Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 107-114

М. Гургенидзе

Запорожский национальный университет

О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства

В статті вивчається грасманів многовид неізотопних двовимірних площин псевдоевклідового простору за допомогою його занурення у вигляді алгебраїчної поверхні у шестивимірний простір.

В статье изучается грассманово многообразие неизотропных двумерных плоскостей псевдоевклидова пространства посредством его погружения в виде алгебраической поверхности в шестимерное пространство. Найден вид компонент тензора кривизны и получены формулы для вычисления секционной кривизны.

Грассманово многообразие плоскостей евклидова пространства изучалось многими геометрами. Основные результаты можно найти в обзорной статье А.А. Борисенко [2]. В работе [1] Ю.А. Аминова изучается само грассманово многообразие и его подмногообразие - грассманов образ поверхности. В представленной статье аналогичное исследование проведено для грассманова многообразия неизотропных 2-плоскостей псевдоевклидова четырехмерного пространства индекса 1 - ${}^1R_4$. С помощью плюккеровых координат это многообразие погружается в псевдоевклидово шестимерное пространство индекса 3, находится его тензор кривизны и секционная кривизна. Эти свойства грассманова многообразия можно будет использовать для изучения грассманова образа неизотропной поверхности в пространстве ${}^1R_4$.

1. Подмногообразия грассманова многообразия неизотропных плоскостей псевдоевклидова пространства ${}^1R_4$

В псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$ (с метрикой сигнатуры $-+++$) будем рассматривать множество всех неизотропных 2-плоскостей (далее плоскостей), проходящих через фиксированную точку пространства. Каждая плоскость множества является псевдоевклидовой или евклидовой [3]. В этом множестве можно ввести гладкую структуру и, следовательно, по аналогии с евклидовым пространством, указанное множество плоскостей будем называть грассмановым многообразием и обозначать $G(2,4)$. Многообразие является объединением двух непересекающихся подмногообразий - псевдоевклидовых и евклидовых плоскостей. Будем обозначать их соответственно ${}^PG(2,4)$ и ${}^EG(2,4)$.

Каждую плоскость π, проходящую через фиксированную точку, можно задать плюккеровыми координатами. Для этого рассмотрим ортонормированный базис плоскости π, состоящий из векторов

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4),$$

заданных своими координатами относительно ортонормированного базиса пространства ${}^1R_4$. Составим миноры второго порядка 2×4-матрицы, строками которой есть координаты базисных векторов плоскости π, и обозначим их символами p_{ij}

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}, i, j = 1, ..., 4, i < j.$$

Упорядоченный набор p_{ij} называют плюккеровыми координатами плоскости. Плюккеровы координаты кососимметричны и удовлетворяют соотношению Плюккера

$$p_{i[j}p_{kl]} = 0. \tag{92}$$

Если плоскость π псевдоевклидова, то координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют условиям:

$$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = -1,$$

$$-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 1,$$

$$-a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 0. \tag{93}$$

Найдем сумму квадратов всех плюккеровых координат p_{ij} плоскости π. Полученное выражение будет зависеть от $a_i, b_i, i = 1, ..., 4$. Используя соотношения (2), можно привести его к виду

$$p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 1 + 2(p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2).$$

Из последнего равенства следует, что плюккеровы координаты псевдоевклидовой плоскости удовлетворяют соотношению

$$-(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = -1. \tag{94}$$

Для плюккеровых координат p_{ij} евклидовой плоскости в ${}^1R_4$ нетрудно получить следующее соотношение:

$$-(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 1. \tag{95}$$

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$ плоскость задается шестью плюккеровыми координатами $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$, которые можно считать координатами точки в аффинном пространстве A_6, в котором определим скалярное произведение векторов

$\bar{p} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})$ и $\bar{q} = (q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34})$ формулой

$$(\bar{p}, \bar{q}) = -(p_{12}q_{12} + p_{13}q_{13} + p_{14}q_{14}) + p_{23}q_{23} + p_{24}q_{24} + p_{34}q_{34}.$$

Это равносильно введению в A_6 структуры псевдоевклидова пространства ${}^3R_6$ с матрицей Грамма ортонормированного базиса $diag(-1, -1, -1, 1, 1, 1)$ [4]. Набор $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ будет являться декартовыми кординатами в ${}^3R_6$.

Погружение подмногообразия ${}^PG(2, 4)$ в ${}^3R_6$ задается двумя уравнениями

$$-(p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2) + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = -1, \tag{96}$$

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{97}$$

Нормалями к подмногообразию являются, в частности, линейно независимые векторы

$$\bar{p} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}),$$

$$\bar{q} = (-p_{34}, p_{24}, -p_{23}, p_{14}, -p_{13}, p_{12}).$$

Непосредственно проверяется, что эти нормали ортогональны и $\bar{p}^2 = -1, \bar{q}^2 = 1$. Уравнение (5) означает, что ${}^PG(2, 4)$ лежит в пятимерной сфере S^5 мнимого радиуса пространства ${}^3R_6$, а из (6) следует, что $\bar{q}$ является нормалью к подмногообразию ${}^PG(2, 4)$.

Для подмногообразия ${}^EG(2, 4)$ уравнения погружения в ${}^3R_6$ имеют вид (4) и (6). Векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ являются нормалями к этому подмногообразию, но теперь $\bar{p}^2 = 1, \bar{q}^2 = -1$. Таким образом, подмногообразие ${}^EG(2, 4)$ принадлежит сфере действительного радиуса пространства ${}^3R_6$.

2. Тензор кривизны подмногообразий ${}^PG(2,4)$ и ${}^EG(2,4)$

Рассмотрим четырехмерное подмногообразие ${}^PG(2,4)$. Его можно задать вектор-функцией $\bar{p} = \bar{p}(y^1, y^2, y^3, y^4)$. Пусть

$$d\sigma^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \, , \alpha, \beta = 1, ..., 4 \, ,$$

— метрика на ${}^PG(2,4)$, индуцированная метрикой объемлющего пространства ${}^3R_6$. Коэффициенты этой метрики $a_{\alpha\beta} = (\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\beta})$. Так как нормальное пространство к ${}^PG(2,4)$ определяется евклидовым и псевдоевклидовым векторами, то метрика ${}^PG(2,4)$ имеет сигнатуру $(--++)$. Для подмногообразия ${}^PG(2,4)$ рассмотрим вторые квадратичные формы
$II^\lambda = \Omega^\lambda_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta, \lambda = 1, 2$, соответствующие нормалям $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Коэффициенты $\Omega^\sigma_{\alpha\beta}$ будем определять равенствами

$$\Omega^1_{\alpha\beta} = (\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}, \bar{p}), \Omega^2_{\alpha\beta} = (\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}, \bar{q}),$$

которые можно переписать в виде

$$\Omega^1_{\alpha\beta} = -(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\beta}) = -a_{\alpha\beta}, \Omega^2_{\alpha\beta} = -(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial \bar{q}}{\partial y^\beta}).$$

В каждой регулярной точке $p \in^P G(2,4)$ рассмотрим базис пространства ${}^3R_6$, состоящий из касательных векторов $\bar{p_\alpha} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y^\alpha}$ и нормалей $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Разложение Гаусса [1] ковариантных производных для подмногообразия ${}^PG(2,4)$ запишется в виде

$$\bar{p}_{,\alpha\beta} = -\Omega^1_{\alpha\beta}\bar{p} + \Omega^2_{\alpha\beta}\bar{q}.$$

Для получения уравнения Гаусса [1] погружения многообразия ${}^PG(2,4)$ в ${}^3R_6$ найдем ковариантные производные $\bar{p}_{,\alpha\beta\gamma}$ и $\bar{p}_{,\alpha\gamma\beta}$ и их разность разложим по векторам $\bar{p}_{,\alpha}, \bar{p}, \bar{q}$.

Воспользуемся условием ортогональности векторов $\bar{p}_\alpha$ векторам $\bar{p}$ и $\bar{q}$ и запишем уравнение Гаусса в виде

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\Omega^1_{\alpha\gamma}\Omega^1_{\beta\delta} + \Omega^1_{\alpha\delta}\Omega^1_{\beta\gamma} + \Omega^2_{\alpha\gamma}\Omega^2_{\beta\delta} - \Omega^2_{\alpha\delta}\Omega^2_{\beta\gamma}.$$

Найденный вид коэффициентов вторых квадратичных форм позволяет переписать эти уравнения следующим образом

$$\begin{aligned}(98)\quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} + (\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\gamma})(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\delta}) - \\ - (\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\delta})(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\gamma})\end{aligned}$$

Рассуждения, изложенные в этом пункте, справедливы и для подмногообразия ${}^EG(2,4)$. Разложение Гаусса для ${}^EG(2,4)$ можно получить в виде

$$\bar{p}_{,\alpha\beta} = \Omega^1_{\alpha\beta}\bar{p} - \Omega^2_{\alpha\beta}\bar{q},$$

а уравнения Гаусса

$$\begin{aligned}(99)\quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Omega^1_{\alpha\gamma}\Omega^1_{\beta\delta} - \Omega^1_{\alpha\delta}\Omega^1_{\beta\gamma} - \Omega^2_{\alpha\gamma}\Omega^2_{\beta\delta} + \Omega^2_{\alpha\delta}\Omega^2_{\beta\gamma} = \\ = a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} - \\ - (\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\gamma})(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\delta}) + (\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\delta})(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\bar{q}}{\partial y^\gamma}).\end{aligned}$$

3. Секционная кривизна подмногообразий ${}^PG(2,4)$ и ${}^EG(2,4)$

Для нахождения секционной кривизны в касательном пространстве к многообразию выбирается двумерная площадка. Обозначим через σ двумерную площадку, определяемую ортонормированным базисом $\bar{X} = (X^\alpha)$ и $\bar{Y} =$

(Y^α). Секционная кривизна определяется формулой

$$K(\sigma) = R_{\alpha\beta\gamma\delta}X^\alpha Y^\beta X^\gamma Y^\delta.$$

В касательных пространствах к подмногообразиям ${}^PG(2,4)$ и ${}^EG(2,4)$ возможны три типа двумерных площадок с сигнатурами $(-+), (++), (--)$. Рассмотрим их по порядку.

Для подмногообразия ${}^PG(2,4)$ для площадки с сигнатурой $(-+)$ $\bar{X}^2 = -1$, $\bar{Y}^2 = 1$ и, с учетом (7), получим

$$K(\sigma) = 1 + (\nabla_{\bar{X}}\bar{p}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\nabla_{\bar{Y}}\bar{p}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) - \\ - (\nabla_{\bar{X}}\bar{p}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\nabla_{\bar{Y}}\bar{p}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}),$$

где $\nabla_{\bar{X}}\bar{p} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial y^\alpha}X^\alpha$, а

$$-X^\alpha a_{\alpha\gamma}X^\gamma Y^\beta a_{\beta\delta}Y^\delta + X^\alpha a_{\alpha\delta}Y^\delta Y^\beta a_{\beta\gamma}X^\gamma = 1.$$

Из вида координат векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$ следует равенство $(\nabla_{\bar{X}}\bar{p}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) = (\nabla_{\bar{Y}}\bar{p}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})$.

Напомним, что подмногообразие ${}^PG(2,4)$ лежит на сфере S^5 мнимого радиуса пространства ${}^3R_6$ и $\bar{p}$ - нормаль к этой сфере. Как и в евклидовом случае любое направление в касательном пространстве к сферам псевдоевклидова пространства является главным и в каждом из них нормальная кривизна равна -1. Поэтому, в соответствии с теоремой Родрига, $\nabla_{\bar{X}}\bar{p} = \bar{X}$, $\nabla_{\bar{Y}}\bar{p} = \bar{Y}$. Тогда формулу кривизны подмногообразия ${}^PG(2,4)$ можно записать в виде

$$K(\sigma) = 1 + (\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) - (\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}). \tag{100}$$

Пусть теперь двумерная площадка σ в касательном пространстве подмногообразия ${}^PG(2,4)$ определяется двумя ортогональными единичными или двумя ортогональными мнимоединичными векторами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. В каждом из этих случаев секционная кривизна вычисляется по формуле

$$K(\sigma) = -1 + (\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) - (\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}).$$

Для подмногообразия ${}^{E}G(2,4)$ формула секционной кривизны для площадки σ , определяемой векторами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, $\bar{X}^2 = -1$ и $\bar{Y}^2 = 1$ имеет вид

$$K(\sigma) = -1 - (\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) + (\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}),$$

а для площадки σ, определяемой двумя единичными или двумя мнимоединичными векторами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$

$$K(\sigma) = 1 - (\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q}) + (\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{q})(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{q}).$$

В работе [1] получена оценка секционной кривизны грассманова многообразия евклидова пространства. Полученные в этой статье результаты планируется использовать для оценки секционной кривизны подмногообразий ${}^{P}G(2,4)$ и ${}^{E}G(2,4)$ псевдоевклидова пространства ${}^{1}R_4$.

Список литературы

[1] *Аминов Ю.А.* Геометрия подмногообразий. – К.: Наукова думка, 2002. – 467с.

[2] *Борисенко А.А., Николаевский Ю.А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий //УМН - 1991. - Т.46. Вып.2(278). - С.41-80

[3] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: Наука, 1967. - 664с.

[4] *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы пространства. - М.: Наука, 1969. - 547с.