Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 132-162

К. М. Зубрилин

Одесский Национальный Университет им. И. И. Мечникова, Институт Математики, Экономики, Механики
E-mail: `zubrilin@rambler.ru`

p-геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений, индуцированные голоморфно-проективными диффеоморфизмами келеровых пространств

Дана робота присвячена вивченню спощуючих властивостей дифеоморфізмов дотичних розшарувань першого порядку, які індуковані голоморфно-проективними дифеоморфізмами баз. Базисними многовидами є келерови простори, а дотичні розшарування розглядаються як афіннозв'язні простори із зв'язністю повного ліфта.

Данная работа посвящена изучению уплощающих свойств диффеоморфизмов касательных расслоений первого порядка, которые индуцированы голоморфно-проективными диффеоморфизмами баз. Базисными многообразиями являются келеровы пространства, а касательные расслоения рассматриваются как аффинно-связные пространства со связностью полного лифта.

The given paper is devoted to studying of flattening properties of diffeomorphisms of tangent bundles of the first order which are induced by holomorphically projective diffeomorphisms of bases. Basic manifolds are Kählerian spaces, and tangent bundles are considered as affine connection spaces with connection of the complete lift.

1. Введение

Изучению уплощающих свойств дифференцируемых отображений посвящено несколько работ.

В работе [1] с точки зрения теории p-геодезических отображений исследованы диффеоморфизмы касательных расслоений первого и второго порядка, индуцированые геодезическими (проективными) диффеоморфизмами базисных многообразий. Расслоения наделенны полными лифтами аффинных связностей на базах. Группы Ли таких преобразований рассмотрены в работе [2] .

В работе [3] изучены уплощающие свойства преобразований касательного расслоения первого порядка, индуцированые конциркулярными преобразованиями базы. Базисным многообразием является (псевдо)риманово пространство, а касательное расслоение наделено полным лифтом аффинной связности. Здесь же обнаружены определенные геометрические особенности групп Ли таких преобразований в рамках теории p-геодезических отображений.

Уплощающие свойства сечений касательного расслоения первого порядка относительно связности полного лифта выявлены в работе [4].

Данная работа посвящена изучению уплощающих свойств диффеоморфизмов касательных расслоений первого порядка, которые индуцированы голоморфно-проективными диффеоморфизмами баз. Базисными многообразиями являются келеровы пространства, а касательные расслоения рассматриваются как аффинно-связные пространства со связностью полного лифта.

Основные определения второго пункта взяты из [2] и [3]. Теорема этого пункта показывает, что изучение уплощающих свойств диффеоморфизмов сводится к изучению уплощающих свойств произвольной геодезической кривой относительно специальной связности-захвата аффинной связности.

В третьем пункте рассматриваются голоморфно-проективные диффеоморфизмы келеровых пространств. Определения и основные результаты взяты из [5]. Рассмотрены геометрические свойства аналитически- планарных кривых с точки зрения теории p-геодезических кривых. Изучены уплощающие свойства голоморфно-проективных диффеоморфизмов.

Четвертый пункт является ключевым. Здесь приводится вспомогательная лемма, которая используется для нахождения кривизн произвольной геодезической кривой в касательном расслоении первого порядка относительно захвата аффинной связности. Отсюда уже получается основная теорема об уплощающих свойствах диффеоморфизма касательных расслоений со связностью горизонтального лифта, который индуцирован голоморфно-проективным диффеоморфизмом баз. Определения и основные свойства лифтов взяты из [7].

2. P-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Приведем необходимые сведения из теории p-геодезических отображений.

Рассмотрим гладкое многообразие M с аффинной связностью ∇ без кручений. Пусть $\mathscr{C}$ гладкая кривая в M и $\gamma\colon (a,b) \to M$ ее параметризация, причём ξ — поле касательных векторов вдоль $\mathscr{C}$, $\xi_1 = \nabla_\gamma \xi$ — поле векторов 1-ой кривизны вдоль $\mathscr{C}$, $\xi_q = \nabla_\gamma \xi_{q-1}$ — поле векторов q-ой кривизны вдоль $\mathscr{C}$.

Определение 1. *Говорят, что кривая $\mathscr{C}$ в точке $x = \gamma(t_0)$ имеет уплощение q-го порядка, если в точке x векторы $\xi, \xi_1, ..., \xi_{q-1}$ линейно независимы, а векторы $\xi, \xi_1, ..., \xi_{q-1}, \xi_q$ линейно зависимы.*

Если кривая $\mathscr{C}$ в каждой своей точке имеет уплощение p-го порядка, то она называется *p-геодезической* кривой.

Точка $x = \gamma(t_0)$ кривой $\mathscr{C}$ называется *граничной точкой уплощения*, если в каждой окрестности точки x есть хотя бы одна точка кривой $\mathscr{C}$, в которой порядок уплощения отличается от порядка уплощения в точке x. Учитывая свойства внешнего произведения, получим, что точка x кривой $\mathscr{C}$ имеет уплощение p-го порядка тогда и только тогда, когда в точке x выполняются условия:

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{p-1} \neq 0, \qquad \xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{p-1} \wedge \xi_p = 0. \tag{103}$$

Значит, что бы кривая $\mathscr{C}$ была p-геодезической необходимо и достаточно выполнения условий (103) вдоль кривой $\mathscr{C}$.

С другой стороны, из свойств линейной зависимости и линейной независимости векторов следует, что вдоль p-геодезической кривой $\mathscr{C}$ должно выполнятся равенство:

$$\xi_p = \alpha_0 \xi + \alpha_1 \xi_1 + ... + \alpha_{p-1} \xi_{p-1} \tag{104}$$

где α_0, α_1, ... , α_{p-1} — некоторые функции, определённые вдоль кривой $\mathscr{C}$.

Рассматривая ξ, ξ_1, ... , ξ_{p-1}, ξ_p - как дифференциальные операторы от параметра t, а функции α_0, α_1, ... , α_{p-1} — как функции от параметра t, равенство (104) представляет собой дифференциальное уравнение p-геодезической кривой $\mathscr{C}$.

Пусть (M, ∇) и $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ аффинно-связные пространства.

Определение 2. *Диффеоморфизм $\mu \colon M \to \bar{M}$ двух аффинно-связных пространств без кручения называется p-геодезическим, если для каждой геодезической кривой $\mathscr{C}$*

в M, её образ $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$ является кривой, каждая точка которой имеет уплощение порядка $q \leqslant p$. Число q зависит как от выбора кривой $\mathscr{C}$, так и от выбора точки на ней, а число p фиксировано и является наибольшим из всех q.

p-геодезический диффеоморфизм (на себя) $\pi\colon M \to M$ называется p-геодезическим конечным преобразованием аффинно-связного пространства (M, ∇).

Исходя из определения 1, следует, что геометрически p-геодезические диффеоморфизмы характеризуются тем, что они геодезические кривые преобразуют в кривые, которые на отдельных участках (дугах) являются q-геодезическими кривыми, причём $q \leqslant p$.

Чтобы определить порядок уплощения диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ по определению, необходимо для каждой геодезической кривой $\mathscr{C}$ в M найти наибольший из порядков уплощения точек кривой образа $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$. Затем из найденных чисел выбрать наибольшее. Это и будет порядок уплощения диффеоморфизма μ.

Нахождение порядков уплощения точек кривой образа $\bar{\mathscr{C}}$ можно свести к нахождению порядков уплощения соответствующих точек геодезической кривой $\mathscr{C}$ относительно специальной связности на многообразии M — захвата аффинной связности $\bar{\nabla}$ обратным диффеоморфизмом μ^{-1} (см. [6] стр. 189, §30, роз 3).

Захват аффинной связности $\bar{\nabla}$ диффеоморфизмом μ^{-1} определяется как аффинная связность $\widetilde{\nabla}$ на многообразии M правилом

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \mu_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right),$$

для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $\mu\colon M \to \bar{M}$ *диффеоморфизм многообразий,* $\bar{\nabla}$ *— аффинная связность на* $\bar{M}$*,* $\widetilde{\nabla}$ *— захват связности* $\bar{\nabla}$ *диффеоморфизмом* μ^{-1}*,* $\mathscr{C}$ *— гладкая кривая в* M*, и* $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$ *— кривая образ в* $\bar{M}$*.*

Для того, чтобы кривая $\mathscr{C}$ *в произвольной точке* $x \in \mathscr{C}$ *имела уплощение порядка* k *относительно захвата* $\widetilde{\nabla}$*, необходимо и достаточно, что бы порядок уплощения кривой образа* $\bar{\mathscr{C}}$ *в соответствующей точке* $\mu(x)$ *был равен* k*.*

Таким образом, порядок уплощения диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ равен наибольшему из порядков уплощения точек всех геодезических кривых в M. Эти порядки уплощения находятся относительно аффинной связности захвата.

Нетрудно показать, что правило $P(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, определяет тензорное поле $P \in \mathfrak{T}^0_2(M)$. Это тензорное поле тесно связано с тензором аффинной деформации H диффеоморфизма μ (см. [6] стр. 153, §23, роз. 3) равенством $\mu_*(P(X,Y)) = H(X,Y)$. По этой причине, тензорное поле P так же будем называть тензором аффинной деформации диффеоморфизма μ.

Тогда для произвольного гладкого векторного поля χ, заданного вдоль гладкой кривой $\mathscr{C}$, справедливо равенство

$$\widetilde{\nabla}_t \chi = \nabla_t \chi + P(\xi, \chi), \tag{105}$$

где ξ — поле касательных векторов к кривой $\mathscr{C}$. Это равенство можно использовать для нахождения кривизн $\widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\xi}_2$, ... геодезической кривой $\mathscr{C}$ относительно аффинной связности захвата $\widetilde{\nabla}$. Если геодезическая кривая отнесена к каноническому параметру, то $\nabla_t \xi = 0$. С учетом этого получим

$$\widetilde{\xi}_1 = \widetilde{\nabla}_t \xi = \nabla_t \xi + P(\xi, \xi) = P(\xi, \xi),$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\xi}_2 =& \widetilde{\nabla}_t \widetilde{\xi}_1 = \nabla_t \widetilde{\xi}_1 + P(\xi, \widetilde{\xi}_1) = \nabla_t P(\xi,\xi) + P(\xi, P(\xi,\xi)) = \\
=& \nabla P(\xi,\xi,\xi) + P(\nabla_t \xi, \xi) + P(\xi, \nabla_t \xi) + P(\xi, P(\xi,\xi)) = \\
=& \nabla P(\xi,\xi,\xi) + P(\xi, P(\xi,\xi)),
\end{aligned}
$$

и так дальше.

3. Голоморфно - проективные диффеоморфизмы

Определение 3. *Структурой келерова пространства на многообразии M называется пара (g, F) состоящая из метрического тензора g на M, и аффинора F на M, удовлетворяющего условиям*

(1) *Выполняется равенство*

$$F^2 = \varepsilon \delta,$$

где δ — единичный аффинор на M и $\varepsilon = \pm 1$.

(2) *Для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется равенство*

$$g(X, FY) + g(FX, Y) = 0.$$

(3) *Выполняется равенство*

$$\nabla F = 0,$$

где ∇ — аффинная связность метрического тензора g.

Многообразие M с фиксированной структурой келерова пространства (g, F) называется *келеровым пространством.* Ясно, что (M, g) является римановым пространством. При $\varepsilon = -1$ келерово пространство называется *эллиптическим*, а при $\varepsilon = 1$ — *гиперболическим.*

Определение 4. *Кривая $\mathscr{C}$ келерова пространства* (M, g, F) *называется аналитически-планарной* (Т. Отсуки, Я. Таширо)*, если при параллельном перенесении касательного вектора вдоль этой кривой, он лежит в двумерной площадке, образованной этим вектором и сопряженным с ним.*

С точки зрения теории р-геодезический кривых, аналитически - планарная кривая характеризуется как кривая, которая в каждой своей точке имеет уплощение порядка не выше второго.

Определение 5. *Диффеоморфизм* $\mu\colon M \to \bar{M}$ *келерова пространства* (M, g, F) *на келерово пространство* $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{F})$ *называется голоморфно- проективным, если все аналитически-планарные кривые пространства* M *переходят в аналитически-планарные кривые пространства* $\bar{M}$.

В [5] найдены необходимые и достаточные условия голоморфно-проективного диффеоморфизма келеровых пространств. Именно, в общей по диффеоморфизму системе координат, в соответствующих точках выполняются условия

$$\begin{gathered} \bar{F}_i^h = F_i^h, \\ \bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \beta_i\delta_j^h + \beta_j\delta_i^h + \varepsilon\beta_{\bar{i}}\delta_{\bar{j}}^h + \varepsilon\beta_{\bar{j}}\delta_{\bar{i}}^h, \end{gathered} \tag{106}$$

где β — некоторый ковектор на M,

$$\beta_{\bar{i}} = \beta_\alpha F_i^\alpha, \quad \delta_{\bar{i}}^h = F_i^h,$$

Γ_{ij}^h (соотв. $\bar{\Gamma}_{ij}^h$) — компоненты связности Леви-Чивитты ∇ (соотв. $\bar{\nabla}$) отвечающей метрике g (соотв. $\bar{g}$).

Пусть $\widetilde{\bar{\nabla}}$ — захват аффинной связности $\bar{\nabla}$ обратным диффеоморфизмом μ^{-1} (см. [6]). Тогда равенство (106) можно записать в инвариантной форме

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \\ + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X), \tag{107}$$

где $\bar{\beta} = \beta \circ F$ — ковекторное поле, сопряженное ковекторному полю β, X и Y произвольные векторные поля на M.

Отсюда получим тензор аффинной деформации P голоморфно- проективного диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$

$$P(X,Y) = \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \\ + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X). \tag{108}$$

Выясним уплощающие свойства голоморфно-проективного диффеоморфизма.

Теорема 2. *Голоморфно-проективный диффеоморфизм келеровых пространств, описываемый уравнением*

$$\begin{aligned} \mu_* F &= \bar{F}, \\ P(X,Y) &= \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \\ &\quad + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X), \end{aligned}$$

обладает следующими уплощающими свойствами:

(1) *При $\beta = 0$ голоморфно-проективный диффеоморфизм является аффинным диффеоморфизмом.*
(2) *В общем случае, при $\beta \neq 0$, голоморфно-проективный диффеоморфизм является 2-геодезическим диффеоморфизмом.*

Доказательство. Возьмем в келеровом пространстве M произвольную геодезическую кривую $\mathscr{C}$ отнесенную к каноническому параметру t. Тогда $\nabla_t \xi = 0$, где ξ —

поле касательных векторов геодезической кривой $\mathscr{C}$. Найдем кривизны кривой $\mathscr{C}$ относительно аффинной связности $\widetilde{\nabla}$. Поле первой кривизны

$$\widetilde{\xi}_1 = 2\beta(\xi)\delta(\xi) + 2\varepsilon\bar{\beta}(\xi)F(\xi).$$

Находим поле второй кривизны

$$\widetilde{\xi}_2 = \widetilde{\nabla}_t\widetilde{\xi}_1 = \nabla_t\widetilde{\xi}_1 + P(\xi, \widetilde{\xi}_1).$$

Поскольку $\beta(F(\xi)) = (\beta \circ F)(\xi) = \bar{\beta}(\xi)$, $F(F(\xi)) = F^2(\xi) = \varepsilon\delta(\xi)$ и $\bar{\beta}(F(\xi)) = (\beta \circ F)(F(\xi)) = \beta(F^2(\xi)) = \varepsilon\beta(\xi)$, то

$$P(\xi, \widetilde{\xi}_1) = \left(4\beta(\xi)^2 + 4\varepsilon\bar{\beta}(\xi)^2\right)\delta(\xi) + 8\varepsilon\beta(\xi)\bar{\beta}(\xi)F(\xi).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_2 =& 2\left((\nabla\beta)(\xi,\xi) + 2\beta(\xi)^2 + 2\varepsilon\bar{\beta}(\xi)^2\right)\delta(\xi) + \\ &+ 2\varepsilon\left((\nabla\bar{\beta})(\xi,\xi) + 4\beta(\xi)\bar{\beta}(\xi)\right)F(\xi).\end{aligned}$$

Из полученных выражений для векторов кривизн, будем иметь

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 = 2\varepsilon\bar{\beta}(\xi)\ \delta(\xi) \wedge F(\xi), \qquad \xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 = 0. \tag{109}$$

Равенства (109) завершают доказательство теоремы.

4. Диффеоморфизмы, индуцированные голоморфно -проективными диффеоморфизмами баз

Будем предпологать, что касательные расслоения являются аффинно связными пространствами $(T(M), \nabla^C)$ и $(T(\bar{M}), \bar{\nabla}^C)$ со связностями полных лифтов ∇^C и $\bar{\nabla}^C$ соответственно (см. [7]).

Теорема 3. *Пусть $\mu\colon M \to \bar{M}$ диффеоморфизм многообразия M на аффинно-связное пространство $(\bar{M}, \bar{\nabla})$, $\widetilde{\nabla}$*

— захват аффинной связности $\bar{\nabla}$ обратным диффеоморфизмом μ^{-1}, и $\mu_*\colon T(M) \to T(\bar{M})$ индуцированный диффеоморфизм касательных расслоений.

Тогда захват $\widetilde{\bar{\nabla}^C}$ полного лифта $\bar{\nabla}^C$ индуцированным диффеоморфизмом μ_*^{-1} совпадает с лифтом $\widetilde{\nabla}^C$ захвата $\widetilde{\nabla}$.

Доказательство. По определению захвата, для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, выполняются равенства

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \mu_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right),$$

и

$$\widetilde{\bar{\nabla}^C}_{X^C} Y^C = (\mu_*)_*^{-1}\left(\bar{\nabla}^C_{(\mu_*)_* X^C}(\mu_*)_* Y^C\right).$$

По свойствам полного лифта для произвольных векторных полей X, Y, Z на M выполняются равенства

$$(\mu_*)_* X^C = (\mu_* X)^C,$$
$$(\mu_*)_* Y^C = (\mu_* Y)^C,$$
$$(\mu_*)_*^{-1} Z^C = (\mu_*^{-1} Z)^C.$$

Учитывая это, получим

$$\begin{aligned}\widetilde{\bar{\nabla}^C}_{X^C} Y^C &= (\mu_*)_*^{-1}\left(\bar{\nabla}^C_{(\mu_* X)^C}(\mu_* Y)^C\right) = \\ &= (\mu_*)_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right)^C = \\ &= \left(\mu_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right)\right)^C = \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^C = \widetilde{\nabla}^C_{X^C} Y^C,\end{aligned}$$

что влечет равенство $\widetilde{\bar{\nabla}^C} = \widetilde{\nabla}^C$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Полный лифт P^C тензора аффинной деформации P диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ является тензором аффинной деформации $\widetilde{P}$ индуцированного диффеоморфизма $\mu_*\colon T(M) \to T(\bar{M})$.*

Доказательство получается непосредственно из определений и предыдущей теоремы. Для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ получим

$$\begin{aligned}\widetilde{P}\left(X^C, Y^C\right) =& \widetilde{\bar{\nabla}^C}_{X^C} Y^C - \nabla^C_{X^C} Y^C = \widetilde{\nabla}^C_{X^C} Y^C - \nabla^C_{X^C} Y^C = \\ &= \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^C - (\nabla_X Y)^C = \left(\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y\right)^C = \\ &= (P(X,Y))^C = P^C\left(X^C, Y^C\right),\end{aligned}$$

что влечет требуемое.

Теперь перейдем к изучению уплощающих свойств диффеоморфизмов касательных расслоений первого порядка, индуцированных голоморфно-проективными диффеоморфизмами келеровых пространств.

Пусть всюду в этом пункте $\mu\colon M \to \bar{M}$ голоморфно-проективный диффеоморфизм келеровых пространств (M, g, F) и $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{F})$, P — тензор аффинной деформации диффеоморфизма μ. Тогда, в силу теоремы 4, полный лифт P^C является тензором аффинной деформации $\widetilde{P}$ индуцированного диффеоморфизма $\mu_*\colon T(M) \to T(\bar{M})$. Для произвольных векторных полей X и Y на M, используя свойства лифтов, находим

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(X^C, Y^C) =& P^C(X^C, Y^C) = P(X,Y)^C = \\ &= \beta^C(X^C)\delta^V(Y^C) + \beta^V(X^C)\delta(Y^C) + \\ &\quad + \beta^C(Y^C)\delta^V(X^C) + \beta^V(Y^C)\delta(X^C) + \\ &\quad + \varepsilon\bar{\beta}^C(X^C)F^V(Y^C) + \varepsilon\bar{\beta}^V(X^C)F^C(Y^C) + \\ &\quad + \varepsilon\bar{\beta}^C(Y^C)F^V(X^C) + \varepsilon\bar{\beta}^V(Y^C)F^C(X^C).\end{aligned}$$

Для нахождения кривизн нам понадобиться следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть вдоль геодезической кривой $\mathscr{C}$, отнесенной к каноническому параметру t, задано векторное поле χ вида*

$$\chi = a \cdot \delta(\xi) + b \cdot \delta^V(\xi) + c \cdot F^C(\xi) + d \cdot F^V(\xi),$$

где ξ — поле касательных векторов к кривой $\mathscr{C}$, а функции a, b, c и d определяются правилом: существуют такие тензорные поля $R, \bar{R} \in \mathfrak{T}^0_r(M)$, что

$$a = 2R^V(\xi, ..., \xi), \quad b = 2R^C(\xi, ..., \xi),$$
$$c = 2\varepsilon \bar{R}^V(\xi, ..., \xi), \quad d = 2\varepsilon \bar{R}^C(\xi, ..., \xi).$$

Тогда ковариантная производная $\widetilde{\nabla}^C_t \chi$ имеет вид

$$\widetilde{\nabla}^C_t \chi = a' \cdot \delta(\xi) + b' \cdot \delta^V(\xi) + c' \cdot F^C(\xi) + d' \cdot F^V(\xi),$$

где функции a', b', c' и d' определяются правилом:

$$a' = 2R'^V(\xi, ..., \xi), \quad b' = 2R'^C(\xi, ..., \xi),$$
$$c' = 2\varepsilon \bar{R}'^V(\xi, ..., \xi), \quad d' = 2\varepsilon \bar{R}'^C(\xi, ..., \xi),$$

а тензорные поля $R', \bar{R}' \in \mathfrak{T}^0_{r+1}(M)$ имеют вид

$$R' = \nabla R + 2R \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{R} \otimes \bar{\beta}, \quad \bar{R}' = \nabla \bar{R} + 2\bar{R} \otimes \beta + 2R \otimes \bar{\beta}.$$

Доказательство. Согласно теореме 3, если $\widetilde{\nabla}$ захват аффинной связности $\bar{\nabla}$ обратным диффеоморфизмом μ^{-1}, то полный лифт $\widetilde{\nabla}^C$ является захватом полного лифта $\bar{\nabla}^C$ индуцированным диффеоморфизмом μ^{-1}_*. Тогда, ковариантная производная векторного поля χ, относительно связности полного лифта $\widetilde{\nabla}^C$, определяется равенством

$$\widetilde{\nabla}^C_t \chi = \nabla^C_t + \widetilde{P}(\xi, \chi),$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(\xi,\chi) = \beta^C(\xi)\delta^V(\chi) + \beta^V(\xi)\delta(\chi) + \beta^C(\chi)\delta^V(\xi) +\\ + \beta^V(\chi)\delta(\xi) + \varepsilon\bar{\beta}^C(\xi)F^V(\chi) + \varepsilon\bar{\beta}^V(\xi)F^C(\chi) +\\ + \varepsilon\bar{\beta}^C(\chi)F^V(\xi) + \varepsilon\bar{\beta}^V(\chi)F^C(\xi).\end{aligned}$$

Тогда с одной стороны

$$\begin{aligned}\nabla_t^C\chi = &\nabla_t^C a\cdot\delta(\xi) + a\cdot\nabla^C\delta(\xi,\xi) + a\cdot\delta(\nabla_t^C\xi) +\\ &+ \nabla_t^C b\cdot\delta^V(\xi) + b\cdot\nabla^C\delta^V(\xi,\xi) + b\cdot\delta^V(\nabla_t^C\xi) +\\ &+ \nabla_t^C c\cdot F^C(\xi) + c\cdot\nabla^C F^C(\xi,\xi) + c\cdot F^C(\nabla_t^C\xi) +\\ &+ \nabla_t^C d\cdot F^V(\xi) + d\cdot\nabla^C F^V(\xi,\xi) + d\cdot F^V(\nabla_t^C\xi).\end{aligned}$$

Поскольку геодезическая кривая $\mathscr{C}$ отнесена к каноническому параметру t, то $\nabla_t^C\xi = 0$. Кроме того, в силу свойств лифтов, получим

$$\nabla^C\delta = 0, \qquad \nabla^C\delta^V = (\nabla\delta)^V = 0,$$
$$\nabla^C F^C = (\nabla F)^C = 0, \qquad \nabla^C F^V = (\nabla F)^V = 0.$$

Тогда будем иметь

$$\nabla_t^C\chi = \nabla_t^C a\cdot\delta(\xi) + \nabla_t^C b\cdot\delta^V(\xi) + \nabla_t^C c\cdot F^C(\xi) + \nabla_t^C d\cdot F^V(\xi). \tag{110}$$

С другой стороны, поскольку

$$\delta^V\delta = \delta^V, \quad \delta^V\delta^V = 0, \quad \delta^V F^C = (\delta F)^V = F^V, \quad \delta^V F^V = 0$$

то

$$\delta^V(\chi) = a\delta^V(\xi) + cF^V(\xi). \tag{111}$$

Аналогично

$$\delta(\chi) = a\delta(\xi) + b\delta^V(\xi) + cF^C(\xi) + dF^V(\xi). \tag{112}$$

По свойству лифтов

$$\beta^V \circ \delta^V = 0, \quad \beta^V \circ F^C = (\beta \circ F)^V = \bar{\beta}^V = 0, \quad \beta^V \circ F^V = 0,$$

имеем

$$\beta^V(\chi) = a\beta^V(\xi) + c\bar{\beta}^V(\xi). \tag{113}$$

По свойству лифтов

$$\beta^C \circ \delta^V = \beta^V, \quad \beta^C \circ F^C = (\beta \circ F)^C = \bar{\beta}^C,$$
$$\beta^C \circ F^V = (\beta \circ F)^V = \bar{\beta}^V,$$

имеем

$$\beta^C(\chi) = a\beta^C(\xi) + b\beta^V(\xi) + c\bar{\beta}^C(\xi) + d\bar{\beta}^V(\xi). \tag{114}$$

По свойствам лифтов

$$F^V\delta^V = 0, \quad F^V F^C = (F\ F)^V = \varepsilon\delta^V, \quad F^V F^V = 0,$$

имеем

$$F^V(\chi) = aF^V(\xi) + c\varepsilon\delta^V(\xi). \tag{115}$$

По свойствам лифтов

$$F^C\delta^V = (F\delta)^V = F^V, \quad F^C F^C = (F\ F)^C = \varepsilon\delta,$$
$$F^C F^V = (F\ F)^V = \varepsilon\delta^V,$$

имеем

$$F^C(\chi) = aF^C(\xi) + bF^V(\xi) + c\varepsilon\delta(\xi) + d\varepsilon\delta^V(\xi). \tag{116}$$

Учитывая свойства лифтов

$$\bar{\beta}^C \circ \delta^V = \bar{\beta}^V, \quad \bar{\beta}^C \circ F^C = (\bar{\beta} \circ F)^C = \varepsilon\beta^C,$$
$$\bar{\beta}^C \circ F^V = (\bar{\beta} \circ F)^V = \varepsilon\beta^V,$$

получим

$$\bar{\beta}^C(\chi) = a\bar{\beta}^C(\xi) + b\bar{\beta}^V(\xi) + c\varepsilon\beta^C(\xi) + d\varepsilon\beta^V(\xi). \tag{117}$$

По свойствам лифтов

$$\bar{\beta}^V \circ \delta^V = 0, \qquad \bar{\beta}^V \circ F^C = (\bar{\beta} \circ F)^V = \varepsilon \beta^V, \qquad \bar{\beta}^V \circ F^V = 0,$$

имеем

$$\bar{\beta}^V(\chi) = a\bar{\beta}^V(\xi) + c\varepsilon\beta^V(\xi). \tag{118}$$

Из равенств (111), (112), (113), (114), (115), (116), (117) и (118), будем иметь

$$\begin{gathered}\widetilde{P}(\xi, \chi) = \left(2a\beta^V(\xi) + 2c\bar{\beta}^V(\xi)\right)\delta(\xi) + \\ + \left(2a\beta^C(\xi) + 2b\beta^V(\xi) + 2c\bar{\beta}^C(\xi) + 2d\bar{\beta}^V(\xi)\right)\delta^V(\xi) + \\ + \left(2c\beta^V(\xi) + 2a\varepsilon\bar{\beta}^V(\xi)\right)F^C(\xi) + \\ + \left(2c\beta^C(\xi) + 2d\beta^V(\xi) + 2a\varepsilon\bar{\beta}^C(\xi) + 2b\varepsilon\bar{\beta}^V(\xi)\right)F^V(\xi).\end{gathered} \tag{119}$$

Из равенств (110) и (119) получим

$$\widetilde{\nabla}_t^C \chi = a' \cdot \delta(\xi) + b' \cdot \delta^V(\xi) + c' \cdot F^C(\xi) + d' \cdot F^V(\xi),$$

где

(120)

$$\begin{aligned} a' &= \nabla_t^C a + 2a\beta^V(\xi) + 2c\bar{\beta}^V(\xi), \\ b' &= \nabla_t^C b + 2a\beta^C(\xi) + 2b\beta^V(\xi) + 2c\bar{\beta}^C(\xi) + 2d\bar{\beta}^V(\xi), \\ c' &= \nabla_t^C c + 2c\beta^V(\xi) + 2a\varepsilon\bar{\beta}^V(\xi), \\ d' &= \nabla_t^C d + 2c\beta^C(\xi) + 2d\beta^V(\xi) + 2a\varepsilon\bar{\beta}^C(\xi) + 2b\varepsilon\bar{\beta}^V(\xi). \end{aligned}$$

Учитывая условие леммы, будем иметь для функции a'

$$\begin{aligned}
a' = &\nabla_t^C \left(2R^V(\xi, ..., \xi)\right) + 4R^V(\xi, ..., \xi)\beta^V(\xi) + \\
&+ 4\varepsilon\bar{R}^V(\xi, ..., \xi)\bar{\beta}^V(\xi) = \\
= &2\left(\nabla^C R^V\right)(\xi, ..., \xi, \xi) + \\
&+ 2R^V\left(\nabla_t^C\xi, ..., \xi\right) + ... + 2R^V\left(\xi, ..., \nabla_t^C\xi\right) + \\
&+ 4\left(R^V \otimes \beta^V\right)(\xi, ..., \xi, \xi) + 4\varepsilon\left(\bar{R}^V \otimes \bar{\beta}^V\right)(\xi, ..., \xi, \xi) = \\
= &2\left(\nabla R + 2R \otimes \beta + 2\varepsilon\bar{R} \otimes \bar{\beta}\right)^V(\xi, ..., \xi, \xi) = \\
= &2R'^V(\xi, ..., \xi, \xi).
\end{aligned}$$

Проводя подобные рассуждения, получим выражение для функции b'

$$\begin{aligned}
b' = &2\left(\nabla R + 2R \otimes \beta + 2\varepsilon\bar{R} \otimes \bar{\beta}\right)^C(\xi, ..., \xi, \xi) = \\
= &2R'^C(\xi, ..., \xi, \xi).
\end{aligned}$$

Аналогично находим выражение для функции c'

$$\begin{aligned}
c' = &2\varepsilon\left(\nabla\bar{R} + 2\bar{R} \otimes \beta + 2R \otimes \bar{\beta}\right)^V(\xi, ..., \xi, \xi) = \\
= &2\varepsilon\bar{R}'^V(\xi, ..., \xi, \xi),
\end{aligned}$$

и для функции d'

$$\begin{aligned}
d' = &2\varepsilon\left(\nabla\bar{R} + 2\bar{R} \otimes \beta + 2R \otimes \bar{\beta}\right)^C(\xi, ..., \xi, \xi) = \\
= &2\varepsilon\bar{R}'^C(\xi, ..., \xi, \xi),
\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

Замечание. Тензорные поля R, $\bar{R} \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ и R', $\bar{R}' \in \mathfrak{T}_{r+1}^0(M)$ между собой тесно связаны. Именно, *если для любых векторных полей X_1, X_2, ..., X_r из $\mathfrak{X}(M)$ выполняется равенство,*

$$\bar{R}\left(X_1, X_2, ..., X_r\right) = R\left(F\left(X_1\right), X_2, ..., X_r\right),$$

то для произвольных векторных полей $X_1, X_2, ..., X_{r+1}$ *из* $\mathfrak{X}(M)$ *выполняется равенство*

$$\bar{R}'(X_1, X_2, ..., X_{r+1}) = R'(F(X_1), X_2, ..., X_{r+1}).$$

Для доказательства основной теоремы нам понадобиться следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $T \in \mathfrak{T}_r^0(E)$ *и* $P \in \mathfrak{T}_s^0(E)$ *симметрические тензоры, причем* $T \neq 0$. *Пусть для тензора* R *через* $S(R)$ *обозначается симметрирование. Тогда из равенства* $S(T \otimes P) = 0$ *следует равенство* $P = 0$.

Доказательство. Поскольку симметричный тензор T не равен нулю, то найдется такой вектор $Y \in E$, что $T(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}) \neq 0$. Возьмем произвольный вектор $X \in E$. Из определения симметрирования и равенства $S(T \otimes P) = 0$ будем иметь

$$0 = S(T \otimes P)(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}, \underbrace{Y, ..., Y}_{s}) = T(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}) \cdot P(\underbrace{Y, ..., Y}_{s}).$$

Поскольку $T(\underbrace{Y, ..., Y}_{r}) \neq 0$, то

$$P(\underbrace{Y, ..., Y}_{s}) = 0. \tag{121}$$

Учитывая равенство (121), получим

$$\begin{aligned}0 = S\,(T\otimes P)\,(\underbrace{Y,...,Y}_{r},X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1}) =\\ = s\cdot T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\cdot P(X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1})+\\ + r\cdot T(X,\underbrace{Y,...,Y}_{r-1})\cdot P(\underbrace{Y,...,Y}_{s}) =\\ = s\cdot T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\cdot P(X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1}).\end{aligned}$$

Поскольку $s\neq 0$ и $T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\neq 0$, то

$$P(X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1}) = 0. \tag{122}$$

Учитывая равенства (121) и (122), будем иметь

$$\begin{aligned}0 =&S\,(T\otimes P)\,(\underbrace{Y,...,Y}_{r},X,X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-2}) =\\ =&C_s^2\cdot T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\cdot P(X,X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-2})+\\ &+ C_r^1\cdot C_s^1\cdot T(X,\underbrace{Y,...,Y}_{r-1})\cdot P(X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-1})+\\ &+ C_r^2\cdot T(X,X,\underbrace{Y,...,Y}_{r-2})\cdot P(\underbrace{Y,...,Y}_{s}) =\\ =&C_s^2\cdot T(\underbrace{Y,...,Y}_{r})\cdot P(X,X,\underbrace{Y,...,Y}_{s-2}).\end{aligned}$$

Поскольку $C_s^2 \neq 0$ и $T(\underbrace{Y,...,Y}_{r}) \neq 0$, то

$$P(X, X, \underbrace{Y,...,Y}_{s-2}) = 0. \tag{123}$$

Продолжая так дальше, на шаге $k \leqslant s$ получим

$$P(\underbrace{X,...,X}_{k}, \underbrace{Y,...,Y}_{s-k}) = 0. \tag{k}$$

При $k = s$, получим $P(\underbrace{X,...,X}_{s}) = 0$. Из симметричности тензора P и произвольности вектора $X \in E$, находим $P = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть голоморфно-проективный диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ келеровых пространств (M, g, F) и $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{F})$ описывается уравнением*

$$\begin{aligned} \mu_* F &= \bar{F}, \\ P(X, Y) &= \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \\ &\quad + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X), \end{aligned}$$

где β — некоторый ковектор на M, $\bar{\beta} = \beta \circ F$, и X, Y произвольные векторные поля на M.

Тогда индуцированный диффеоморфизм

$$\mu_*\colon T(M) \to T(\bar{M})$$

касательных расслоений со связностями полных лифтов ∇^C и $\bar{\nabla}^C$ имеет линейный тип и обладает следующими уплощающими свойствами.

(1) *Индуцированный диффеоморфизм μ_* является 1–геодезическим диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$\beta = 0,$$

то есть когда диффеоморфизм μ является аффинным. При этом и диффеоморфизм μ_* будет аффинным.

(2) *Индуцированный диффеоморфизм μ_* является 2–геодезическим диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\beta \neq 0, \quad \nabla\beta + 2\beta \otimes \beta + 2\varepsilon\bar{\beta} \otimes \bar{\beta} = 0.$$

(3) *Индуцированный диффеоморфизм μ_* является 3–геодезическим диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\beta \neq 0, \quad T_2 \neq 0, \quad S\left(\begin{vmatrix} \beta^C & \bar{\beta}^V & \bar{\beta}^C \\ T_2{}^C & \bar{T}_2{}^V & \bar{T}_2{}^C \\ T_3{}^C & \bar{T}_3{}^V & \bar{T}_3{}^C \end{vmatrix}\right) = 0.$$

(4) *В общем случае, индуцированный диффеоморфизм μ_* является 4–геодезическим диффеоморфизмом линейного типа.*

Доказательство. Возьмем в M произвольным образом геодезическую кривую $\mathscr{C}$ отнесенную к каноническому параметру t, и найдем кривизны этой кривой относительно связности полного лифта $\widetilde{\nabla}^C$.

Пусть ξ — поле касательных векторов к кривой $\mathscr{C}$. Рассмотрим две функции $T_0, \bar{T}_0 \in \mathfrak{T}_0^0(M)$ определяемые правилом $T_0 = \frac{1}{2}$, $\bar{T}_0 = 0$. Тогда очевидно $T_0^V = \frac{1}{2}$, $T_0^C = 0$, $\bar{T}_0^V = 0$, $\bar{T}_0^C = 0$. С учетом этого, поле касательных векторов ξ представляется в виде

$$\xi = a_0 \cdot \delta(\xi) + b_0 \cdot \delta^V(\xi) + c_0 \cdot F^C(\xi) + d_0 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$a_0 = 2T_0^V, \quad b_0 = 2T_0^C, \quad c_0 = 2\varepsilon\bar{T}_0^V, \quad d_0 = 2\varepsilon\bar{T}_0^C.$$

Это показывает, что поле касательных векторов ξ удовлетворят условию леммы 1. Применяя ее, получим первую кривизну $\widetilde{\xi_1}$

$$\widetilde{\xi_1} = \widetilde{\nabla}_t^C \xi = a_1 \cdot \delta(\xi) + b_1 \cdot \delta^V(\xi) + c_1 \cdot F^C(\xi) + d_1 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 2T_1^V(\xi), & b_1 &= 2T_1^C(\xi), \\ c_1 &= 2\varepsilon \bar{T}_1^V(\xi), & d_1 &= 2\varepsilon \bar{T}_1^C(\xi). \end{aligned}$$

а тензорные поля $T_1, \bar{T}_1 \in \mathfrak{T}_1^0(M)$ определяются правилом

$$\begin{aligned} T_1 &= \nabla T_0 + 2T_0 \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{T}_0 \otimes \bar{\beta} = \beta, \\ \bar{T}_1 &= \nabla \bar{T}_0 + 2\bar{T}_0 \otimes \beta + 2T_0 \otimes \bar{\beta} = \bar{\beta}. \end{aligned}$$

К векторному полю $\widetilde{\xi_1}$ можно применить лемму 1, в результате чего получим выражение для второй кривизны

$$\widetilde{\xi_2} = \widetilde{\nabla}_t^C \widetilde{\xi_1} = a_2 \cdot \delta(\xi) + b_2 \cdot \delta^V(\xi) + c_2 \cdot F^C(\xi) + d_2 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= 2T_2^V(\xi, \xi), & b_2 &= 2T_2^C(\xi, \xi), \\ c_2 &= 2\varepsilon \bar{T}_2^V(\xi, \xi), & d_2 &= 2\varepsilon \bar{T}_2^C(\xi, \xi). \end{aligned}$$

а тензорные поля $T_2, \bar{T}_2 \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ определяются правилом

$$\begin{aligned} T_2 &= \nabla T_1 + 2T_1 \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{T}_1 \otimes \bar{\beta} = \nabla \beta + 2\beta \otimes \beta + 2\varepsilon \bar{\beta} \otimes \bar{\beta}, \\ \bar{T}_2 &= \nabla \bar{T}_1 + 2\bar{T}_1 \otimes \beta + 2T_1 \otimes \bar{\beta} = \nabla \bar{\beta} + 2\bar{\beta} \otimes \beta + 2\beta \otimes \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Согласно замечанию к лемме 1 из определения $\bar{\beta}(X) = \beta(F(X))$, получим равенство $\bar{T}_2(X, Y) = T_2(F(X), Y)$. Кроме того, тензорное поле T_2 является симметрическим. Это получается из следующих соображений. Ковекторное поле β, которое входит в уравнения голоморфно-проективного диффеоморфизма, является градиентным (см. [5]). Из определения тензорного поля T_2 получим требуемое.

К векторному полю $\widetilde{\xi}_2$ можно применить лемму 1, в результате чего получим выражение для третьей кривизны

$$\widetilde{\xi}_3 = \widetilde{\nabla}^C_t \widetilde{\xi}_2 = a_3 \cdot \delta(\xi) + b_3 \cdot \delta^V(\xi) + c_3 \cdot F^C(\xi) + d_3 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} a_3 &= 2T_3^V(\xi,\xi,\xi), & b_3 &= 2T_3^C(\xi,\xi,\xi), \\ c_3 &= 2\varepsilon\bar{T}_3^V(\xi,\xi,\xi), & d_3 &= 2\varepsilon\bar{T}_3^C(\xi,\xi,\xi). \end{aligned}$$

а тензорные поля $T_3, \bar{T}_3 \in \mathfrak{T}^0_3(M)$ определяются правилом

$$\begin{aligned} T_3 &= \nabla T_2 + 2T_2 \otimes \beta + 2\varepsilon\bar{T}_2 \otimes \bar{\beta}, \\ \bar{T}_3 &= \nabla \bar{T}_2 + 2\bar{T}_2 \otimes \beta + 2T_2 \otimes \bar{\beta}. \end{aligned}$$

К векторному полю $\widetilde{\xi}_3$ можно применить лемму 1, в результате чего получим выражение для четвертой кривизны $\widetilde{\xi}_4$.

$$\widetilde{\xi}_4 = \widetilde{\nabla}^C_t \widetilde{\xi}_3 = a_4 \cdot \delta(\xi) + b_4 \cdot \delta^V(\xi) + c_4 \cdot F^C(\xi) + d_4 \cdot F^V(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} a_4 &= 2T_4^V(\xi,\xi,\xi,\xi), & b_4 &= 2T_4^C(\xi,\xi,\xi,\xi), \\ c_4 &= 2\varepsilon\bar{T}_4^V(\xi,\xi,\xi,\xi), & d_4 &= 2\varepsilon\bar{T}_4^C(\xi,\xi,\xi,\xi). \end{aligned}$$

а тензорные поля $T_4, \bar{T}_4 \in \mathfrak{T}^0_4(M)$ определяются правилом

$$\begin{aligned} T_4 &= \nabla T_3 + 2T_3 \otimes \beta + 2\varepsilon\bar{T}_3 \otimes \bar{\beta}, \\ \bar{T}_4 &= \nabla \bar{T}_3 + 2\bar{T}_3 \otimes \beta + 2T_3 \otimes \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к рассмотрению уплощающих свойств.

1). Очевидно

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 = b_1 \cdot \delta(\xi) \wedge \delta^V(\xi) + \\ + c_1 \cdot \delta(\xi) \wedge F^C(\xi) + d_1 \cdot \delta(\xi) \wedge F^V(\xi).$$

Отсюда следует, что равенство

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 = 0 \tag{124}$$

равносильно равенствам

$$b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_1 = 0. \tag{124$'$}$$

Равенство $c_1 = 0$ равносильно равенству $\bar{\beta}^V(\xi) = 0$. Поскольку геодезическая кривая $\mathscr{C}$ выбирается произвольным образом, последнее равенство выполняться для любого ξ, что влечет равенство $\bar{\beta}^V = 0$. Последнее равенство эквивалентно условию

$$\beta = 0. \tag{124$''$}$$

С другой стороны, равенство (124$''$) обеспечивает выполнение всех равенств в условии (124$'$). Значит, равенство (124) равносильно равенству (124$''$) .

Таким образом, индуцированный диффеоморфизм μ_* является 1–геодезическим диффеоморфизмом для касательных расслоений тогда и только тогда, когда $\beta = 0$. Отсюда получим равенство $P = 0$, которое показывает, что голоморфно-проективный диффеоморфизм μ является аффинным. При этом выполняются равенства $\beta^V = 0$, $\beta^C = 0$, $\bar{\beta}^V = 0$, $\bar{\beta}^C = 0$, из которых следует $\widetilde{P} = 0$. Это показывает, что индуцированный диффеоморфизм так же является аффинным.

2). Очевидно

$$\xi\wedge\widetilde{\xi}_1\wedge\widetilde{\xi}_2=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\delta(\xi)\wedge\delta^V(\xi)\wedge F^C(\xi)+ \\ +\begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & d_2\end{vmatrix}\delta(\xi)\wedge\delta^V(\xi)\wedge F^V(\xi)+ \\ +\begin{vmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}\delta(\xi)\wedge F^C(\xi)\wedge F^V(\xi).$$

Отсюда следует, что равенство

$$\xi\wedge\widetilde{\xi}_1\wedge\widetilde{\xi}_2=0, \tag{125}$$

равносильно условиям

$$\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & d_2\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}=0. \tag{125′}$$

Равенства (125′) равносильны соответственно равенствам

$$\begin{vmatrix}\beta^C(\xi) & \bar{\beta}^V(\xi)\\ {T_2}^C(\xi,\xi) & \bar{T}_2^V(\xi,\xi)\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}\beta^C(\xi) & \bar{\beta}^C(\xi)\\ {T_2}^C(\xi,\xi) & \bar{T}_2^V(\xi,\xi)\end{vmatrix}=0, \\ \begin{vmatrix}\bar{\beta}^V(\xi) & \bar{\beta}^C(\xi)\\ \bar{T}_2^V(\xi,\xi) & \bar{T}_2^C(\xi,\xi)\end{vmatrix}=0,$$

которые выполняются для любой геодезической кривой $\mathscr{C}$. Для произвольной точки $\widetilde{p}\in\mathscr{C}$ будем иметь

$$\begin{gathered}\begin{vmatrix}\beta^C(\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{\beta}^V(\xi)\big|_{\widetilde{p}}\\ {T_2}^C(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{T}_2^V(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}}\end{vmatrix}=0,\\ \begin{vmatrix}\beta^C(\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{\beta}^C(\xi)\big|_{\widetilde{p}}\\ {T_2}^C(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{T}_2^C(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}}\end{vmatrix}=0,\\ \begin{vmatrix}\bar{\beta}^V(\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{\beta}^C(\xi)\big|_{\widetilde{p}}\\ \bar{T}_2^V(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}} & \bar{T}_2^C(\xi,\xi)\big|_{\widetilde{p}}\end{vmatrix}=0.\end{gathered} \tag{126}$$

Возьмем произвольную точку $p \in M$, и векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$. Пусть $\big(U; u^h\big)$ координатная окрестность в точке p, и $\big(\pi^{-1}(U); x^h, y^h\big)$ ее индуцированная координатная окрестность в касательном расслоении $T(M)$ ($x^h = u^h, y^h = u^{\bar{h}}$). Пусть ковекторные поля β, $\bar{\beta}$ и тензорные поля T_2, $\bar{T}_2$ в координатной окрестности $\big(U; u^h\big)$ имеют компоненты β_k, $\bar{\beta}_k$ и $T_{2\,ij}$, $\bar{T}_{2\,ij}$ соответственно. Тогда в индуцированной координатной окрестности лифты β^C, $\bar{\beta}^V$, $\bar{\beta}^C$ и T_2^C, $\bar{T}_2^V$, $\bar{T}_2^C$ будут иметь соответственно компоненты

$$\beta^C : (\partial\beta_k, \beta_k)\,, \quad \bar{\beta}^V : \big(\bar{\beta}_k, 0\big)\,, \quad \bar{\beta}^C : \big(\partial\bar{\beta}_k, \bar{\beta}_k\big)\,,$$
$$T_2{}^C : \begin{pmatrix} \partial T_{2\,ij} & T_{2\,ij} \\ T_{2\,ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}_2^V : \begin{pmatrix} \bar{T}_{2\,ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\bar{T}_2^C : \begin{pmatrix} \partial\bar{T}_{2\,ij} & \bar{T}_{2\,ij} \\ \bar{T}_{2\,ij} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем точку $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ так, чтобы $\pi\left(\widetilde{p}\right) = p$ и $\widetilde{p} = (p, y)$, где $y^s = 0$. Возьмем некоторый касательный вектор $\tau \in T_{\widetilde{p}}\left(T(M)\right)$ с компонентами $\tau = \big(X_p^h, X_p^h\big)$. Проведем через точку $\widetilde{p}$ в направлении вектора τ геодезическую кривую $\mathscr{C}$. Если ξ поле касательных векторов вдоль кривой $\mathscr{C}$, то $\xi|_{\widetilde{p}} = \tau$. В таком случае, равенства (126) примут вид

$$\begin{vmatrix} \beta(X)|_p & \bar{\beta}(X)\big|_p \\ 2\,T_2(X,X)\big|_p & \bar{T}_2(X,X)\big|_p \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \beta(X)|_p & \bar{\beta}(X)\big|_p \\ 2\,T_2(X,X)\big|_p & 2\,\bar{T}_2(X,X)\big|_p \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \bar{\beta}(X)\big|_p & \bar{\beta}(X)\big|_p \\ \bar{T}_2(X,X)\big|_p & 2\,\bar{T}_2(X,X)\big|_p \end{vmatrix} = 0,$$

из которых получим

$$\bar{\beta}(X)\big|_p \cdot T_2(X,X)|_p = 0,\ \beta(X)|_p \cdot \bar{T}_2(X,X)\big|_p = 0,$$
$$\bar{\beta}(X)\big|_p \cdot \bar{T}_2(X,X)\big|_p = 0.$$

Поскольку точка $p \in M$ была взята произвольно, мы приходим к равенству

$$\bar{\beta}(X) \cdot T_2(X,X) = 0, \quad \beta(X) \cdot \bar{T}_2(X,X) = 0,$$
$$\bar{\beta}(X) \cdot \bar{T}_2(X,X) = 0,$$

которое выполняется для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$. Последнее означает, что

$$S\left(\bar{\beta} \otimes T_2\right) = 0, \quad S\left(\beta \otimes \bar{T}_2\right) = 0, \quad S\left(\bar{\beta} \otimes \bar{T}_2\right) = 0, \tag{127}$$

где $S\,(R)$ обозначает симметрирование тензорного поля $R \in \mathfrak{T}^0_r(M)$.

Возможны два случая: $\bar{\beta}_p \neq 0$ и $\bar{\beta}_p = 0$.

Случай $\bar{\beta}_p \neq 0$. Первое равенство в (127) в точке p примет вид

$$S\left(\bar{\beta}\big|_p \otimes T_2|_p\right) = 0.$$

Поскольку $T_2|_p$ симметрический тензор, то из леммы 2 получим

$$T_2\big|_p = 0.$$

Случай $\bar{\beta}_p = 0$. Очевидно, что и $\beta_p = 0$. Возможны два варианта: $\nabla\bar{\beta}\big|_p = 0$ и $\nabla\bar{\beta}\big|_p \neq 0$.

Вариант $\nabla\bar{\beta}\big|_p \neq 0$. Пусть Γ^h_{ij} — компоненты аффинной связности ∇ в координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$. Тогда компоненты $\nabla_j\bar{\beta}_i$ ковариантного дифференциала $\nabla\bar{\beta}$ ковекторного поля $\bar{\beta}$ в координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$

имеют вид

$$\nabla_j \bar{\beta}_i = \partial_j \bar{\beta}_i - \Gamma^{\alpha}_{ji} \bar{\beta}_{\alpha}.$$

Отсюда в точке p получим

$$\nabla_j \bar{\beta}_i \big|_p = \partial_j \bar{\beta}_i \big|_p - \Gamma^{\alpha}_{ji} \big|_p \cdot \bar{\beta}_{\alpha} \big|_p = \partial_j \bar{\beta}_i \big|_p .$$

Найдутся такой вектор $y = (y^s) \in \mathbb{R}^n$ и такое векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(M)$, что

$$y^s \, \partial_s \bar{\beta}_i \big|_p \cdot Y^i_p = y^s \, \nabla_s \bar{\beta}_i \big|_p \cdot Y^i_p \neq 0.$$

Рассмотрим точку $\widetilde{p} = (p, y) \in T(M)$. Тогда в индуцированной координатной окрестности

$$\bar{\beta}^V \big|_{\widetilde{p}} = \left(\bar{\beta}_k \big|_p , 0 \right) = 0,$$

и

$$\bar{\beta}^C \left(Y^C \right) \big|_{\widetilde{p}} = \partial \bar{\beta}_k \big|_{\widetilde{p}} \cdot Y^k_p + \bar{\beta}_k \big|_p \cdot \partial Y^{\bar{k}}_{\widetilde{p}} = y^s \, \partial_s \bar{\beta}_k \big|_p \cdot Y^k_p \neq 0,$$

что показывает $\bar{\beta}^C \big|_{\widetilde{p}} \neq 0$.

Нетрудно показать, что для произвольного тензорного поля $R \in \mathfrak{T}^0_r(M)$ выполняются равенства

$$S\left(R\right)^V = S\left(R^V\right), \quad S\left(R\right)^C = S\left(R^C\right).$$

Из последнего равенства и первого равенства в (127) получим равенство

$$S\left(\bar{\beta}^V \otimes {T_2}^C + \bar{\beta}^C \otimes {T_2}^V\right) = 0,$$

которое в точке $\widetilde{p}$ примет вид

$$S\left(\bar{\beta}^V \big|_{\widetilde{p}} \otimes {T_2}^C \big|_{\widetilde{p}} + \bar{\beta}^C \big|_{\widetilde{p}} \otimes {T_2}^V \big|_{\widetilde{p}} \right) = 0.$$

Поскольку $\bar{\beta}^V \big|_{\widetilde{p}} = 0$, то из последнего равенства будем иметь

$$S\left(\bar{\beta}^C \big|_{\widetilde{p}} \otimes {T_2}^V \big|_{\widetilde{p}} \right) = 0.$$

Учитывая неравенство $\bar{\beta}^C\big|_{\widetilde{p}} \neq 0$ и симметричность тензора $T_2{}^V\big|_{\widetilde{p}}$, из леммы 2 получим $T_2{}^V\big|_{\widetilde{p}} = 0$, что влечет равенство (4).

Вариант $\nabla\bar{\beta}\big|_p = 0$. По определению тензорного поля $\bar{T}_2$ получим

$$\bar{T}_2\big|_p = \nabla\bar{\beta}\big|_p + 2\,\bar{\beta}\big|_p \otimes \beta\big|_p + 2\,\beta\big|_p \otimes \bar{\beta}\big|_p = 0.$$

Учитывая связь тензорных полей $\bar{T}_2$ и T_2, отсюда снова приходим к равенству (4). Поскольку последнее равенство выполняется в каждой точке $p \in M$, получаем равенство

$$T_2 = 0. \tag{125''}$$

С другой стороны, из условия (125″) получим $\bar{T}_2 = 0$, и значит

$$T_2^V = 0, \quad T_2^C = 0, \quad \bar{T}_2^V = 0, \quad \bar{T}_2^C = 0,$$

что в свою очередь, ведет к выполнению условия (125′).

Таким образом, для того что бы индуцированный диффеоморфизм μ_* был 2-геодезическим диффеоморфизмом необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия $\beta \neq 0$ и $T_2 = 0$.

3). Очевидно

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 \wedge \widetilde{\xi}_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \delta(\xi) \wedge \delta^V(\xi) \wedge F^C(\xi) \wedge F^V(\xi).$$

Отсюда следует, что равенство

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 \wedge \widetilde{\xi}_3 = 0, \tag{128}$$

равносильно условию

$$(128') \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее выполняется для произвольного векторного поля ξ. Поэтому оно равносильно равенству

$$(128'') \qquad S\left(\begin{vmatrix} \beta^C & \bar{\beta}^V & \bar{\beta}^C \\ T_2{}^C & \bar{T}_2{}^V & \bar{T}_2{}^C \\ T_3{}^C & \bar{T}_3{}^V & \bar{T}_3{}^C \end{vmatrix}\right) = 0.$$

Таким образом, для того, что бы индуцированный диффеоморфизм μ_* был 3-геодезическим диффеоморфизмом необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия $\beta \neq 0$, $\bar{T}_2 \neq 0$ и (128″).

4). Очевидно выполняется равенство

$$\xi \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \widetilde{\xi}_2 \wedge \widetilde{\xi}_3 \wedge \widetilde{\xi}_4 = 0.$$

Оно показывает, что в общем случае, индуцированный диффеоморфизм является 4-геодезическим. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е . Нетрудно заметить, что равенство $T_3 = 0$ обеспечивает выполнение условия (128″). Таким образом, для того, что бы индуцированный диффеоморфизм являлся 3–геодезическим диффеоморфизмом, достаточно, чтобы выполнялись условия $\beta \neq 0$, $T_2 \neq 0$ и $T_3 = 0$.

Список литературы

[1] С. Г. Лейко, *Линейные p-геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений высших порядков и высших степеней.* - Тр. Геометрич. семин. - Казань (1982), вып. 14, с. 34-46.

[2] С. Г. Лейко, *Р - геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия.* - Изв. вузов. Математика. (1992), №2, с. 62-71.

[3] С. Г. Лейко, *Р - геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия.* - Изв. вузов. Математика. (1998), №6, с. 35-45.

[4] С. Г. Лейко, *Р - геодезические сечения касательного расслоения.* - Изв. вузов. Математикав. (1994), №3, с. 32-42.

[5] Н. С. Синюков, И. Н. Курбатова, Й. Микеш. *Голоморфно - проективные отображения келеровых пространств.* Учеб. пособие. - Одесса: ОГУ, 1985 - 69с.

[6] С. Г. Лейко, *Рiманова геометрiя*: Навчальний посiбник. Одеса: Астропринт (2000)

[7] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles.* Differential geometry. - New York: Marcel Dekker (1973)