

О. А. Кадубовський

Институт математики НАН України

E-mail: kadubovs@imath.kiev.ua

Топологічна класифікація градієнтноподібних векторних полів з однією сідловою особливістю

За допомогою гладких функцій на замкненій орієнтованій поверхні, у яких крім локальних максимумів і мінімумів є лише одна вироджена критична точка типу сідла встановлено критерій топологічної еквівалентності гладких векторних полів без замкнених і гомоклінічних траєкторій, множина критичних елементів яких складається з джерел, стоків та однієї сідлової особливості. В залежності від роду орієнтованої поверхні наведено точне значення числа топологічно нееквівалентних полів з вказаного класу, у яких лише одне джерело та один стік.

By means of smooth functions that possess only one saddle critical point in addition to local maxima and minima we give a necessary and sufficient condition for topological equivalence of smooth vector fields which satisfies the following conditions: 1) it has a finite number of critical elements (there are only one saddle, sources and sinks), 2) the α -limit and ω -limit sets of any trajectory are critical elements, 3) there are no saddle connections and closed trajectory. We also calculated the number of non equivalent such fields with one source and one sink on closed oriented surfaces of genus $g \geq 2$.

Ключові слова: *Векторне поле, функція Ляпунова, топологічна класифікація*

ВСТУП

Відомо, що для топологічної класифікації полів Морса–Смейла без замкнених траєкторій (полів Морса) на орієнтованих поверхнях ефективно використовуються функції

© О. А. Кадубовський, 2006

Ляпунова з трьома критичними значеннями [4]. Більше того, класичним результатом є той факт, що кожне поле Морса є полем градієнта деякої функції Морса.

Для градієнтноподібних векторних полів з ізольованими особливостями існує функція Ляпунова. І тому для топологічної класифікації таких полів виникає потреба в дослідженні гладких функцій відповідного класу на поверхнях. Серед робіт, присвячених класифікації гладких функцій на поверхнях, слід відмітити роботи А.В.Болсінова, Е.В.Кулініча, А.О.Опемкова, О.О.Пришляка, В.В.Шарка та ін. Зокрема, в роботі Шарка [6] досліджено питання топологічної класифікації гладких функцій з класу $C^\infty(N)$ з трьома критичними значеннями на поверхні N , всі критичні точки яких є ізольованими і лежать у внутрішності N на одній лінії рівня.

Як було зазначено вище, виникає потреба в класифікації більш широкого класу $L(N)$ "градієнтноподібних" векторних полів без замкнених траєкторій, множина критичних елементів яких складається з джерел, стоків та (складних) сідел — особливих точок цілого від'ємного індексу.

Очевидно, що поле градієнта кожної функції з класу $C^\infty(N)$ належить множині $L(N)$. І тому для класифікації таких полів доцільно використовувати функції з класу $C^\infty(N)$.

В загальному випадку питання топологічної класифікації таких полів залишається відкритим.

В даній роботі за допомогою гладких функцій, у яких крім локальних максимумів і мінімумів є лише одна вироджена критична точка типу сідла, отримана топологічна класифікація векторних полів з класу $L_{M,m}(N_g^2)$ на орієнтованій поверхні N_g^2 , які задовольняють умови:

1) поле $X \in L_{m,M}(N_g^2)$ має скінченне число критичних елементів, 2) відсутні замкнені траєкторії, а множина особливих точок поля X складається з m джерел, M стоків та однієї сідлової особливості (складне сідло), 3) відсутні траєкторії, ω - і α -граничною множинами яких є сідло (відсутні гомоклінічні траєкторії), 4) для кожної траєкторії поля її ω - і α -граничні множини є особливими точками поля.

1. НЕОБХІДНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ЗАУВАЖЕННЯ

Нехай N_g^2 — замкнена, гладка, орієнтована поверхня роду g , а $X \in L_{m,M}(N_g^2)$. Тоді, як наслідок з теореми Пуанкаре-Хопфа, індекс Пуанкаре поля X єдиної сідлової особливості s_0 дорівнює $\text{ind}(X, s_0) = 2 - 2g - m - M$, де g — рід поверхні N_g^2 . Останнє означає, що в сідло s_0 входить (виходить) точно $n = 2g + m + M - 1$ сепаратрис.

Означення 1. *Векторні поля $X, Y \in L_{m,M}(N_g^2)$ будемо називати топологічно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $h : N_g^2 \rightarrow N_g^2$ (що зберігає орієнтацію), який переводить траєкторії поля X в траєкторії поля Y зі збереженням орієнтації на них.*

Означення 2. *Дві гладкі функції f і g на поверхні N_g^2 називають топологічно еквівалентними, якщо існують такі гомеоморфізми $k : N_g^2 \rightarrow N_g^2$ і $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що $f = l \circ g \circ k^{-1}$. В подальшому будемо вважати, що гомеоморфізми k і l зберігають орієнтацію.*

Через $C_{m,M}(N_g^2)$ позначимо клас гладких функцій з M максимумами, m мінімумами та однією виродженою критичною точкою типу сідла на замкненій орієнтованій поверхні N_g^2 .

2. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Нижче покажемо, що кожному векторному полю X з класу $L_{m,M}(N_g^2)$ можна поставити у відповідність функцію *Ляпунова*, тобто, таку гладку функцію $f_X : N_g^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє наступні умови:

- 1) функція f_X строго спадає вздовж інтегральних траєкторій поля X ,
- 2) критичні точки функції f_X співпадають з особливими точками поля X : мінімуми функції f_X співпадають з джерелами r_1, r_2, \dots, r_m поля X , максимуми f_X — зі стоками p_1, p_2, \dots, p_M поля X , а (вироджена) критична точка типу сідла функції f_X — з сідловою особливістю s_0 поля.

Лема 1. *Для кожного векторного поля $X \in L_{m,M}(N_g^2)$ існує функція Ляпунова.*

Доведення. Доведення цього твердження проведемо за схемою, запропонованою Мейером в роботі [2] при встановленні аналогічного результату для полів Морса–Смейла.

Нехай $\beta_i = r_i$, $i = 1, \dots, m$ джерела поля X , $\beta_{m+j} = p_j$, $j = 1, \dots, M$ — стоки, а $\beta_0 = s_0$ — сідло поля X . Розглянемо дискові околи D_k критичних елементів β_k , $k = 0, \dots, m+M$. Через скінченність числа особливих точок поля X вказані околи можна обрати так, щоб вони не перетинались.

Оскільки поле X в околах джерел (рис. 4 А) топологічно еквівалентне полю $X_r = \text{grad}(x^2 + y^2)$, то, локально, в околах D_k ($k = m+1, \dots, m+M$) функцію f_X можна задати у вигляді $f_X = x^2 + y^2$.

Аналогічно, з того що поле X в околах стоків (рис. 4 В) топологічно еквівалентне полю $X_p = \text{grad}(-x^2 - y^2)$, то, локально, функцію f_X в околах D_k ($k = 1, \dots, m$) можна задати у вигляді $f_X = -x^2 - y^2$.

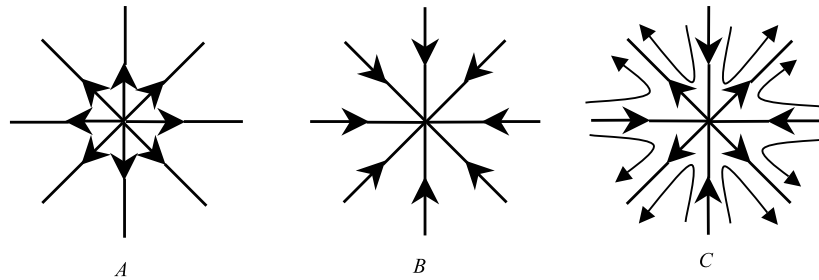


Рис. 4. Джерело, сток і складне сідло

Добре відомо (див. напр. [5]), що векторне поле X в околі складного сідла (рис. 4 C) є топологічно еквівалентним полю $X_s = \text{grad}(\text{Re}z^n)$, де $\text{Re}z^n$ — дійсна частина комплексного числа $z^n = (x + iy)^n$. Тоді, локально, в околі D_0 складного сідла s_0 функцію f_X задамо як $f_X = \text{Re}z^n$, де n — число сепаратрис які входять (або виходять) в сідло. Отже, функцію f_X визначено в околах усіх особливих точок поля X .

Продовження функції f_X на всю поверхню N_g^2 можна задати так, як описано в роботі Смейла [1]. *Основна ідея полягає в наступному.* Оскільки для кожної траєкторії поля $X \in L_{m,M}(N_g^2)$ її α - і ω -граничні множини є особливими точками — джерелом, стоком або сідлом, то функцію f_X можна продовжити (визначити) на сепаратрисах сідла.

Наступним кроком є продовження функції f_X вздовж трубчастих околів V_j ($j = 1, \dots, 2n$) сепаратрис.

Нехай $U = D_i \cup_{i,j} V_j$, $i = 0, \dots, m + M$, $j = 1, \dots, 2n$. Ясно, що доповнення U до N_g^2 складається з незв'язного об'єднання скінченного числа q двомірних клітин — дисків D'_j , $j = 1, \dots, q$. Границею кожного такого диску є коло, яке складається з дуг граничних кіл дисків D_i та границь

смуг V_j . Тому функцію f_X можна продовжити на кожен з дисків D'_j .

Таким чином, функцію f_X , побудовану за полем X , визначено на всій поверхні N_g^2 і вона задовольняла умови визначення функції Ляпунова. \square

Означення 3. Функцію Ляпунова f_X для поля $X \in L_{m,M}(N_g^2)$ будемо називати L -функцією і позначати \widehat{f}_X , якщо $f_X : N_g^2 \rightarrow [-1, 1]$ має три критичні значення. А саме: лінія рівня $f_X^{-1}(-1)$ містить джерела r_1, r_2, \dots, r_m поля X , $f_X^{-1}(0)$ містить сідлову особливість s_0 , а $f_X^{-1}(1)$ — всі стоки p_1, p_2, \dots, p_M поля X .

Означення 4. Векторні поля X, Y з класу $L_{m,M}(N_g^2)$ будемо називати L -еквівалентними, якщо відповідні їм L -функції $\widehat{f}_X, \widehat{f}_Y : N_g^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є топологічно еквівалентними.

Теорема 1. Два поля $X, X' \in L_{m,M}(N_g^2)$ топологічно еквівалентні тоді і лише тоді, коли вони L -еквівалентні.

Доведення. Нехай $h : N_g^2 \rightarrow N_g^2$ — топологічна еквівалентність між полями $X, X' \in L_{m,M}(N_g^2)$, а $f = \widehat{f}_X$ і $f' = \widehat{f}_{X'}$ відповідні цим полям L -функції. Для доведення необхідності достатньо показати, що якщо функції f і f' топологічно еквівалентні в околах сингулярних точок, то вони є топологічно еквівалентними.

Спочатку покажемо, що для топологічно еквівалентних полів X і X' функції f і f' є топологічно еквівалентними в околах критичних точок. Припустимо, що особливі точки β_i, β'_i полів X і X' занумеровано так, що $h(\beta_i) = \beta'_i \forall i = 0, \dots, m + M$. Позначимо через δ_i, δ'_i критичні точки функцій f і f' . Без обмеження загальності, можна вважати, що $\beta_i = \delta_i$, а $\beta'_i = \delta'_i$ при всіх $i = 0, \dots, m + M$.

Розглянемо малі дискові околи D_i, D'_i джерел β_i, β'_i , які співпадають з мінімумами δ_i, δ'_i функцій f і f' . Оскільки поля X і X' в цих околах є топологічно еквівалентними полю $X_r = \text{grad}(x^2 + y^2)$, а лінії рівня функцій f і f' трансверсально перетинають інтегральні траєкторії (полів X і X' відповідно), що виходять з β_i і β'_i , то функції f і f' є топологічно еквівалентними в указаних околах — рис. 5.

З аналогічних міркувань впливає справедливості того, що функції f і f' є топологічно еквівалентними і в деяких дискових околах D_i, D'_i максимумів δ_i, δ'_i , які співпадають зі стоками полів X і X' .

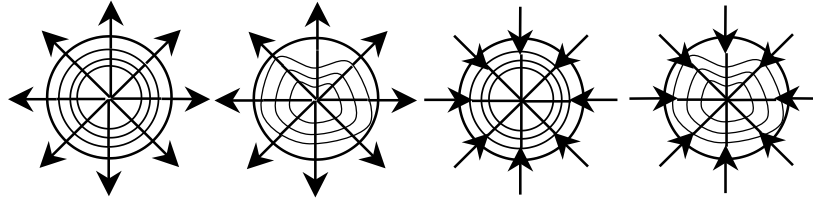


Рис. 5. Дискові околи джерел і стоків полів X і X'

Слід відмітити, що топологічна еквівалентність функцій f і f' в околах мінімаксних точок є наслідком результатів роботи [3], в якій показано, що для будь-якого локального мінімуму (максимуму) гладкої функції $f : N_g^2 \rightarrow \mathbb{R}$ існує окіл, в якому f неперервною заміною координат зводиться до вигляду $f = x^2 + y^2$ ($f = -x^2 - y^2$).

Нехай тепер β_0 — сідло поля X , $\beta'_0 = h(\beta_0)$ сідло поля X' . Розглянемо такий дисковий окіл D_0 сідла β_0 (хрест — рис. 6), границя якого складається з відрізків інтегральних траєкторій (дуг хреста) та відрізків ліній рівня функції f (сторін хреста).

Оскільки кожна з функцій f і f' в околах сідлових критичних точок δ_0, δ'_0 топологічно еквівалентна функції

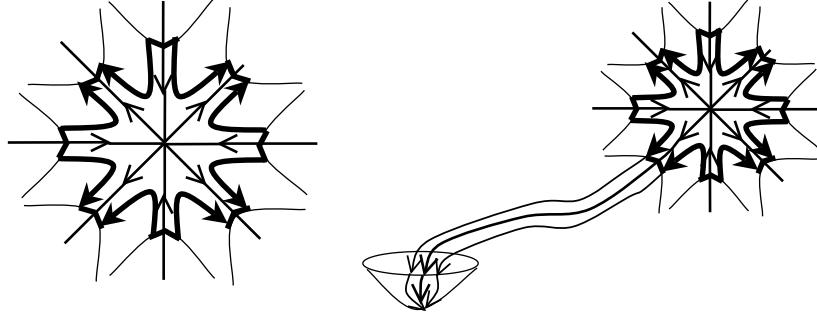


Рис. 6. D_0 -окол сідла (хрест) і V -окол сепаратриси

$f_s = \text{Re}z^n$, і в указаних околах D_0 і D'_0 лінії рівня кожної з них перетинають інтегральні траєкторії відповідного поля трансверсально, то f і f' топологічно еквівалентні у вказаних околах.

Отже, функції f і f' є топологічно еквівалентними в околах сингулярних точок.

Далі розглянемо такі околи V_i відрізків сепаратрис τ_i сідла s_0 , границями яких (границями смуг) також є інтегральні траєкторії поля X . Очевидно, що кожен такий окол є "прямокутником", дві протилежні сторони якого є інтегральними траєкторіями поля, одна з двох інших сторін є дугою граничного кола дискового околу деякого джерела, або стока, а інша сторона — відрізком лінії рівня функції f (стороною хреста).

За визначенням функції Ляпунова відрізки ліній рівня функції f перетинають інтегральні криві кожного такого околу V_i трансверсально.

Аналогічне має місце і для околів $V'_i = h(V_i)$ сепаратрис $\tau'_i = h(\tau_i)$ сідла s'_0 поля X' .

З того, що функції f і f' в околах V_i, V'_i не мають критичних точок, а відрізки їх ліній рівня перетинають інтегральні криві відповідних околів трансверсально випливає, що f і f' є топологічно еквівалентними в околах V_i, V'_i .

Нехай $U = D_i \cup_{i,j} V_j$, $i = 0, \dots, m + M$, $j = 1, \dots, 2n$. Зрозуміло, що доповнення U до N_g^2 є незв'язним об'єднанням скінченного числа r двовірних дисків Δ_j , $j = 1, \dots, r$.

Границею кожного такого диску є коло, яке складається з дуг граничних кіл дисків D_i та границь смуг V_j . А саме, кожен такий окіл має вид, зображений на рис. 7.

Оскільки функції f і f' в околах Δ_i і $\Delta'_i = h(\Delta_i)$ не мають критичних точок, а їх лінії рівня трансверсально перетинають відрізки інтегральних кривих, то f і f' є топологічно еквівалентними в указаних околах (рис. 7).

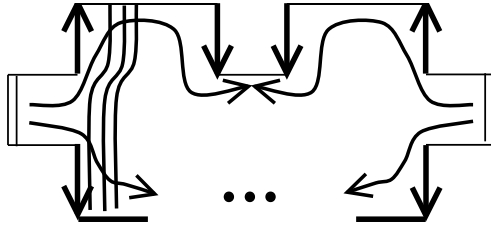


Рис. 7. Окіл Δ_i з лініями рівня функції f

Таким чином, оскільки функції f і f' топологічно еквівалентні в околах D_i, D'_i сингулярних точок, в околах V_i, V'_i відрізків сепаратрис τ_i, τ'_i сідел s_0, s'_0 (які співпадають з сідловими критичними точками δ_0, δ'_0 цих функцій) та на доповненнях $N_g^2 \setminus (D_i \cup_{i,j} V_j)$, $N_g^2 \setminus (D'_i \cup_{i,j} V'_j)$, то існує глобальний гомеоморфізм $h : N_g^2 \rightarrow N_g^2$, такий що $f \circ h = f'$. Отже, L -функції f і f' для топологічно еквівалентних полів X і X' також еквівалентні.

Нехай тепер $h : N_g^2 \rightarrow N_g^2$ — гомеоморфізм, який переводить лінії рівня функції f в лінії рівня функції f' .

Нехай далі δ_i і $h(\delta_i) = \delta'_i$ — критичні точки функцій f і f' , а β_i і β'_i — особливі точки полів X і X' . Як і раніше будемо вважати, що $\beta_i = \delta_i$, $\beta'_i = \delta'_i \forall i = 0, \dots, m + M$.

З того що функції f і f' є топологічно еквівалентними в околах локальних максимумів (мінімумів) випливає, що поля X і X' топологічно еквівалентні в деяких околах D_i, D'_i джерел (стоків) $\beta_i = \delta_i$ і $\beta'_i = h(\delta'_i)$.

Розглянемо лінію рівня $\Gamma_0 = f^{-1}(0)$, якій належить сідлова критична точка δ_0 функції f . Не важко бачити, що Γ_0 є букетом n кіл. За визначенням $\Gamma_0 \setminus \delta_0$ трансверсально перетинає траєкторії поля X . Зафіксуємо досить мале $\varepsilon > 0$. Тоді лінія рівня $\Gamma_- = f^{-1}(-\varepsilon)$ ($\Gamma_+ = f^{-1}(\varepsilon)$) є незв'язним об'єднанням m (відповідно M) кіл S^1 і також трансверсально перетинає траєкторії поля X .

Розглянемо дисковий окіл D_0 сідлової критичної точки δ_0 , яка співпадає з сідлом β_0 поля X . При досить малому ε окіл D_0 можна обрати так, щоб він являв собою "хрест", сторонами якого є відрізки інтегральних кривих поля X , а дугами — відрізки ліній рівня Γ_- та Γ_+ — рис. 8.

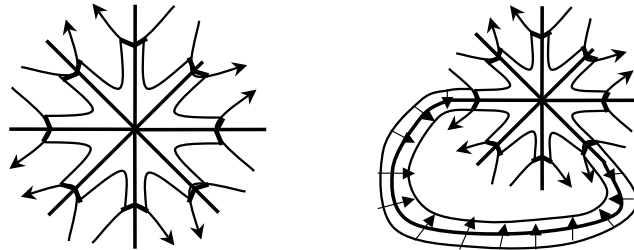


Рис. 8. Окіл D_0 сідлової критичної точки і Υ -оکیل відрізка лінії рівня Γ_0 функції f

Зрозуміло, що у вибраних нами околах D_0 і $D'_0 = h(D_0)$ поля X і X' топологічно еквівалентні, оскільки, локально, вони еквівалентні полю $X_s = \text{grad}(\text{Re}z^n)$.

Позначимо через $N_\varepsilon = f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ ε -окіл критичного рівня Γ_0 . Тоді доповнення околу D_0 до N_ε складається з незв'язного об'єднання множин Υ_i — ε -околів відрізків лінії рівня Γ_0 . Границею кожного такого околу (смужки) є відрізки ліній рівня Γ_- , Γ_+ та відрізки інтегральних кривих (сторони креста D_0) поля — рис. 8.

Оскільки поле X (X') в околі Υ_i ($\Upsilon'_i = h(\Upsilon_i)$) не має особливих точок, а усі відрізки лінії рівня $f^{-1}(\lambda)$ ($f'^{-1}(\lambda)$), $-\varepsilon \leq \lambda \leq \varepsilon$, що належать Υ_i (Υ'_i) трансверсальні інтегральним траєкторіям поля X (X'), то з цього випливає, що X і X' топологічно еквівалентні в цих околах.

Нехай $W = (\bigcup_k \Upsilon_k) \cup (\bigcup_i D_i)$. Тоді доповнення W до N_g^2 складається з незв'язного об'єднання скінченного числа q циліндрів $C_i \cong S^1 \times I$ ($i = 1, \dots, q$). Одним з граничних кіл кожного такого циліндру є граничне коло дискового околу мінімуму (максимуму), а друге граничне коло належить лінії рівня $f^{-1}(-\varepsilon)$ (або $f^{-1}(\varepsilon)$ відповідно).

Оскільки векторні поля X і X' на циліндрах C_i , $h(C_i)$ не мають особливих точок, а граничні кола відповідних циліндрів перетинають траєкторії полів трансверсально, то поля X і X' є топологічно еквівалентними на кожній парі таких циліндрів.

Отже, оскільки поля X і X' топологічно еквівалентні в околах особливих точок β_i, β'_i , в околах Υ_i, Υ'_i та на доповненнях $N_g^2 \setminus W$ і $N_g^2 \setminus W'$, то існує глобальний гомеоморфізм $k : N_g^2 \rightarrow N_g^2$, який переводить траєкторії поля X в траєкторії поля Y . \square

Таким чином, встановлено **бієкцію** між класами топологічної еквівалентності L -функцій і класами топологічної еквівалентності полів з множини $L_{m,M}(N_g^2)$.

3. ЧИСЛО ТОПОЛОГІЧНО НЕЕКВІВАЛЕНТНИХ ПОЛІВ З КЛАСУ $L_{m,M}(N_g^2)$

Очевидно, що клас L -функцій, які відповідають векторним полям з множини $L_{m,M}(N_g^2)$, співпадає з класом $C_{m,M}(N_g^2)$. Отже, існує бієкція між класами топологічної еквівалентності функцій з множини $C_{m,M}(N_g^2)$ і класами топологічної еквівалентності вказаних полів.

В роботі автора [7] за допомогою 2-кольорових хордових діаграм спеціального виду встановлено критерій топологічної еквівалентності функцій з класу $C_{m,M}(N_g^2)$ та доведено, що число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{m,M}(N_g^2)$ дорівнює числу неізоморфних 2-кольорових $D_{m,M}$ -діаграм з $n = 2g + M + m - 1$ хордами.

Наведемо основні означення.

Хордовою діаграмою (рис. 9 А) з n хордами або, коротко, n -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ різних точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$ -кутника) та n хорд, які задають розбиття $2n$ точок на пари.

Двокольоровою хордовою діаграмою з n хордами будемо називати хордову n -діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовано в два кольори (чорний і білий) так, що сусідні дуги різного кольору — рис. 9 С), D).

Надалі будемо вважати, що всі двокольорові n -діаграми будуються на основі *канонічного кола* (рис. 9 В) — кола з фіксованою нумерацією $2n$ точок на ньому (за годинниковою стрілкою), які є вершинами правильного $2n$ -кутника;

дуги $(1, 2); (3, 4); \dots; (2n - 1, 2n)$ – чорного кольору, а дуги $(2, 3); (4, 5); \dots; (2n, 1)$ – білого кольору.

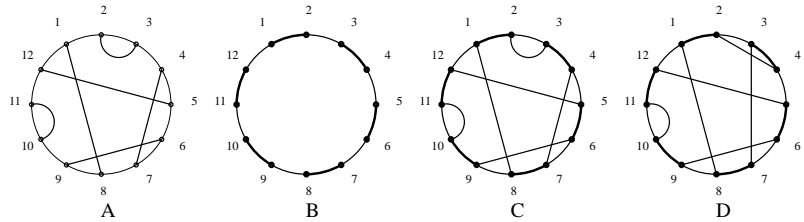


Рис. 9. А) 6-діаграма; В) канонічне коло; С) O -діаграма з 2 чорними і 3 білими циклами; D) N -діаграма

Двокольорову хордову діаграму, яка не містить хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, називатимемо O -діаграмою (N -діаграмою) – рис. 9 С (D).

Чорним (білим) циклом O -діаграми будемо називати послідовність хорд і чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола.

O -діаграму з n хордами, у якій точно M чорних і m білих циклів будемо називати $D_{M,m}^n$ -діаграмою. У випадку, коли $M = m = 1$, діаграму будемо називати *діаграмою максимального роду*

Діаграми D_1 і D_2 називатимемо *ізоморфними*, якщо їх можна сумістити в результаті повороту на деякий кут.

Наслідком теореми 1 та роботи [7] є наступне твердження.

Лема 2. Число топологічно нееквівалентних полів (з точністю до гомеоморфізму поверхні, який зберігає орієнтацію) з класу $L_{m,M}(N_g^2)$ дорівнює числу неізоморфних $D_{m,M}$ -діаграм з $n = 2g + M + m - 1$ хордами.

Отже, якщо зафіксувати рід поверхні $g \geq 1$, число джерел t та число стоків M , то можна підрахувати число топологічно нееквівалентних полів з класу $L_{m,M}(N_g^2)$.

Ці значення, в залежності від роду g орієнтованої поверхні N_g^2 , будуть співпадати з числом неізоморфних $D_{m,M}$ -діаграм з $n = 2g + M + t - 1$ хордами.

Зокрема, число топологічно нееквівалентних векторних полів з класу $L_{1,1}(N_g^2)$ співпадає з числом неізоморфних 2-кольорових O -діаграм максимального роду з $n = 2g + 1$ хордами. В роботі автора [8] підраховано точне значення цього числа, в залежності від роду g поверхні N_g^2 . А саме

Для довільного непарного n число неізоморфних $D_{1,1}^n$ -діаграм з $n = 2g + 1$ хордами може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$(129) \quad d_n^*(g) = \frac{1}{n} \left(\frac{2(n-1)!}{n+1} + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho(n, i) \right),$$

$$(130) \quad \rho(n, i) = \frac{2(i-1)!}{i+1} \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot \phi^*\left(\frac{n}{i}\right),$$

де $\phi(q)$ — функція Ейлера (число натуральних менших ніж q чисел, взаємно простих з q), а значення величини $\phi^*(q)$ для довільного непарного $q = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ визначається за формулою

$$(131) \quad \phi^*(q) = q \cdot \left(1 - \frac{2}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{p_k}\right).$$

Початкові значення числа $d_n^*(g)$ топологічно нееквівалентних полів з класу $L_{1,1}(N_g^2)$ в залежності від роду g орієнтованої поверхні N_g^2 наведено у наступній таблиці.

g	d_g^*
0	1
1	1
2	4
3	30
4	900
5	54 990
6	5 263 764
7	726 485 868
8	136 750 260 720
9	33 696 703 714 374
10	10 532 043 325 452 570

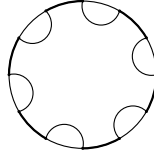
3.1. Число нееквівалентних полів з класу $L_{m,M}(S^2)$ на двовимірній сфері S^2 .

Твердження 1. *Всі поля з класу $L_{1,M}(S^2)$ є топологічно еквівалентними.*

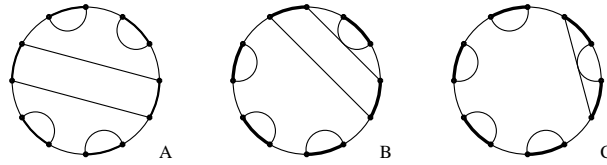
Доведення. Справедливість цього твердження випливає з того, що для полів з вказаного класу топологічним інваріантом є 2-кольорова хордова O -діаграма з $n = 2 \cdot 0 + 1 + M - 1 = M$ хордами, яка має точно 1 чорний та M білих циклів. Для довільного натурального M існує єдина така O -діаграма з $n = M$ хордами та максимальним числом білих циклів — рис. 10. \square

Твердження 2. *Число топологічно нееквівалентних полів з класу $L_{2,M}(S^2)$ дорівнює величині $p_{2,M}^* = \left\lfloor \frac{M+1}{2} \right\rfloor$, де $\lfloor q \rfloor$ — ціла частина числа q .*

Доведення. Ідея доведення полягає в тому, що відповідні цим полям діаграми обов'язково містять $n - 2 = 2 + M - 1 - 2 = M - 1$ хорд, що сполучають сусідні вершини і утворюють $M - 1$ чорних циклів ("простих циклів"). Дві

Рис. 10. Єдине векторне поле з класу $L_{1,6}(S^2)$

інші хорди повинні утворити точно 1 чорний цикл ("чорну смугу") — рис. 11.

Рис. 11. Всі топологічно нееквівалентні поля з класу $L_{2,5}(S^2)$

Всі неізоморфні діаграми відрізняються лише взаємним розташуванням $M-1$ простих циклів відносно чорної смуги, а саме: $\{M-1, 0\}$ (рис. 11 C), $\{M-2, 1\}$ (рис. 11 B), $\{M-3, 2\}$, ..., $\{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor, \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor\}$ (рис. 11 A).

Отже, існує точно $1 + \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor$ неізоморфних (відносно повороту) таких діаграм. Більше того, всі вони є і нееквівалентними. \square

4. ВИСНОВКИ

Таким чином, векторні поля з класу $L_{M,m}(N_g^2)$ можна класифікувати за допомогою комбінаторного об'єкту — двокольорових $D_{M,m}^n$ діаграм з $n = 2g-1+m+M$ хордами, де g — рід орієнтованої поверхні N_g^2 .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Smale S.* On gradient dynamical system // Annals of Mathematics. – 1961. – Vol. 74, №1. – P.199-206.
- [2] *Meyer K.R.* Energy function for Morse-Smale system // Amer. J. Math. – 1968. – Vol.90, №4. – P.1031-1040.
- [3] *Dancer E.N.* Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities II // J. Reine Angew. Math. – 1987., Vol.382. – P.145–164.
- [4] *Ошемков А.А., Шарко В.В.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Матем. Сборник, 1998, Т.189, No.8, С.93–140.
- [5] *Prishlyak A.O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topology and its Applications. – 2002. № 119. – P.257-267.
- [6] *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр. мат. жур. – 2003. – Т.55, №5. – С.687-700.
- [7] *Кадубовський О.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // Укр. мат. жур. – 2006. – Т.58, № 3. – С.343-351.
- [8] *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 1. – С.17–27.