволюция T_1 переводит траектории динамической системы (M_1, f_1) в траектории (это немедленно следует из свойства $(4')$), то свойство $(5')$ выполнено.

3.2.2. *Вспомогательное построение.* Для дальнейших построений нам понадобится конструкция “косого произведения” потоков, которая детально рассматривается отдельно в разделе 4.2. Именно, пусть X и Y — топологические пространства, $f : X \times \mathbb{R} \to X$ и $h : Y \times \mathbb{R} \to Y$ — потоки на X и Y соответственно. Пусть $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ и $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ — проекции.

В разделе 4.2 вводится отображение

$$\hat{f} : X \times Y \times \mathbb{R} \to X \times Y$$

потоков f и h (“косое произведения” потоков f и h), которое задает поток на $X \times Y$ и удовлетворяет таким свойствам.

(1) движение точки $(x, y) \in X \times Y$ под действием $\hat{f}$ проектируется в движение точки $y = \mathrm{pr}_Y(x, y)$ под действием потока h, т. е. выполняется равенство $\mathrm{pr}_Y \circ \hat{f} = h \circ (\mathrm{pr}_Y \times Id_{\mathbb{R}}) : X \times Y \times \mathbb{R} \to Y$;

(2) траектории потока $\hat{f}$ проектируются в траектории потока f, т. е. выполняется включение $\mathrm{pr}_X(O_{\hat{f}}(x, y)) \subseteq O_f(\mathrm{pr}_X(x, y)) = O_f(x)$;

(3) φ не зависит от выбора x, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\varphi(x_1, y, t) = \varphi(x_2, y, t),$$

где через $\varphi(x, y, t)$ обозначена такая величина, что

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x, y, t) = f(x, \varphi(x, y, t))$$

(эта величина корректно определена в силу предыдущего требования).

3.2.3. *Шаг индукции. Поток f_n на пространстве M_n.* Будем считать, что на пространстве M_{n-1} уже задан непрерывный поток (M_{n-1}, f_{n-1}), удовлетворяющий требованиям $(1')$–$(5')$.

Рассмотрим пространство $(M_{n-1}) \times I$ и функцию

$$\alpha : I \to \mathbb{R}\ ,$$
$$\alpha(y) = 1 - 2y\ , \quad y \in I\ .$$

Воспользуемся леммой 4.1 и построим по динамическим системам (M_{n-1}, f_{n-1}), (I, h) (см. равенство 76) и функции α поток

$$\widehat{f}_n : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_{n-1} \times I,$$

$$\widehat{f}_n(x,y,t) = \left(f_{n-1}\left(x, \int\limits_0^t (1-2h(y,s)ds) \right),\ h(y,t) \right) =$$

$$= \left(f_{n-1}\left(x, t - 2\int\limits_0^t h(y,s)ds \right),\ h(y,t) \right), \tag{78}$$

$$(x,y,t) \in M_{n-1} \times I \times \mathbb{R}\ .$$

Так как 0 и 1 — неподвижные точки динамической системы (I, h), то

$$\widehat{f}_n(x,0,t) = (f_{n-1}(x,t), 0)\ , \tag{79}$$

$$\widehat{f}_n(x,1,t) = (f_{n-1}(x,-t), 1) = (f^{-}_{n-1}(x,t), 1)\ .$$

Напомним (см. раздел 3.1), что $M_n = (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n$ и разбиение $\mathfrak{f}_n$ задается при помощи формулы (73). Кроме того (см. предложение 4.1 и замечание 4.1), имеется канонический гомеоморфизм

$$\Psi : (M_{n-1} \times I \times \mathbb{R})/(\mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_{\mathbb{R}}) \to (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n \times \mathbb{R} = M_n \times \mathbb{R}.$$

Здесь $\mathfrak{i}_{\mathbb{R}}$ — разбиение прямой $\mathbb{R}$ на одноточечные множества.

Рассмотрим проекции

$$\widehat{\pi}_n : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to (M_{n-1} \times I \times \mathbb{R})/(\mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_{\mathbb{R}}),$$

$$\pi_n = \Psi \circ \widehat{\pi}_n : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_n \times \mathbb{R},$$

$$\mathrm{pr}_n : M_{n-1} \times I \to (M_{n-1} \times I)/\mathfrak{f}_n = M_n.$$

Проверим, что отображение $\widehat{f}_n$ переводит элементы разбиения $\operatorname{zer} \pi_n = \mathfrak{f}_n \times \mathfrak{i}_{\mathbb{R}}$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_n$. Для этого нам достаточно проверить, что для любых $x \in M_{n-1}$ и

$t \in \mathbb{R}$ пара точек $\{\,(x,1,t)\,,\,(T_{n-1}(x),0,t)\,\}$ переходит под действием $\widehat{f_n}$ в какой-нибудь элемент разбиения $\mathfrak{f}_n$ (инволюция T_{n-1} определена в разделе 3.1).

Справедливы равенства (см. соотношения 79)

$$\begin{aligned}\widehat{f_n}(T_{n-1}(x),0,t) &= (f_{n-1}(T_{n-1}(x),t),0) = \\ &= (T_{n-1}\circ T_{n-1}\circ f_{n-1}(T_{n-1}(x),t),0) = \\ &= (T_{n-1}(T_{n-1}\circ f_{n-1}(T_{n-1}(x),t)),0)\ .\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что T_{n-1} — инволюция ($T_{n-1}^2 = \mathrm{Id}$). Обозначим $x' = T_{n-1}(x)$, очевидно

$$x = T_{n-1}\circ T_{n-1}(x) = T_{n-1}(x').$$

Тогда

$$\widehat{f_n}(T_{n-1}(x),0,t) = (T_{n-1}(T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t)),0)\ .$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\widehat{f_n}(x,1,t) &= (f_{n-1}(x,-t),1) = (f_{n-1}^-(x,t),1) = \\ &= (f_{n-1}^-(T_{n-1}(x'),t),1) = (T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t),1)\ .\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из условия ($4'$). Обозначим $\widehat{x} = T_{n-1}\circ f_{n-1}(x',t)$. Тогда

$$\widehat{f_n}(T_{n-1}(x),0,t) = (T_{n-1}(\widehat{x}),0)\ ,$$
$$\widehat{f_n}(x,1,t) = (\widehat{x},1)\ .$$

Из произвольности выбора точек $x \in M_{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$ заключаем, что отображение $\widehat{f_n}$ переводит элементы разбиения $\operatorname{zer}\pi_n$ в элементы разбиения $\mathfrak{f}_n$, следовательно, корректно определено непрерывное фактор-отображение

$$f_n : M_n \times \mathbb{R} \to M_n\ ,$$

которое замыкает коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
M_n \times I \times \mathbb{R} \arrow[r, "\widehat{f}_n"] \arrow[d, "\pi_n"'] & M_n \times I \arrow[d, "\mathrm{pr}_n"] \\
M_n \times \mathbb{R} \arrow[r, "f_n"] & M_n
\end{tikzcd}
\tag{80}
$$

Утверждение 3.2. *Для каждого* $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$ *справедливо соотношение*

$$\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = f_n(x,t) \ .$$

Доказательство. Из предложения 4.1 вытекает, что

$$\pi_n = \mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \ , \tag{81}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = f_n \circ \pi_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t) = \\ = f_n(\mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)), t) = f_n(x,t)\end{aligned}$$

для любого $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$. □

Применяя это утверждение, установим групповые свойства отображения f_n. Пусть $x \in M_n$. Тогда

$$f_n(x,0) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), 0) = \mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)) = x \ ,$$

значит, $f_n(\cdot, 0) = \mathrm{Id} : M_n \to M_n$.

Пусть, кроме того, $t, \tau \in \mathbb{R}$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
f_n(f_n(x,t),\tau) &= f_n(\mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t), \tau) \\
&= \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t), \tau) \\
&= \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x), t+\tau) = f_n(x, t+\tau).
\end{aligned}$$

Итак, из того, что $\widehat{f}_n$ является потоком, следует, что f_n является непрерывным потоком с фазовым пространством M_n.

Проверим, что поток (M_n, f_n) удовлетворяет свойствам $(1')$ – $(5')$ (см. начало раздела 3.2).

Для проверки требования $(1')$ покажем сначала, что

$$\widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1} = \widehat{f}_n \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ . \tag{82}$$

Напомним, что отображение $\widehat{j}_{n-1} : M_{n-1} \to M_{n-1} \times I$ задается формулой $\widehat{j}_{n-1}(y) = (y, 0)$, $y \in M_{n-1}$ (см. раздел 3.1).

Пусть $y \in M_{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1}(y,t) = (f_{n-1}(y,t), 0) \ .$$

С другой стороны, из соотношения (79) получим

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(y,t) = \widehat{f}_n(y,0,t) = \\ = (f_{n-1}(y,t), 0) = \widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1}(y,t) \ . \end{aligned}$$

Вспомним теперь, что по определению $j_{n-1} = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1}$. Это вместе с формулой (82) приводит нас к цепочке равенств

$$\begin{aligned} j_{n-1} \circ f_{n-1} &= \mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1} \circ f_{n-1} = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = \\ &= f_n \circ (\mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \circ (\widehat{j}_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = \\ &= f_n \circ ((\mathrm{pr}_n \circ \widehat{j}_{n-1}) \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = f_n \circ (j_{n-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ . \end{aligned}$$

И значит, f_n удовлетворяет требованию $(1')$.

Приступим к проверке свойства $(2')$.

Согласно предложению 3.1 пространство M_{n-1} — компакт, и отображение $j_{n-1} : M_{n-1} \to M_n$ — вложение. Из этого замечания и свойства $(1')$ заключаем, что $j_{n-1}(M_{n-1})$ — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (M_n, f_n), и потоки (M_{n-1}, f_{n-1}) и

$(j_{n-1}(M_{n-1}), f_n|_{j_{n-1}(M_{n-1})})$ топологически сопряжены. Поэтому для каждой точки $x \in M_{n-1}$ справедливо следующее утверждение: α-предельное (ω-предельное) множество точки $j_{n-1}(x)$ относительно потока f_n совпадает с образом α-предельного (ω-предельного) множества точки x относительно потока f_{n-1} под действием j_{n-1}. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{Rec} f_n \cap j_{n-1}(M_{n-1}) = j_{n-1}(\mathrm{Rec} f_{n-1}) = \\ = j_{n-1}(j_{n-2} \circ \ldots \circ j_1(a)) = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a) \ . \end{aligned}$$

Для завершения проверки на выполнимость свойства $(2')$ докажем, что каждая точка множества

$$U_n = M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$$

является блуждающей точкой потока (M_n, f_n).

Мы уже установили, что U_n — открытое подмножество пространства M_n.

По построению, $j_{n-1}(M_{n-1}) = \mathrm{pr}_n(M_{n-1} \times \{0\})$, поэтому $\mathrm{pr}_n^{-1}(j_{n-1}(M_{n-1})) = M_n \times \{0, 1\}$ и

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(U_n) = \mathrm{pr}_n^{-1}(M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})) = M_{n-1} \times (0, 1) = \widehat{U}_n \ .$$

Заметим, что проекция pr_n взаимно-однозначно отображает открытое подмножество $\widehat{U}_n$ пространства $M_{n-1} \times I$ на открытое подмножество U_n пространства M_n. Так как, по определению отображения проекции, открытые множества в образе — это в точности те множества, полный прообраз которых открыт, то отображение

$$\widehat{\mathrm{pr}}_n = \mathrm{pr}_n|_{\widehat{U}_n} : \widehat{U}_n \to U_n$$

открыто и является гомеоморфизмом.

Пусть $x \in U_n$, $\widehat{x} = \mathrm{pr}_n^{-1}(x) \in \widehat{U}_n$. Тогда

$$\widehat{x} = (y, \tau), \qquad y \in M_{n-1}, \qquad \tau \in (0, 1).$$

Фиксируем $a, b \in (0,1)$ так, чтобы

$$0 < a < \tau < b < 1 \ .$$

Множество $\widehat{V}_{a,b} = M_{n-1} \times (a,b)$ является открытой окрестностью точки $\widehat{x}$ в пространстве $M_{n-1} \times I$.

Найдем теперь такое $T > 0$, чтобы

$$\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times (0,a)$$

при всех $t < -T$ и

$$\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times (b,1)$$

— при всех $t > T$.

Пусть $\mathrm{pr}_I : M_{n-1} \times I \to I$ — проекция на второй сомножитель. Тогда по построению

$$\mathrm{pr}_I \circ \widehat{f}_n = h \circ (\mathrm{pr}_I \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to I$$

(см. лемму 4.1). Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b}, t) \subseteq M_{n-1} \times h((a,b),t)$ и нам достаточно найти такое $T > 0$, что $h((a,b),t) \subseteq (0,a)$ при любом $t < -T$, и $h((a,b),t) \subseteq (b,1)$ для всех $t > T$.

Найдем сначала такое $t_\alpha \in \mathbb{R}$, что $h(b, t_\alpha) < a$.

Предположим, что

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(t_\alpha + \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2}))) = h(b, t_\alpha) < a \ ,$$

то есть

$$\operatorname{arctg}(t_\alpha + \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2}))) < \pi(a - \tfrac{1}{2}) \ .$$

Так как по условию $a \in (0,1)$, то обе части неравенства лежат в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. В этом интервале функция tg определена и монотонно возрастает. Поэтому последнее неравенство равносильно такому:

$$t_\alpha + \operatorname{tg}(\pi(b - \tfrac{1}{2})) < \operatorname{tg}(\pi(a - \tfrac{1}{2})) \ .$$

Значит, неравенство $h(b,t_\alpha) < a$ эквивалентно следующему:

$$t_\alpha < \left[\operatorname{tg}(\pi(a-\tfrac{1}{2})) - \operatorname{tg}(\pi(b-\tfrac{1}{2}))\right] \ .$$

Аналогично устанавливается эквивалентность неравенств $b < h(a,t_\omega)$ и

$$\left[\operatorname{tg}(\pi(b-\tfrac{1}{2})) - \operatorname{tg}(\pi(a-\tfrac{1}{2}))\right] < t_\omega \ .$$

Заметим, что функция $h(\cdot,t) : I \to I$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ монотонно возрастает. Поэтому,

$$h((a,b),t) \subseteq (0,a), \qquad \text{если } t < -T,$$

и

$$h((a,b),t) \subseteq (b,1), \qquad \text{если } t > T,$$

где

$$T = \left|\operatorname{tg}(\pi(b-\tfrac{1}{2})) - \operatorname{tg}(\pi(a-\tfrac{1}{2}))\right| \ .$$

Из этого вытекает, что $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b},t) \cap \widehat{V}_{a,b} = \varnothing$, если $t \notin [-T,T]$.

Множество $\widehat{U}_n$ является инвариантным подмножеством потока $\widehat{f}_n$, поэтому $\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b},t) \subseteq \widehat{U}_n$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Обозначим $V_{a,b} = \mathrm{pr}_n(\widehat{V}_{a,b})$. Тогда множество $V_{a,b}$ является открытой окрестностью точки $x = \mathrm{pr}_n(\widehat{x})$, так как отображение $\widehat{\mathrm{pr}}_n = \mathrm{pr}_n|_{\widehat{U}_n}$ открыто (см. выше); кроме того, для каждого $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f_n(V_{a,b},t) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b},t).$$

Напомним, что отображение $\mathrm{pr}_n|_{\widehat{U}_n}$ взаимно-однозначно, поэтому

$$f_n(V_{a,b},t) \cap V_{a,b} = \mathrm{pr}_n(\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b},t)) \cap \mathrm{pr}_n(\widehat{V}_{a,b}) = \\ = \mathrm{pr}_n(\widehat{f}_n(\widehat{V}_{a,b},t) \cap \widehat{V}_{a,b}) = \varnothing$$

при $t \notin [-T,T]$ и точка x является блуждающей точкой потока (M_n, f_n).

Из произвольности выбора точки $x \in M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$ заключаем, что $M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq W(f_n)$, и требование ($2'$) выполнено.

Приступим к проверке требования ($3'$).

Заметим сначала, что если свойство ($3'$) выполняется в какой-нибудь точке $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$, то этому свойству удовлетворяют и все точки траектории $O_{f_n}(x) \subseteq j_{n-1}(M_{n-1})$. Действительно, пусть $x' \in O_{f_n}(x)$. Тогда $x' = f_n(x, \tau)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Пусть $V' \ni x'$ — открытая окрестность точки x'. Тогда $V = f_n(V', -\tau)$ — открытая окрестность точки x (напомним, что из определения потока следует, что отображение $f_n(\cdot, t) : M_n \to M_n$ является гомеоморфизмом при каждом $t \in \mathbb{R}$). Существует $T = T(V) > 0$ такое, что $f_n(V, t) \cap V \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Значит,

$$f_n(V', t) \cap V' = f_n(f_n(V, \tau), t) \cap f_n(V, \tau) = \\ f_n(V, \tau + t) \cap f_n(V, \tau) = f_n(f_n(V, t), \tau) \cap f_n(V, \tau) \supseteq \\ \supseteq f_n(f_n(V, t) \cap V, \tau) \neq \varnothing$$

при $t > T$.

Докажем, что каждая траектория потока (M_{n-1}, f_{n-1}) содержит неподвижную точку инволюции T_{n-1}. Действительно, пусть $x \in M_{n-1}$. Из свойства ($5'$) для потока (M_{n-1}, f_{n-1}) вытекает, что $T_{n-1}(x) = f_{n-1}(x, \tau)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Обозначим $x' = f_{n-1}(x, \tau/2)$. Воспользуемся свойством ($4'$) для потока (M_{n-1}, f_{n-1}), и тогда получим следующие равенства:

$$T_{n-1}(x') = T_{n-1} \circ f_{n-1}(x, \tau/2) = f_{n-1}(T_{n-1}(x), -\tau/2) = \\ = f_{n-1}(f_{n-1}(x, \tau), -\tau/2) = f_{n-1}(x, \tau/2) = x' .$$

Итак, из свойства ($1'$) (которое мы уже проверили) и из сказанного выше следует, что нам достаточно установить свойство $(3')$ только для тех точек из $j_{n-1}(M_{n-1})$, которые являются образами под действием j_{n-1} неподвижных точек инволюции T_{n-1}.

Пусть $x_0 \in j_{n-1}(M_{n-1})$, $z_0 = j_{n-1}^{-1}(x_0) \in M_{n-1}$ и пусть $T_{n-1}(z_0) = z_0$. Тогда

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0) = \{(T_{n-1}(z_0), 0), (z_0, 1)\} = \\ = \{(z_0, 0), (z_0, 1)\} \subseteq M_{n-1} \times I \ .$$

Чтобы проверить справедливость свойства $(3')$ в точке x_0, нам достаточно доказать, что для каждой окрестности W множества $\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0)$ в $M_{n-1} \times I$ существует $T = T(W)$ такое, что $\widehat{f}_n(W, t) \cap W \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Действительно, если мы это установим, то отсюда будет вытекать, что для любой окрестности V точки $x_0 \in M_n$ найдется $T > 0$ такое, что $\mathrm{pr}_n^{-1}(V) \cap \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V), t) \neq \varnothing$ для любого $t > T$. Следовательно (см. соотношения (80) и (81)),

$$f_n(V, t) \cap V = f_n(\mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V)), t) \cap V = \\ = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V), t) \cap \mathrm{pr}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V)) \supseteq \\ \supseteq \mathrm{pr}_n \left[\widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(V), t) \cap \mathrm{pr}_n^{-1}(V) \right] \neq \varnothing$$

для всех $t > T$.

Докажем, что для множества $\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0)$ в $M_{n-1} \times I$ выполняется свойство $(3')$. Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.1. *Пусть* $(x, y) \in M_{n-1} \times (0, 1)$. *Тогда за время*

$$\tau = 2\,\mathrm{tg}(\pi(1/2 - y)) \tag{83}$$

точка (x, y) *сместится под действием потока* $\widehat{f}_n$ *в точку* $(x, 1 - y)$, *то есть*

$$\widehat{f}_n((x, y), \tau) = (x, 1 - y) \ . \tag{84}$$

Доказательство. Как показывает формула (78), соотношение (84) справедливо, если одновременно выполняются два следующих равенства:

$$h(y,\tau) = 1 - y \,, \tag{85}$$

$$\int\limits_0^\tau (1 - 2h(y,s))ds = 0 \,. \tag{86}$$

Простая непосредственная проверка показывает, что формула (83) дает решение уравнения

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\tau + \operatorname{tg}(\pi(y - \tfrac{1}{2}))) = 1 - y \,,$$

которое эквивалентно уравнению (85), так как по условию леммы $y \in (0,1)$.

Покажем, что полученное решение удовлетворяет равенству (86).

Сначала заметим, что согласно равенству (77)

$$1 - y = h(y,\tau) = 1 - h(1-y,-\tau) \,,$$

поэтому $h(1-y,-\tau) = y$. Далее,

$$h(y,\tau - s) = 1 - h(1-y,-\tau + s) = \\ = 1 - h(h(1-y,-\tau),s) = 1 - h(y,s)$$

для каждого $s \in \mathbb{R}$. Значит

$$\int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y,s))ds = \int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2 + 2h(y,\tau - s))ds =$$

$$= -\int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y,\tau - s))ds =$$

$$= -\int\limits_{\tau/2}^{\tau} (1 - 2h(y,u))d(\tau - u) = -\int\limits_{0}^{\tau/2} (1 - 2h(y,u))du \,.$$

Здесь осуществлена замена параметра $u = \tau - s$.

Окончательно,

$$\int\limits_0^{\tau}(1-2h(y,s))ds =$$

$$= \int\limits_0^{\tau/2}(1-2h(y,s))ds + \int\limits_{\tau/2}^{\tau}(1-2h(y,s))ds =$$

$$= \int\limits_0^{\tau/2}(1-2h(y,s))ds - \int\limits_0^{\tau/2}(1-2h(y,u))du = 0 \ .$$

Лемма полностью доказана. □

Итак, пусть W — открытая окрестность множества

$$\mathrm{pr}_n^{-1}(x_0) = \{(z_0,0),(z_0,1)\}$$

в пространстве $M_{n-1} \times I$.

Так как произведения открытых множеств составляют базу топологии пространства-произведения, то найдутся такие $\delta > 0$ и открытое $V \subseteq M_{n-1}$, что

$$V \times ([0,\delta) \cup (1-\delta, 1]) \subseteq W.$$

Для нас здесь важно то, что

$$\{z_0\} \times ((0,\delta) \cup (1-\delta,1)) \subseteq W \ .$$

Далее мы будем считать, что $\delta < 1/2$.

Рассмотрим функцию

$$\xi : \mathbb{R} \to I \ ,$$

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\tfrac{t}{2} \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \tag{87}$$

Функция ξ непрерывна, монотонно убывает и $\xi(t) \to +0$ при $t \to +\infty$.

Легко видеть, что эта функция подобрана так (см. лемму 3.1 выше), чтобы для каждого $t \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство

$$\widehat{f_n}((z, \xi(t)), t) = (z, 1 - \xi(t)) \ , \quad z \in M_{n-1} \ .$$

Пусть $T = 2\,\mathrm{tg}(\pi(1/2 - \delta))$. Тогда $\xi(T) = \delta$. Так как функция ξ монотонно убывает, то для каждого $t > T$ выполняется неравенство $\xi(t) \in (0, \delta)$. Следовательно,

$$\widehat{f_n}((z_0, \xi(t)), t) = (z_0, 1 - \xi(t)) \in \{z_0\} \times (1 - \delta, 1) \subseteq W \ ,$$

и $\widehat{f_n}(W, t) \cap W \neq \varnothing$.

В силу произвольности выбора окрестности W, свойство $(3')$ выполняется в точке x_0.

Таким образом, доказано, что поток (M_n, f_n) удовлетворяет свойству $(3')$.

Пусть

$$\widehat{f_n^-} : M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \to M_{n-1} \times I \ ,$$
$$\widehat{f_n^-}(z, y, t) = \widehat{f_n}(z, y, -t) \ , \quad (z, y, t) \in M_{n-1} \times I \times \mathbb{R} \ .$$

Перед тем, как доказывать, что свойство $(4')$ выполнено, проверим равенство

$$\widehat{T_n} \circ \widehat{f_n} = \widehat{f_n^-} \circ (\widehat{T_n} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \ .$$

Действительно, производя замену параметра $u = -s$, получаем

$$\int_0^{-t} (1 - 2h(1 - y, s))ds = \int_0^{-t} (1 - 2h(1 - y, -u))d(-u) =$$
$$= -\int_0^{t} (1 - 2h(1 - y, -u))du = -\int_0^{t} (1 - 2 + 2h(y, u))du =$$
$$= \int_0^{t} (1 - 2h(y, u))du$$

для всех $y \in I$ и $t \in \mathbb{R}$. Это следует из равенства (77).

Пусть теперь $z \in M_{n-1}$, $y \in I$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{T}_n \circ \widehat{f}_n(z,y,t) = \widehat{T}_n \left(f_{n-1}\left(z, \int\limits_0^t (1-2h(y,s))ds \right), h(y,t) \right) =$$
$$= \left(f_{n-1}\left(z, \int\limits_0^t (1-2h(y,s))ds \right), 1-h(y,t) \right) =$$
$$= \left(f_{n-1}\left(z, \int\limits_0^{-t} (1-2h(1-y,s))ds \right), h(1-y,-t) \right) =$$
$$= \widehat{f}_n(z,1-y,-t) = \widehat{f}_n^-(z,1-y,t) =$$
$$= \widehat{f}_n^- \circ (\widehat{T}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(z,y,t)\ .$$

Пусть, наконец, $x \in M_n$ и $t \in \mathbb{R}$. Используя коммутативную диаграмму (80) и следующее за ней утверждение 3.2, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}
T_n \circ f_n(x,t) &= T_n \circ \mathrm{pr}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x),t) \\
&= pr_n \circ \widehat{T}_n \circ \widehat{f}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x),t) \\
&= pr_n \circ \widehat{f}_n^- \circ (\widehat{T}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\mathrm{pr}_n^{-1}(x),t) \\
&= pr_n \circ \widehat{f}_n(\widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)),-t) \\
&= f_n \circ (\mathrm{pr}_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(\widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)),-t) \\
&= f_n(\mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(pr_n^{-1}(x)),-t) \\
&= f_n(T_n(x),-t) \\
&= f_n^- \circ (T_n \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(x,t).
\end{aligned}$$

Из произвольности выбора точки $(x,t) \in M_n \times \mathbb{R}$ заключаем, что свойство $(4')$ выполнено.

Приступим к проверке свойства $(5')$ для потока (M_n, f_n).

Пусть сначала $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$. Из свойства $(1')$ заключаем, что

$$O_{f_n}(x) = j_{n-1}\left(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))\right) \ .$$

Используем коммутативную диаграмму 75 и тот факт, что свойство $(5')$ справедливо для потока (M_{n-1}, f_{n-1}), и получаем цепочку равенств

$$\begin{gathered} T_n(O_{f_n}(x)) = T_n \circ j_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = \\ = j_{n-1} \circ T_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = \\ = j_{n-1}(O_{f_{n-1}}(j_{n-1}^{-1}(x))) = O_{f_n}(x) \ . \end{gathered}$$

Пусть теперь $x \in M_n \setminus j_{n-1}(M_{n-1})$. Тогда $\mathrm{pr}_n^{-1}(x) = (z, y)$ для некоторых $z \in M_{n-1}$ и $y \in (0, 1)$. Как следует из свойства $(4')$, которое мы уже проверили, потоки (M_n, f_n) и (M_n, f_n^-) топологически сопряжены посредством инволюции T_n. Эти потоки имеют одинаковые траектории, поэтому инволюция T_n отображает траектории потока f_n на целые траектории этого же потока. Таким образом, для завершения доказательства нам осталось только проверить, что $T_n(x) \in O_{f_n}(x)$.

Из леммы 3.1 вытекает, что

$$(z, 1-y) = \widehat{T}_n(z, y) \in O_{\widehat{f}_n}(z, y) \ .$$

Однако из формул (80) и (81) следует, что поток (M_n, f_n) является фактор-системой потока $(M_{n-1} \times I, \widehat{f}_n)$, поэтому

$$O_{f_n}(x) = O_{f_n}(\mathrm{pr}_n(z, y)) = \mathrm{pr}_n\left(O_{\widehat{f}_n}(z, y)\right).$$

И значит,

$$\begin{aligned} T_n(x) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)) = \mathrm{pr}_n \circ \widehat{T}_n(z, y) = \\ = \mathrm{pr}_n(z, 1-y) \ \in \ \mathrm{pr}_n(O_{\widehat{f}_n}(z, y)) = O_{f_n}(x) \ . \end{aligned}$$

Таким образом, полностью доказана справедливость свойства $(5')$ для потока (M_n, f_n).

3.2.4. *Поток f пространства M.* Далее будем рассматривать пространство M как объединение подпространств M_n, $n \in \mathbb{N}$. В частности, в последующих выкладках будем опускать отображения вложения j_n, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность потоков, построенная в предыдущем подразделе. Из свойства $(1')$ (см. начало раздела 3.2) следует, что отображение

$$f = \varinjlim f_n : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R} \ ,$$
$$f(x) = f_n(x) \ , \quad \text{если } x \in M_n \ ,$$

определено корректно. Непрерывность отображений f и f^{-1} следует непосредственно из их определения. И так как все отображения f_n являются потоками, то и f — поток.

Итак, мы построили поток f пространства M.

Найдем теперь множество неблуждающих точек динамической системы (M, f).

Пусть $x \in M_n$. Тогда $x \in \Omega(f_{n+1})$ согласно условию $(3'')$. Следовательно, $x \in \Omega(f)$ (см. утверждение 2.1). Так как по определению для любого $x \in M$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in M_n$, то $M = \Omega(f)$.

Подсчитаем теперь множество рекуррентных точек динамической системы (M, f).

Пусть $x \in M_n$. По построению M_n — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (M, f), поэтому$\overline{O_f(x)} = \overline{O_{f_n}(x)} \subseteq M_n$, и точка x является α-рекуррентной (ω-рекуррентной) точкой динамической системы (M, f) тогда и только тогда, когда она лежит в множестве α-рекуррентных (ω-рекуррентных) точек динамической системы $(M_n, f_n) = (M_n, f|_{M_n})$.

Из свойства ($2'$) теперь следует, что если $x \in \mathrm{Rec}(f)$, то $x = a$.

Итак построен пример динамической системы (M, f) на бесконечномерном неполном пространстве M. Она удовлетворяет одновременно следующим свойствам:

(i) $M = \Omega(f)$;
(ii) $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Per}(f) = \{a\}$.

Пример 3.1. *Выбрасывая из пространства M неподвижную точку a потока (M, f), получим новое бесконечномерное неполное пространство M' и поток (M', f') на нем, у которого все траектории неблуждающие, но множество предельных, а тем более рекуррентных точек пусто.*

Получаем искомый пример.

3.3. **Построение каскада F на пространстве M.** Построим теперь пример 3.1 для динамической системы с дискретным временем на M (каскада).

В качестве искомого примера можно было бы взять отображение последования $F = f(\,\cdot\,, 1) : M \to M$ потока f из предыдущего примера. Однако мы слегка усложним этот пример, чтобы он дополнительно обладал свойством, невозможным для потоков, именно, чтобы последовательность каскадов имела итерационно неустойчивое неблуждающее множество.

Начнем построение.

3.3.1. *Последовательность* $\{F_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Наша цель построить последовательность автоморфизмов

$$F_n : M_n \to M_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

которые бы удовлетворяли некоторому дискретному аналогу требований $(1')$–$(5')$ для последовательности потоков (см. начало раздела 3.2).

Таким образом, по индукции построено семейство потоков (M_n, f_n), $n \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют требованиям $(1')$–$(5')$.

Возьмем единичные сдвиги вдоль траекторий этих потоков

$$F_n = f_n(\,\cdot\,, 1) : M_n \to M_n \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Так как все f_n — непрерывные потоки, то все отображения F_n являются гомеоморфизмами ($F_n^{-1} = f_n(\cdot\,, -1)$, $n \in \mathbb{N}$).

Убедимся, что для всех $n \in \mathbb{N}$ отображения F_n удовлетворяют требованиям

(1°) $j_{n-1} \circ F_{n-1} = F_n \circ j_{n-1}$, если $n > 1$;

(2°) существует точка $a \in M_1$, такая что

$$\{a_n\} = \mathrm{Rec}(F_n) = \mathrm{Fix}(F_n), \qquad a_n = j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a);$$

(3°) $j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq \Omega(F_n)$, если $n > 1$.

Доказательство.

(1°) Пусть $n > 1$ и $x \in M_{n-1}$. Тогда из свойства $(1')$ получаем

$$\begin{aligned} j_{n-1} \circ F_{n-1}(x) &= j_{n-1} \circ f_{n-1}(x, 1) = \\ &= f_n(j_{n-1}(x), 1) = F_n \circ j_{n-1}(x) \ , \end{aligned}$$

и так как x — произвольная точка, то свойство (1°) выполнено.

(2°) Заметим, что для любого $x \in M_n$ имеет место неравенство

$$O_{F_n}(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f_n(x, k) \subseteq O_{f_n}(x) \ ,$$

поэтому $\alpha_{F_n}(x) \subseteq \alpha_{f_n}(x)$ и $\omega_{F_n}(x) \subseteq \omega_{f_n}(x)$. Отсюда немедленно следует, что

$$\mathrm{Rec}(F_n) \subseteq \mathrm{Rec}(f_n)\ .$$

С другой стороны, так как M_n — компактное хаусдорфово топологическое пространство, то по теореме Биркгофа динамическая система (M_n, F_n) имеет по крайней мере одно непустое минимальное множество. Следовательно, $\mathrm{Rec}(F_n) \neq \varnothing$.

Так как согласно свойству $(2')$ мощность $\mathrm{Rec}(f_n)$ равна единице, то

$$\mathrm{Rec}(F_n) = \mathrm{Rec}(f_n) = \{a_n\} = \{j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1(a)\}\ .$$

Кроме того, очевидно, что

$$\{a_n\} = \mathrm{Fix}(f_n) \subseteq \mathrm{Fix}(F_n) \subseteq \mathrm{Rec}(F_n),$$

поэтому $\mathrm{Fix}(F_n) = \{a_n\}$.

(3°) Пусть $n > 1$ и $x \in j_{n-1}(M_{n-1})$. Пусть $U \subseteq M_n$ — открытая окрестность точки x. Согласно свойству $(3')$ существует $T > 0$ такое, что $f_n(U,t) \cap U \neq \varnothing$ для всех $t > T$. Найдем $N > T$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$F_n^k(U) \cap U = f_n(U,k) \cap U \neq \varnothing$$

для каждого $k > N$ и $x \in \Omega(F_n)$, так как окрестность $U \ni x$ выбрана произвольно.

Значит, $j_{n-1}(M_{n-1}) \subseteq \Omega(F_n)$. □

3.3.2. *Автоморфизм F пространства M.* Будем рассматривать пространство M как объединение подпространств M_n, $n \in \mathbb{N}$. В частности, в последующих выкладках будем опускать отображения вложения j_n, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{F_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность автоморфизмов, построенная в предыдущем подразделе. Из свойства

(1°) (см. начало раздела 3.3.1) следует, что отображение

$$F = \varinjlim F_n : M \to M \ ,$$
$$F(x) = F_n(x) \ , \quad \text{если } x \in M_n \ ,$$

определено корректно. И так как все отображения F_n обратимы, то и F — обратимое отображение . Обратное отображение задается формулой

$$F^{-1} = \varinjlim F_n^{-1} : M \to M \ ,$$
$$F^{-1}(x) = F_n^{-1}(x) \ , \quad \text{если } x \in M_n \ .$$

Непрерывность отображений F и F^{-1} следует непосредственно из их определения.

Итак, мы построили автоморфизм F пространства M.

Найдем теперь множество неблуждающих точек динамической системы (M, F).

Пусть $x \in M_n$. Тогда $x \in \Omega(F_{n+1})$ согласно условию (3°). Следовательно, $x \in \Omega(F)$ (см. утверждение 2.1). Так как по определению для любого $x \in M$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in M_n$, то $M = \Omega(F)$.

Подсчитаем теперь множество рекуррентных точек динамической системы (M, F).

Пусть $x \in M_n$. По построению M_n — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (M, F), поэтому $\overline{O_F(x)} = \overline{O_{F_n}(x)} \subseteq M_n$, и точка x является α-рекуррентной (ω-рекуррентной) точкой динамической системы (M, F) тогда и только тогда, когда она лежит в множестве α-рекуррентных (ω-рекуррентных) точек динамической системы $(M_n, F_n) = (M_n, F|_{M_n})$.

Из свойства (2°) теперь следует, что если $x \in \mathrm{Rec}(F)$, то $x = a$.

Итак построен пример динамической системы (M, F) на бесконечномерном неполном пространстве M. Она удовлетворяет одновременно следующим свойствам:

(i) $M = \Omega(F)$;
(ii) $\mathrm{Rec}(F) = \mathrm{Per}(F) = \{pt\}$.

4. Дополнения.

4.1. **Одно полезное утверждение о произведении проекций.**

Утверждение 4.1. *Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, $\mathfrak{f}$ — разбиение пространства X на компактные подмножества, $\mathfrak{i}$ — разбиение пространства Y на одноточечные подмножества.*

Пусть проекция $\mathrm{pr}_X : X \to X/\mathfrak{f}$ является замкнутым отображением.

Пусть, кроме того, разбиение $\tilde{\mathfrak{f}}$ пространства $X \times Y$ является произведением разбиений $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{i}$.

Тогда отображение

$$\pi = \mathrm{pr}_X \times Id_Y : X \times Y \to X/\mathfrak{f} \times Y$$

факторно, и следовательно, пространства $(X \times Y)/\tilde{\mathfrak{f}}$ и $X/\mathfrak{f} \times Y$ канонически гомеоморфны.

Для доказательства этого предложения нам будет нужен ряд приведенных ниже определений и результатов (см. [5]).

Определение 4.1 (см. [6])**.** *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологического пространства X в пространство Y. Если его взаимно-однозначный фактор*

$$\mathrm{fact}\, f : X/\operatorname{zer} f \to Y$$

является гомеоморфизмом, то f называется факторным *($\operatorname{zer} f$ — разбиение пространства X, элементами которого являются прообразы точек пространства Y под действием отображения f).*

Равносильно можно сказать, что отображение f факторно*, если $f(X) = Y$ и для произвольного подмножества $B \subseteq Y$ его прообраз $f^{-1}(B)$ открыт в X тогда и только тогда, когда само множество B открыто в Y.*

Определение 4.2. *Разбиение $\mathfrak{f}$ топологического пространства X называется* непрерывным*, если и только если для каждого F из $\mathfrak{f}$ и любого открытого множества U, содержащего F, существует такое открытое множество V, что $F \subseteq V \subseteq U$ и V — объединение некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{f}$.*

Теорема 4.1 (Александров, Хопф)**.** *Разбиение $\mathfrak{f}$ топологического пространства X непрерывно тогда и только тогда, когда проектирование $\mathrm{pr} : X \to X/\mathfrak{f}$ замкнуто.*

Теорема 4.2 (Уоллес)**.** *Пусть X и Y — топологические пространства, A и B — компактные подмножества из X и Y соответственно. Пусть, далее, W — произвольная окрестность множества $A \times B$ в произведении $X \times Y$.*

Тогда найдутся такие окрестности U и V множеств A и B соответственно, что $U \times V \subseteq W$.

Доказательство предложения 4.1. Пусть

$$B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y, \qquad B' = \pi^{-1}(B) \subseteq X \times Y.$$

Если B открыто, то и B' открыто, так как отображение π, очевидно, непрерывно.

Обратно, предположим, что множество B' открыто в $X \times Y$.

Пусть $\widetilde{\mathrm{pr}}_1 : X/\mathfrak{f} \times Y \to X/\mathfrak{f}$ — проекция на первый сомножитель. Очевидно,

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{y\in Y} (B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) = \\ &= \bigcup_{y\in Y} \left[\widetilde{\mathrm{pr}}_1(B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) \times \{y\}\right] = \bigcup_{y\in Y} B_y \times \{y\}\,. \end{aligned}$$

Мы здесь обозначили $B_y = \widetilde{\mathrm{pr}}_1(B \cap (X/\mathfrak{f} \times \{y\})) \subseteq X/\mathfrak{f}$, $y \in Y$.

Пусть еще $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ — проекция на первый сомножитель. Аналогично предыдущему, обозначим

$$B'_y = \mathrm{pr}_1(B' \cap (X \times \{y\})) \subseteq X, \qquad y \in Y.$$

Тогда

$$B' = \bigcup_{y\in Y} B'_y \times \{y\}\,.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} B' &= \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{y\in Y} B_y \times \{y\}\right) = \\ &= \bigcup_{y\in Y} \pi^{-1}(B_y \times \{y\}) = \bigcup_{y\in Y} \mathrm{pr}_X^{-1}(B_y) \times \{y\}\,, \end{aligned}$$

поэтому $B'_y = \mathrm{pr}_X^{-1}(B_y)$ для каждого $y \in Y$. Заметим, кроме того, что для любого $y \in Y$ множество B'_y открыто в X, так как B' открыто по условию и отображение $in_y : X \to X \times Y$, $in_y(x) = (x, y)$, $x \in X$, является вложением при любом фиксированном $y \in Y$.

Пусть $(x_0, y_0) \in B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y$. Тогда для компактных подмножеств $\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \subseteq X$ и $\{y_0\} \in Y$ найдутся согласно теореме 4.2 открытые окрестности $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$, для

которых
$$\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \times \{y_0\} \subseteq U \times V \subseteq B'.$$
Далее, по теореме 4.1 для элемента $\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0)$ разбиения $\mathfrak{f}$ и открытого множества U найдется *насыщенное* (являющееся объединением некоторого семейства элементов разбиения $\mathfrak{f}$) открытое множество W' такое, что
$$\mathrm{pr}_X^{-1}(x_0) \subseteq W' \subseteq U.$$
Очевидно, $W' = \mathrm{pr}_X^{-1}(W)$ для некоторого подмножества $W \subseteq X/\mathfrak{f}$, содержащего точку x_0. По определению фактортопологии, так как множество W' открыто в X, то и W открыто в $X/\mathfrak{f}$.

Легко видеть, что
$$W' \times V = \pi^{-1}(W \times V),$$
а множество $W \times V$ является открытой окрестностью точки (x_0, y_0). Кроме того, по построению $W' \times V \subseteq B'$, следовательно $W \times V \subseteq B$ и точка (x_0, y_0) — внутренняя для B.

Из произвольности выбора точки $(x_0, y_0) \in B$ следует, что B открыто в $X/\mathfrak{f} \times Y$.

Теперь из произвольности выбора множества
$$B \subseteq X/\mathfrak{f} \times Y$$
и его прообраза $B' = \pi^{-1}(B)$ следует, что отображение π факторно. □

Замечание 4.1. *Легко видеть, что если пространство X компактно и хаусдорфово, а фактор-пространство $X/\mathfrak{f}$ хаусдорфово, то все элементы разбиения $\mathfrak{f}$ компактны а отображение проекции $\mathrm{pr}_X : X \to X/\mathfrak{f}$ замкнуто.*

Таким образом, в этом случае для любого хаусдорфового пространства Y выполнены условия предложения 4.1.

4.2. **Косое произведение потоков относительно функции на декартовом произведении многообразий.** Пусть X и Y — топологические пространства,

$$f : X \times \mathbb{R} \to X \qquad \text{и} \qquad h : Y \times \mathbb{R} \to Y$$

— потоки на X и Y соответственно.

Наша цель — построить "косое произведение"

$$\hat{f} : X \times Y \times \mathbb{R} \to X \times Y$$

потоков f и h, которое удовлетворяло бы таким свойствам.

Пусть $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ и $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ — проекции. Мы хотим,

(0) чтобы отображение $\hat{f}$ задавало поток на $X \times Y$;

(1) чтобы движение точки $(x, y) \in X \times Y$ под действием $\hat{f}$ проектировалось в движение точки $y = \mathrm{pr}_Y(x, y)$ под действием потока h, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\mathrm{pr}_Y \circ \hat{f} = h \circ (\mathrm{pr}_Y \times Id_{\mathbb{R}}) : X \times Y \times \mathbb{R} \to Y;$$

(2) чтобы траектории потока $\hat{f}$ проектировались в траектории потока f, т. е. чтобы выполнялось включение

$$\mathrm{pr}_X(O_{\hat{f}}(x, y)) \subseteq O_f(\mathrm{pr}_X(x, y)) = O_f(x);$$

(3) чтобы φ не зависела от выбора x, т. е. чтобы для любых $x_1,\ x_2 \in X,\ y \in Y$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство

$$\varphi(x_1, y, t) = \varphi(x_2, y, t),$$

где через $\varphi(x, y, t)$ обозначена такая величина, что

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x, y, t) = f(x, \varphi(x, y, t))$$

(эта величина корректно определена в силу предыдущего требования).

Приведем наводящие соображения, которые позволяют нам "угадать" поток $\hat{f}$.

Предположим, что X и Y — "хорошие" пространства (например, конечномерные многообразия) и потоки f и h — гладкие. Тогда определены векторные поля $\{\vec{u}(x)\}_{x\in X}$ и $\{\vec{v}(y)\}_{y\in Y}$ на соответствующих касательных пространствах такие, что траектории потоков f и h являются интегральными для этих векторных полей.

Допустим, определён поток $\hat{f}$ на пространстве $X \times Y$, удовлетворяющий требованиям (1)–(3) и найдено соответствующее ему поле скоростей $\{\vec{w}(x,y)\}_{(x,y)\in X\times Y}$.

В силу требований (1) и (2) в каждой точке $(x,y) \in X \times Y$ должны выполняться равенства

$$\vec{w}(x,y) = \alpha(x,y)\vec{u}(x) + \vec{v}(y)$$

(коэффициент при $\vec{v}$ всегда равен единице). Из требования (3) следует, что коэффициент α не зависит от x, и значит,

$$\alpha : Y \to \mathbb{R} \tag{88}$$

есть некоторая функция от y, и

$$\vec{w}(x,y) = \alpha(y)\vec{u}(x) + \vec{v}(y)\ . \tag{89}$$

Пусть мы стартуем из точки (x_0, y_0) и хотим найти в какой точке траектории $O_f(x_0)$ окажется в момент времени t проекция образа нашей начальной точки $\mathrm{pr}_x \circ \hat{f}(x_0, y_0, t)$.

Если бы функция α была константой, можно было бы написать

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x_0, y_0, t) = f(x_0, \alpha t) = f\left(x_0, \int\limits_0^t \alpha \cdot 1\, ds\right).$$

Однако в произвольный момент времени s параметр α равен $\alpha(y(s)) = \alpha \circ h(y_0, s)$, поэтому

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(x_0, y_0, t) = f\left(x_0, \int\limits_0^t \alpha \circ h(y_0, s)\, ds\right).$$

Пусть теперь поток $\hat{f}$ не задан. Фиксируем "хорошую" интегрируемую функцию (88) и построим векторное поле (89), интегральные траектории которого задает поток

$$\begin{gathered} \hat{f} : X \times Y \times \mathbb{R} \to X \times Y\,, \\ \hat{f}(x, y, t) = \left(f\left(x, \int\limits_0^t \alpha \circ h(y, s)\, ds\right),\ h(y, t)\right)\,. \end{gathered} \tag{90}$$

Лемма 4.1. *Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства, f и h — непрерывные потоки на X и Y, соответственно.*

Пусть $\alpha : Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция.

Тогда формула (90) задает непрерывный поток $\hat{f}$ на $X \times Y$, удовлетворяющий требованиям (1)–(3).

Доказательство. Нужно показать, что отображение $\hat{f}$ задает действие аддитивной группы вещественных чисел на пространстве $X \times Y$. Действительно, во-первых,

$$\hat{f}(x, y, 0) = (f(x, 0), h(y, 0)) = (x, y)\,,$$

и во-вторых

$$\hat{f}(\hat{f}(x,y,t),\tau) = \hat{f}\left(f\left(x, \int_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t)\ ,\ \tau\right) =$$

$$= \left(f\left(f\left(x, \int_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds\right),\ \int_0^\tau \alpha\circ h(h(y,t),\rho)\,d\rho\right),\ h(h(y,t),\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds + \int_0^\tau \alpha\circ h(y,t+\rho)\,d\rho\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds + \int_t^{t+\tau} \alpha\circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \left(f\left(x, \int_0^{t+\tau} \alpha\circ h(y,s)\,ds\right),\ h(y,t+\tau)\right) =$$

$$= \hat{f}(x,y,t+\tau)$$

для любых $x\in X$, $y\in Y$ и t, $\tau\in\mathbb{R}$.

В этой цепочке равенств мы воспользовались следующими обстоятельствами:

- f и h — потоки, т. е. для всех

  $$x\in X,\qquad y\in Y,\qquad t,\tau\in\mathbb{R}$$

  выполняются равенства

$$f(x,t+\tau) = f(f(x,t),\tau) \qquad \text{и} \qquad h(y,t+\tau) = h(h(y,t),\tau).$$

- Функция $\alpha\circ h(y,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывна для любого фиксированного $y\in Y$, так как является композицией непрерывных отображений (напомним, что отображение α непрерывно по условию). Следовательно, интеграл

  $$\int_0^t \alpha\circ h(y,s)\,ds$$

  существует при любых $y\in Y$ и $t\in\mathbb{R}$.

- После замены $s = t + \rho$ получаем

$$\int_0^\tau \alpha\circ h(y, t+\rho)\, d\rho = \int_0^\tau \alpha\circ h(y, t+\rho)\, d(t+\rho) = \int_t^{t+\tau} \alpha\circ h(y, s)\, ds.$$

Заметим, что справедливость требований (1)–(3) вытекает непосредственно из формулы (90).

При каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ отображение

$$\hat{f}_t = \hat{f}(\cdot, \cdot, t) : X \times Y \to X \times Y$$

является биекцией. Действительно, как показано выше, существует обратное отображение $(\hat{f}_t)^{-1} = \hat{f}_{-t}$. Таким образом, для завершения доказательства нам остается проверить непрерывность отображения $\hat{f}$.

Предположим сначала, что отображение

$$\begin{gathered} \varphi : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \\ \varphi : (y, t) \mapsto \int\limits_0^t \alpha \circ h(y, s)\, ds\ , \quad (y, t) \in Y \times \mathbb{R}\ , \end{gathered} \tag{91}$$

непрерывно.

Пусть $Q \subseteq X \times Y$ — открытое множество, содержащее точку $\hat{f}(x, y, t)$. Найдем открытые множества $Q_X \subseteq X$ и $Q_Y \subseteq Y$ такие, что

$$\hat{f}(x, y, t) = (f(x, \varphi(y, t)), h(y, t)) \ \in\ Q_X \times Q_Y \subseteq Q.$$

Так как отображение h непрерывно, найдутся открытые множества $V_1 \subseteq Y$ и $W_1 \subseteq \mathbb{R}$ такие, что

$$(y, t) \in V_1 \times W_1 \subseteq Y \times \mathbb{R} \qquad \text{и} \qquad h(V_1 \times W_1) \subseteq Q_Y.$$

Аналогично, найдутся открытые множества $U \subseteq X$ и $W_2 \subseteq \mathbb{R}$, для которых

$$(x, \varphi(y, t)) \in U \times W_2 \subseteq X \times \mathbb{R} \qquad \text{и} \qquad f(U \times W_2) \subseteq Q_X.$$

Наконец, найдем открытые множества $V_2 \subseteq Y$ и $W_3 \subseteq \mathbb{R}$ такие, что

$$(y, t) \in V_2 \times W_3 \qquad \text{и} \qquad \varphi(V_2 \times W_3) \subseteq W_2.$$

Обозначим $V = V_1 \cap V_2 \subseteq Y$ и $W = W_1 \cap W_3 \subseteq \mathbb{R}$. Заметим, что V и W — непустые открытые множества, так как $y \in V$ и $t \in W$ по построению. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
\hat{f}(U \times V \times W) &= f(U, \varphi(V \times W)) \times h(V \times W) \subseteq \\
&\subseteq f(U, \varphi(V_2 \times W_3)) \times h(V_1 \times W_1) \subseteq \\
&\subseteq f(U, W_2) \times Q_Y \subseteq Q_X \times Q_Y \subseteq Q\,.
\end{aligned}$$

Так как точка $(x, y, t) \in X \times Y \times \mathbb{R}$ и открытое множество $Q \ni \hat{f}(x, y, t)$ произвольны, то отображение $\hat{f}$ непрерывно.

Следовательно, из непрерывности отображения (91) вытекает непрерывность $\hat{f}$.

Докажем непрерывность отображения φ.

Пусть $(y, t) \in Y \times \mathbb{R}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}
|\varphi(z, \tau) - \varphi(y, t)| &= \left| \int_0^\tau \alpha \circ h(z, s)\, ds - \int_0^t \alpha \circ h(y, s)\, ds \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^t (\alpha \circ h(z, s) - \alpha \circ h(y, s))\, ds \right| + \left| \int_t^\tau \alpha \circ h(z, s)\, ds \right| = \\
&= |\varphi(z, t) - \varphi(y, t)| + \left| \int_t^\tau \alpha \circ h(z, s)\, ds \right|\,.
\end{aligned}$$

Функция $\alpha \circ h : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, и значит найдутся такие открытое множество $V' \subseteq Y$ и $\delta' > 0$, что $y \in V'$ и

$$\alpha \circ h(V' \times (t - \delta', t + \delta')) \subseteq (\alpha \circ h(y, t) - \varepsilon/2, \alpha \circ h(y, t) + \varepsilon/2)\,.$$

Обозначим

$$M = \max\{|\alpha \circ h(y, t) - \varepsilon/2|, |\alpha \circ h(y, t) + \varepsilon/2|\}.$$

Ясно, что $M > 0$. Пусть, кроме того,

$$\delta = \min\{\delta', \varepsilon/(2M)\}.$$

Тогда для любого $(z,\tau) \in V' \times (t-\delta, t+\delta)$ имеем

$$\left|\int_t^\tau \alpha \circ h(z,s)\,ds\right| \le \left|\int_t^\tau |\alpha \circ h(z,s)|\,ds\right| =$$

$$= \left|\int_t^\tau M\,ds\right| \le |\tau - t|M \le \delta M \le \varepsilon/2\ .$$

Таким образом, при $t=0$ получим, что при любом

$$(z,\tau) \in V' \times (-\delta, \delta)$$

выполняются неравенства

$$|\varphi(z,\tau) - \varphi(y,0)| \le |\varphi(z,0) - \varphi(y,0)| +$$

$$+ \left|\int_0^\tau \alpha \circ h(z,s)\,ds\right| = 0 + \varepsilon/2 < \varepsilon\ .$$

Из произвольности выбора ε следует, что для любого $y \in Y$ функция φ непрерывна в точке $(y,0) \in Y \times \mathbb{R}$.

Пусть теперь $t \ne 0$. Снова из непрерывности функции $\alpha \circ h : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следует, что для любого $s \in [0,t]$ существуют открытое множество $V_s \subseteq Y$ и $\delta_s > 0$ такие, что $y \in V_s$ и

$$\alpha \circ h(V_s \times (s-\delta_s, s+\delta_s)) \subseteq (\alpha \circ h(y,s) - \varepsilon/(4t), \alpha \circ h(y,s) + \varepsilon/(4t))\ .$$

Обозначим $W_s = (s-\delta_s, s+\delta_s) \subseteq \mathbb{R}, \qquad s \in [0,t]$.

Множество $\{y\} \times [0,t] \subseteq Y \times \mathbb{R}$ является компактом как образ компакта $[0,t]$ в хаусдорфовом пространстве $Y \times \mathbb{R}$ (напомним, что пространство Y хаусдорфово по условию). Значит, найдется конечный набор значений $s_1, \ldots, s_n$ такой, что

$$[0,t] = \bigcup_{i=1}^n W_{s_i}.$$

Далее для простоты будем обозначать $W_i = W_{s_i}$ и $V_i = V_{s_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Положим также

$$V'' = \bigcap_{i=1}^n V_i.$$

Пусть $z \in V''$. Для каждого $s \in [0,t]$ найдется $i \in \{1,\dots,n\}$ такое, что $s \in W_i$. Тогда $V'' \times \{s\} \subseteq V_i \times W_i$ из чего вытекает оценка

$$|\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s)| \le \\ \le |\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s_i)| + |\alpha \circ h(y,s_i) - \alpha \circ h(y,s)| < \\ < \varepsilon/(4t) + \varepsilon/(4t) = \varepsilon/(2t)\ .$$

Таким образом,

$$|\varphi(z,t) - \varphi(y,t)| \le \left|\int_0^t (\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s))\, ds\right| \le \\ \le \left|\int_0^t |\alpha \circ h(z,s) - \alpha \circ h(y,s)|\, ds\right| < \left|\int_0^t \varepsilon/(2t)\, ds\right| = \varepsilon/2\ .$$

Обозначим $V = V' \cap V''$. Открытое множество V не пусто, так как $y \in V$. Тогда для любого $(z,\tau) \in V \times (t-\delta, t+\delta)$ получим оценку

$$|\varphi(z,\tau) - \varphi(y,t)| \le |\varphi(z,t) - \varphi(y,t)| + \left|\int_t^\tau \alpha \circ h(z,s)\, ds\right| < \\ < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Следовательно,

$$\varphi(V \times (t-\delta, t+\delta)) \subseteq (\varphi(y,t) - \varepsilon, \varphi(y,t) + \varepsilon)\ .$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно, то отображение φ непрерывно в каждой точке $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}$. $\square$

Замечание 4.2. *Смысл параметра $\alpha(y,t)$ можно описать словами: при малых $t \in \mathbb{R}$ отображение*

$$\mathrm{pr}_X \circ \hat{f}(\cdot, y, \cdot) : X \times \mathbb{R} \to X$$

ведет себя так, как поток f_α, $f_\alpha(x,t) = f(x, \alpha t)$, $\alpha = \alpha(y,0)$.

Список литературы

[1] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.

[2] *Алексеев В. М.* Символическая динамика. — Киев.: Издание Института математики АН УССР, 1976. — С. 212.

[3] *Власенко И. Ю., Максименко С. И., Полулях Е. А.* Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий. — Институт математики НАН Украины. Киев, 2006.

[4] *Власенко И. Ю., Полулях Е. А.* Об итерационной устойчивости центра Биркгофа // *Препринт 2005.7.* — 2005.

[5] *Келли Д. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1981. — С. 432.

[6] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии, геометрические главы. — Москва, Наука, 1977.

[7] *Сибирский К. С.* Введение в топологическую динамику. — Кишинев, 1970.

[8] *Birkhoff G.* Dynamical systems // *Colloquium Publications. V. 9, AMS, Providence, RI.* — 1927.

[9] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index. — Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1978. — Vol. 38 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. — Pp. iii+89.

[10] *Coven E., Nitecki Z.* Nonwandering sets of the powers of maps of the interval // *Ergodic Theory & Dynamical Systems*. — 1981. — Vol. 1. — Pp. 9–31.

[11] *Hirsch M. W.* Differential topology. — Springer-Verlag, 1976. — Vol. 33.

[12] *Kuratowski K.* Topology. Vol. I. New edition, revised and augmented. Translated from the French by J. Jaworowski. — New York: Academic Press, 1966. — Pp. xx+560.

[13] *Kuratowski K., Mostowski A.* Set theory. — revised edition. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1976. — Pp. xiv+514. — With an introduction to descriptive set theory, Translated from the 1966 Polish original, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 86.

[14] *Polulyakh E., Vlasenko I.* On iteration stability of the Birkhoff center against the power 2 // *U. M. G.* — 2006. — Vol. 58, no. 4.

[15] *Vlasenko I., Polulyakh E.* On iteration stability of the birkhoff center against the power 2 // *U. M. G.* — 2006. — Vol. 58, no. 5. — Pp. 705–707.