Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 180-200

П. С. Коломієць

(Київський нац. ун-т ім.Тараса Шевченка, Київ)
E-mail: kolom-sk@nash.net.ua

Ю. А. Дрозд

(Ін-т математики НАН України)

Перетини незвідних компонент бішубертівських багатовидів

Вступ

В даній статті продовжується дослідження бішубертівських багатовидів – одного з логічних узагальнень шубертівських багатовидів, де замість одного визначального прапору підпросторів використовується два. В [2] було дано їхнє означення та знайдені основні властивості – звідність, кількість незвідних компонент, їхня розмірність. В наступній роботі [1] було продовжено їх вивчення. Була доведена раціональність незвідних компонент, також був знайдений їх розклад в шубертівському базисі для найпростішого випадку $m = n = 1$. Основним результатом цієї статті є знаходження рівнянь компонент в Грассманніані у випадку $n = 1$ і, на базі цього, знаходження структури взаємного розміщення "великих" орбіт (щільних в компонентах) і всіх їх перетинів з точністю до замикань для випадку $n = 1$. Також доведено, що компоненти не є повними перетинами в Грассманніані. Випадки $n > 1$ якісно відрізняються від випадку $n = 1$, і тому методика доведень, використана тут, не підходить для них. Також в цій статті ми розглянули питання регулярності\особливості точок незвідних компонент і виявили, що вже в найпростіших випадках вони містять особливі точки.

1. Рівняння незвідних компонент для n=1

Тут і надалі будуть розглядатися тільки бішубертівські багатовиди у яких $n = 1$, тобто другий прапор складається з одного підпростору.

Отже, нехай ми маємо деякий бішубертівський багатовид $BiSch(m, 1)$. Для кожного його елемента можна визначити набір підматриць Ω, що містить усі такі підматриці ширини d матриці елемента, що якщо якась із них містить якийсь рядок із $K_{i,j}$, то вона також містить всі рядки із $K_{x,y}$, $i \leqslant x \leqslant m+1$ і $j \leqslant y \leqslant n+1$. Ранги цього набору підматриць позначимо через $rk\Omega$. Такі підматриці виглядають як сходи в таблиці елемента (Рис. 12).

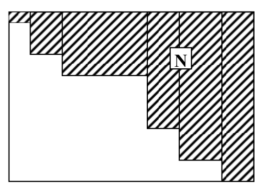

Рис. 12. Загальний вигляд підматриць із Ω.

На ньому область N (все що замальовано), що відповідає якійсь підмартиці ширини d матриці елемента – це типовий представник набору Ω. Тобто N складається із клітини таблиці, і якщо N містить якусь клітину, то вона містить також всі клітини, які розміщені зверху-справа від неї.

Тоді справедлива

Теорема 1.1. *Довільна орбіта O з довільного бішубертівського багатовиду* $BiSch(m, 1)$ *визначається в Грассманніані за допомогою рівностей* $\{rk(N) = k_N, N \in \Omega\}$*, де* $\{k_N, N \in \Omega\}$ *є відповідним набором рангів* $rk\Omega$ *для деякого її елемента.*

$\lhd$ Із означення набору підматриць Ω ясно таке:

По перше, $h \times d$ матриці, що задовольняють таким рівностям, автоматично задовольняють умовам на приналежність до нашого бішубертівського багатовиду (див. [2], ст.82). Дійсно, набір Ω включає в себе всі підматриці, що фігурують в цих визначальних умовах. А тому, якщо ми маємо набір рангів $rk\Omega$ для деякого елемента із $BiSch(m, 1)$, то рівності із заголовку теореми є більш сильними умовами ніж ці визначальні умови.

По друге, ніякі перетворення рядків із нашої алгебраїчної групи A_G (лінійні перетворення, що не змінюють прапори визначальних просторів) не змінюють набір рангів $rk\Omega$ довільного елемента, тому що до рядків довільної матриці із Ω можуть додаватись тільки рядки цієї ж самої матриці. Тому $rk\Omega$ постійний на кожній орбіті. Отже, для доведення теореми необхідно довести, що $rk\Omega$ для різних орбіт різний. Для цього доведемо, що всі елементи з однаковим набором рангів $rk\Omega$ можуть бути приведені до єдиного елемента за допомогою A_G, тобто що вони належать одній орбіті. Розіб'ємо доведення на 2 частини.

1-а частина: Приведемо спочатку за допомогою A_G довільний елемент до вигляду, в якому в його таблиці залишаться тільки числа (суми, що складаються з одного числа). Це доведення є скороченим і трохи модифікованим доведенням Теореми 1 в [2].

Нагадаємо означення таблиці елемента з матрицею M: якщо набір рядків $K_{i,j}$ із матриці M містить рядок з ненульовими елементами в стовпчиках $l_1, l_2, \ldots, l_k$, то в клітині $\tilde{K}_{i,j}$ таблиці $\tilde{M}$ стоїть текст "l_1" + "l_2" + ... + "l_k" (ми називаємо його сумою). Якщо в $K_{i,j}$ є декілька ненульових рядків, то в $\tilde{K}_{i,j}$ стоїть стільки ж сум. Порядок чисел в сумах і порядок сум в клітинах не важливий.

Позначимо також через $Op1$ таку операцію: Якщо в клітині $\tilde{K}_{i,j}$ стоїть число l, то за допомогою рядкових перетворень із A_G знищуємо всі числа l в усіх сумах із клітин $\tilde{K}_{x,y}$, $x \geqslant i$ і $y \geqslant j$.

Отже, у нас є елемент з відповідною таблицею $\tilde{M}$. Розглянемо шлях по клітинах в таблиці елемента $\tilde{M}$:

$$\tilde{K}_{m+1,n+1} \to\to \tilde{K}_{m,n+1} \to \ldots \to \tilde{K}_{1,n+1} \to$$
$$\to \tilde{K}_{m+1,n} \to \tilde{K}_{m,n} \to \ldots \to \tilde{K}_{1,n}$$

Йдучи цим шляхом припустимо, що ми прийшли в клітину $\tilde{K}_{i,j}$ і припустимо, що всі попередні клітини на шляху містять тільки числа, причому якщо в якихось 2-х клітинах, скажімо $\tilde{K}_{r,s}$, $\tilde{K}_{x,y}$, стоять однакові числа, то $r < x$, $s > y$. Тоді це саме ми зробимо для нової клітини.

Робимо $Op1$ для всіх чисел із всіх попередніх клітин. Тепер, якщо $\tilde{K}_{i,j}$ містить суму в якій є число, що не зустрічалось раніше на шляху, то цим числом знищуємо всі інші числа в сумі. Цим ми не змінюємо попередніх клітин. Якщо $\tilde{K}_{i,j}$ містить суму, яка складається з чисел (скажімо k штук), що вже зустрічалися, то на вже пройденому шляху ці числа можуть стояти тільки в клітинах $\tilde{K}_{x,y}$, де $x < i$, $y > j$. Тобто у нашому випадку ($n = 1$) це означає, що $j = 1$, $y = 2$. А отже всі клітини з k числами з нашої суми містяться в одному рядку таблиці. Того можна виділити серед них саму ліву (нехай це буде $\tilde{K}_{r,s}$) з відповідним числом l. Цим числом знищуємо всі інші в нашій сумі із $\tilde{K}_{i,j}$. При цьому в $\tilde{K}_{r,s}$ замість l з'являється ця ж сума. Але знову виконавши $Op1$ для всіх чисел із всіх вже пройдених клітин ми перетворюємо її знову в l.

Таким чином перша частина доведення закінчена.

2-а частина: Отже тепер у нас є деякий елемент із рангами $rk\Omega$, який має таблицю, в якій стоять тільки числа. Розглядаємо той самий шлях по його таблиці. В верхньому рядку стоять всі різні числа. Перенумеруємо їх в порядку слідування на шляху (перенумерація тут і надалі – це всього лише перестановка стовпчиків матриці елемента, тобто операція, що належить до A_G). Знову припустимо, що ми прийшли в клітину $\tilde{K}_{i,j}$ (в нижньому рядку) і що на попередньому шляху всі числа вже точно визначені шляхом відповідної перенумерації. Розглянемо такі матриці із Ω:

$N_{1,0} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i \text{ або } y = 2\}$,
$N_{1,1} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x \geqslant i \text{ або } y = 2\}$,
$N_{2,0} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i \text{ або } (y = 2 \text{ і } x \geqslant 2)\}$,
$N_{2,1} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x \geqslant i \text{ або } (y = 2 \text{ і } x \geqslant 2)\}$,
$\dots$
$N_{i,0} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i \text{ або } (y = 2 \text{ і } x \geqslant i)\}$,
$N_{i,1} = \{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x \geqslant i \text{ або } (y = 2 \text{ і } x \geqslant i)\}$,
і їхні ранги $r_{i,j} = rk(N_{i,j})$.

Тоді в $\tilde{K}_{i,j}$ повинно стояти $(r_{1,1} - r_{1,0})$ чисел, які не зустрічались раніше, пронумеруємо їх відповідно до порядку слідування на шляху.

В $\tilde{K}_{i,j}$ повинно стояти $(r_{2,1} - r_{2,0}) - (r_{1,1} - r_{1,0})$ чисел із $\tilde{K}_{1,n+1}$, які не зустрічаються в $\{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i, y = 1\}$. Перенумеруванням можемо завжди вибрати перші з них.

...

В $\tilde{K}_{i,j}$ повинно стояти $(r_{t,1} - r_{t,0}) - (r_{t-1,1} - r_{t-1,0})$ чисел із $\tilde{K}_{t-1,n+1}$ які не зустрічаються в $\{\bigcup \tilde{K}_{x,y}, x > i, y = 1\}$. Перенумеруванням можемо завжди вибрати перші з них.

...

Таким чином із рангів $rk\Omega$ слідує однозначний вигляд елемента. А це і доводить теорему.$\triangleright$

Теорема 1.2. *Замикання довільної орбіти із бішубертівського багатовиду $BiSch(m,1)$ визначається в Грассманніані за допомогою нерівностей $\{rk(N) \leqslant k_N, N \in \Omega\}$, де $\{k_N, N \in \Omega\}$ є відповідним набором рангів $rk\Omega$ для деякого елемента орбіти.*

$\triangleleft$ Отже, нехай у нас є орбіта O, що визначається рівностями $\{rk(N) = k_N, N \in \Omega\}$ в Грассманніані. Доведемо, що її замикання $\overline{O}$ визначається нерівностями з тими ж правими частинами $\{rk(N) \leqslant k_N, N \in \Omega\}$. В Грассманнових координатах O визначається як

$$O = \langle F_1 = \ldots = F_m = 0,\ G_1 \neq 0 \,\text{або}\, \ldots \,\text{або}\, G_k \neq 0\rangle \tag{132}$$

І треба довести, що її замикання визначається як

$$\overline{O} = \langle F_1 = \ldots = F_m = 0\rangle \tag{133}$$

Можна вважати, що $k = 1$. Дійсно, припустивши, що твердження теореми вірне для цього випадку, матимемо

$$O = \bigcup O_i,\ O_i = \langle F_1 = \ldots = F_m = 0,\ G_i \neq 0\rangle\,,$$
$$\overline{O} = \bigcup \overline{O_i},\ \overline{O_i} = \langle F_1 = \ldots = F_m = 0\rangle\,.$$

Тобто, твердження теореми буде вірним і для довільного k. Тепер, застосувавши занурення Веронезе, можна вважати, що G_i лінійне, тобто, що $\langle G_i \neq 0 \rangle = \mathbb{A}_0^n = \langle x_0 \neq 0 \rangle$. Отже маємо: $X' \subseteq \mathbb{A}_0^n \subseteq \mathbb{P}^n$.

$$X' = \langle F_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = F_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \rangle \text{ в } \mathbb{A}_0^n.$$

$$X = \left\langle x_0^{d_1} \cdot F_1\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \ldots \right.$$
$$\left. \ldots = x_0^{d_m} \cdot F_m\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0 \right\rangle,$$

$$\tilde{F}_i := x_0^{d_i} \cdot F_i\left(\tfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_0}\right), \quad d_i := \deg F_i,$$

де за визначальні рівняння для X' завжди можна вибрати базу Грьобнера.

Треба довести, що $X = \overline{X}'$.

Відомо, що

$$X \cap \mathbb{A}_0^n = \overline{X}' \cap \mathbb{A}_0^n = X',$$

і $X \supseteq \overline{X}$ (тому що X замкнена і $X \supseteq X'$). Нехай у нас є ненульовий багаточлен G, рівний нулю на $\overline{X}'$ і не рівний на X:

$$G|_{\overline{X}'} = 0, \ G|_X \neq 0.$$

Він не ділиться на x_0, інакше $G|_X = 0$. Тоді $G|_{X'} = 0$, а значить

$$G(1, x_1, \ldots, x_n)^t \in \langle F_1, \ldots, F_m \rangle,$$

де можна припустити, що $t = 1$.

Значить

$$G(1, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} H_i F_i,$$
$$\deg H_i F_i \leqslant \deg G(1, x_1, \ldots, x_n) = \deg G =: d,$$

оскільки G однорідний і не ділиться на x_0. Звідси

$$G = x_0^d G\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_0^d H_i\left(\tfrac{x_1}{x_0}, \dots, \tfrac{x_n}{x_0}\right) F_i\left(\tfrac{x_1}{x_0}, \dots, \tfrac{x_n}{x_0}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_0^{d-d_i} H_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \cdot x_0^{d_i} F_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \tilde{H}_i \cdot \tilde{F}_i,$$

де $\tilde{H}_i$ є багаточленом, так як $d - d_i \geqslant \deg H_i$. Тобто $G \in \left\langle \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_m \right\rangle \Rightarrow G|_X = 0$ – протиріччя.

Отже, якщо багаточлен G обертається в нуль на $\overline{X}'$, то він обертається в нуль і на X, а значить $X = \overline{X}'$. $\triangleright$

Тепер переформулюємо отримані рангові результати в термінах рівнянь в проективному просторі.

Теорема 1.3. *Довільна компонента C з довільного бішубертівського багатовиду $BiSch(m, 1)$ визначається в Грассманніані за допомогою рівнянь $S = \{X_{k_1,\dots,k_d} = 0\}$, де S складається з усіх мінорів окрім таких, що можна так пронумерувати їхні рядки числами від 1 до d, що $\forall l = \overline{1, d}$, l-ий рядок буде знаходитись в зоні впливу числа l (тобто в клітині, що розташована не вище і не правіше від клітини числа l) у характеристичній таблиці компоненти. Ця система рівнянь є мінімальною.*

$\triangleleft$ З попередньої теорії можна зробити висновок, що компонента C задовольняє цим рівнянням, і не задовольняє всім іншим рівнянням вигляду $X_{k_1,\dots,k_d} = 0$. Дійсно, розглянемо характеристичний елемент e_O "великої" орбіти O, що відповідає компоненті C, і його матрицю. Очевидно, що діючи на неї перетвореннями рядків із A_G, ми можемо зробити в ній ненульовими довільний d-вимірний мінор, який не міститься в S. Більше того, ми можемо зробити його довільним. Всі ж інші мінори завжди будуть залишатися нульовими. Діючи на e_O перетвореннями рядків із A_G, ми пробігаємо всю орбіту O, тому твердження справедливе для O. А так як O щільна в C, то твердження справедливе і для C.

Тепер нам треба ще довести, що в Грассманніані набір рівнянь S визначає множину, не більшу за компоненту C. Для цього ми доведемо, що якщо якась матриця елемента не задовольняє нерівностям, визначеним в Теоремі 1.2, то вона також не задовольняє набору рівнянь S.

Отже, нехай у нас є матриця M, яка не задовольняє ранговим визначальним нерівностям для компоненти. Наприклад, $rk(N) = k_N + r$, $r \geqslant 1$, для якоїсь $N \in \Omega$, де k_N – відповідне визначальне число для компоненти. Тоді в N виберемо $k_N + r$ лінійно незалежних рядків (утворену ними матрицю позначимо як E) і доповнимо їх до d-вимірної підматриці F рангу d. Отримаємо мінор, що не дорівнює нулю для M, і завжди дорівнює нулю для довільного

елемента із компоненти, так як $rk(E) < k_N + r$ в C. Тому цей мінор входить до S, а звідси $M \notin V(S) \cap Gr$.

Отже, $C = V(S) \cap Gr$.

Доведемо мінімальність такої системи в Грассманніані. Якщо викинути рівняння $X_{k_1,\dots,k_d} = 0$ із системи, то утворимо таку матрицю M – елемент Грассманніана: поставимо в її підматриці, що відповідає мінору $X_{k_1,\dots,k_d}$, одиничну матрицю, а все інше заповнимо нулями. Тоді M

буде мати єдину ненульову координату Грассманна $X_{k_1,\dots,k_d} = 1$, а отже не буде задовольняти всій системі визначальних рівнянь S, але буде задовольняти неповній системі. Отже система є мінімальною. $\triangleright$

Висновок 1.1. *Всі незвідні компоненти всіх бішубертівських багатовидів $BiSch(m,1)$ не є повними перетинами в Грассманніані. Тобто їхні корозмірності не дорівнюють кількості відповідних визначальних рівнянь.*

$\triangleleft$ Нехай ми маємо деяку незвідну компоненту C з таблицею, що містить числа в клітинах (x_l, y_l), $l = \overline{1,d}$. Підрахуємо кількість тих визначальних рівнянь, для яких всі рядки відповідного мінора окрім одного – це рядки, що відповідають $d-1$ числу із таблиці, а цей один знаходиться поза зоною впливу невикористаного числа (зверху або справа від нього). Маємо $\sum\limits_{l=1}^{d}(h-r(l)) - \sum\limits_{l=1}^{d}|\Sigma_{x_l,y_l}|$ рівнянь в позначеннях Розділу 1 в [1]. Тоді сума кількості цих рівнянь і розмірності компоненти рівна $d \cdot h - d^2 = \dim(Gr(d,h))$. Тепер знайдемо по крайній мірі ще одне визначальне рівняння.

Так як $d \geqslant 2$, то виберемо довільні 2 числа в таблиці для C (нехай це будуть 1,2). Можливі 2 варіанти їх взаємного розміщення (з точністю до перенумерації).

В обох випадках клітини, в яких не намальовані точки (із чотирьох, що знаходяться на перетині рядків k, l і стовпчиків i, j), є "вільними" (в термінах Теореми 1 в [2]).

В 1-ому випадку взаємного розміщення виберемо такий визначальний мінор: всі рядки окрім 2-х – це рядки, що відповідають числам $3, \dots, d$ із таблиці; один рядок – це порожній рядок із клітини (i, k), а один – порожній рядок із клітини (j, l).

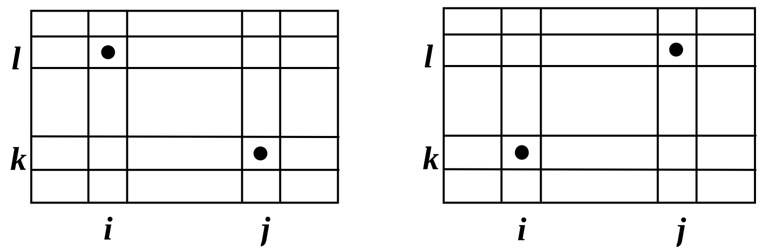

Рис. 13. Варіанти взаємного розміщення 2-х чисел.

В 2-ому випадку виберемо майже так само: всі рядки окрім 2-х – це рядки, що відповідають числам $3, \ldots, d$ із таблиці; один рядок – це порожній рядок із клітини (i, l), а один – порожній рядок із клітини (j, k).

В обох випадках ці мінори не входять в обчислені раніше, але є визначальними. $\rhd$

2. Структура взаємного розміщення орбіт

Відповідь на питання про взаємне розміщення замикань "великих" орбіт і їхніх перетинів дає наступна теорема.

Теорема 2.1. *Якщо $O_1, \ldots, O_{m+1}$ - це всі "великі" орбіти із $BiSch(m, 1)$, то*
(1) Для довільного перетину $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r}$ існує орбіта O така, що $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r} = \overline{O}$.
(2) якщо $r < m + 1$, то всі перетини різні.

$\lhd$ Цей результат є фактично наслідком теорем 1.1, 1.2.

Дійсно, якщо ми маємо r орбіт $O_{i_1}, \ldots, O_{i_r}$ з відповідними визначальними наборами рангів $\{k_N^1, N \in \Omega\}, \ldots, \{k_N^r, N \in \Omega\}$, то $\overline{O}_{i_r}, \ldots, \overline{O}_{i_r}$ визначаються за допомогою нерівностей $\{rk(N) \leqslant k_N^1, N \in \Omega\}, \ldots,$ $\{rk(N) \leqslant k_N^r, N \in \Omega\}$.

Тому $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r}$ визначається за допомогою нерівностей

$$\{rk(N) \leqslant k'_N, N \in \Omega\},$$

де $\{k'_N = \min(k_N^1, \ldots, k_N^r), N \in \Omega\}$. Тепер, якщо ми знайдемо таку орбіту, яка має набір рангів $\{k'_N, N \in \Omega\}$, то ми автоматично доведемо твердження.

Позначимо через O_i $i = \overline{1, m+1}$, таку "велику" орбіту:

$m+1$	$\ldots$	$i+1$		$i-1$	$\ldots$	1
	$\ldots$		i		$\ldots$	
$\uparrow$			$\uparrow$			$\uparrow$
1	$\ldots$		$m+2-i$		$\ldots$	$m+1$

Рис. 14. Таблиця орбіти O_i

Для довільних $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m+2,\ i \leqslant m+1$ позначимо через $\Omega(i, j)$ таку матрицю із Ω:

$$\Omega(i, j) = \left\{ \bigcup \tilde{K}_{x,y},\ (y = 2 \text{ і } x \geqslant i) \text{ або } (y = 1 \text{ і } x \geqslant j) \right\}.$$

Такі матриці складають всю Ω. Для кожного $j = \overline{1, m}$ через A_j позначимо такий вектор рангів матриць із Ω: $A_j = \big(rk\,(\Omega(k, m+2-j))\,,\ k = \overline{m+2-j, 1}\big)$, а через A_0 такий: $A_0 = \big(rk\,(\Omega(k, m+2))\,,\ k = \overline{m+1, 1}\big)$.

Введемо звичайний покомпонентний частковий порядок "$\leqslant$" а також звичайну покомпонентну рівність "$=$" на множині векторів однакової розмірності, елементами яких є цілі невід'ємні числа. Будемо казати, що $M = (m_1, \ldots, m_t) < N = (n_1, \ldots, n_t)$, якщо $M \leqslant N$ і $M \neq N$, тобто $m_i \leqslant n_i$, $\forall i = \overline{1, t}$ і $\exists\, j:\ m_j < n_j$.

Тепер ми хочемо довести, що $\forall j = \overline{0,m}$ на множині $\left\{A_j^i, i = \overline{1,m+1}\right\}$, де A_j^i позначає набір рангів A_j для "великої" орбіти O_i, порядок "$\leqslant$" є лінійним. Дійсно, просто випишемо всі $\left\{A_j^i, i = \overline{1,m+1}\right\}$.

Для $\forall j = \overline{1,m}$:
$A_j^1 = (j, j+1, \ldots, m+1)$,
$\ldots$
$A_j^j = (j, j+1, \ldots, m+1)$,
$A_j^{j+1} = (j, j, j+1, \ldots, m)$,
$A_j^{j+2} = (j, j+1, j+1, j+2, \ldots, m)$,
$\ldots$
$A_j^{m+1} = (j, \ldots, m-1, m, m)$.
Тобто $A_j^1 = \ldots = A_j^j > A_j^{m+1} > \ldots > A_j^{j+1}$
Для $j = 0$:
$A_0^1 = (0, 1, 2, \ldots, m)$,
$A_0^2 = (1, 1, 2, \ldots, m)$,
$\ldots$
$A_0^j = (1, \ldots, j-2, j-1, j-1, j, \ldots, m)$,
$\ldots$
$A_0^{m+1} = (1, 2, \ldots, m)$.

Тобто $A_0^{m+1} > \ldots > A_0^1$.

Всі ці взаємовідношення зображені на Рис.15, де число i в стовпчику A_j означає A_j^i, і якщо в одному і тому ж стовпчику число i_1 розташоване вище ніж i_2, то це означає, що $A_j^{i_1} > A_j^{i_2}$. Якщо ж в якомусь стовпчику якесь число не зображене, то це означає, що воно стоїть там же де і відповідна одиничка, тобто, що $A_j^i = A_j^1$.

Таким чином, для знаходження визначальних рангів $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r}$, замість того щоб брати мінімуми по кожному числу, ми можемо брати мінімуми на рівні векторів A_j, які у нас точно виписані.

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\ldots$	A_m
	1	1	1	1	1	$\ldots$	1
$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m+1$		$m+1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$			
5	5	5	5	5			
4	4	4	4				
3	3	3					
2	2						
1							

Рис. 15. Взаємовідношення векторів A_j^i

Отже, для $i_1 < \ldots < i_r$ $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r}$ має такі визначальні вектори A'_j:

$A'_j = A_j^{i_1}, \quad j = \overline{0, i_1 - 1},$

$A'_j = A_j^{i_2}, \quad j = \overline{i_1, i_2 - 1},$

$\ldots$

$A'_j = A_j^{i_r}, \quad j = \overline{i_{r-1}, i_r - 1},$

$A'_j = A_j^1 = A_j^{i_1} = \ldots = A_j^{i_r}, \quad j = \overline{i_r, m}.$

Вони, очевидно, різні для різних наборів $i_1 < \ldots < i_r$. Тепер знайдемо орбіту, що має такі ж визначальні вектори.

Для $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r} = \overline{O}$, O виглядає так

$m+1$	$\ldots$	$i_r + 1$	i_{r-1}	$i_r - 1$	$\ldots$	$i_2 + 1$	i_1
			i_r				i_2
$i_2 - 1$	$\ldots$	$i_1 + 1$		$i_1 - 1$	$\ldots$	2	1
				i_1			

Рис. 16. Таблиця орбіти O, де $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r} = \overline{O}$

Тобто для всіх $i = \overline{1, m+1}$, $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ в клітині $\tilde{K}_{m+2-i,2}$ стоїть число i, в клітині $\tilde{K}_{m+2-i,1}$ не стоїть нічого. В клітині $\tilde{K}_{m+2-i_1,2}$ пусто, в клітині $\tilde{K}_{m+2-i_1,1}$ стоїть число i_1, $\forall k = \overline{2, r}$ в клітині $\tilde{K}_{m+2-i_k,2}$ стоїть i_{k-1}, в клітині $\tilde{K}_{m+2-i_k,1}$ стоїть i_k.
$\triangleright$

Якщо ввести позначення $\overline{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{O}_{i_r} = \overline{O}_{i_1,\ldots,i_r}$, то для випадку $Bisch(2,1)$ картина взаємного розміщення перетинів незвідних компонент виглядає так

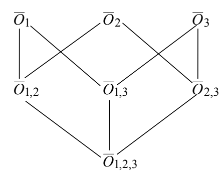

Рис. 17. Взаємне розміщення перетинів незвідних компонент в $Bisch(2,1)$

3. Особливі та регулярні точки

Для кожної з незвідних компонент цікаво знати чи містять вони особливі точки. Відповідь виявляється позитивною. Причому вона може залежати від розмірностей підматриць $K_{i,j}$. Тут ми повністю розглянемо і приведемо доведення тільки для найпростішого випадку $Bisch(1,1)$, для більш складних випадків все робиться аналогічним шляхом тільки складніше.

Отже, розглянемо $Bisch(1,1)$ в грассманіані $Gr(2,h)$. Випишемо спочатку рівняння самого грассманіана в усьому просторі P^N, $N = \binom{h}{d} - 1$. Як відомо (див. [5]), грассманіан $Gr(d,h)$ задається всіма рівняннями такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{i-1} \cdot X_{k_1 k_2 \ldots k_{d-1} l_i} \cdot X_{l_1 \ldots \check{l}_i \ldots l_{d+1}} = 0 \tag{134}$$

для всіх можливих $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{d-1} \leqslant h$ і $1 \leqslant l_1 < \ldots < l_{d+1} \leqslant h$.

Позначимо множини $\{k_1, \ldots, k_{d-1}\}$ і $\{l_1, \ldots, l_{d+1}\}$ як A і B відповідно. При $A \subset B$ відповідне рівняння перетворюється на тотожність. При $A \not\subset B$ легко бачити, що як би не розбивалась на A та B множина $A \cup B = \{i, j, k, l\}$, $i < j < k < l$, відповідне рівняння завжди еквівалентне

$$X_{i,j} \cdot X_{k,l} - X_{i,k} \cdot X_{j,l} + X_{i,l} \cdot X_{j,k} = 0. \tag{135}$$

Очевидно що при різних $A \cup B$ відповідні рівняння будуть різними. Отже, кількість рівнянь в системі $SGr(2,h)$ визначальних рівнянь для $Gr(2,h)$ рівна $\binom{h}{4}$.

Нагадаємо, що за “*проективним якобієвим критерієм*”, для регулярності точки p із проективного багатовиду $X \subset P^n$, $I(X) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$, необхідно і достатньо, щоб $rk\,(\partial F_i/\partial X_j)\,(p) = n - \dim_p X$, де $\dim_p X = \dim X$ для незвідного багатовиду X. Нагадаємо також, що для незвідного багатовиду X, множина його регулярних точок X_{reg} є відкритою щільною підмножиною в X.

Випишемо тепер всі орбіти із $Bisch(1,1)$. Їх всього 6.

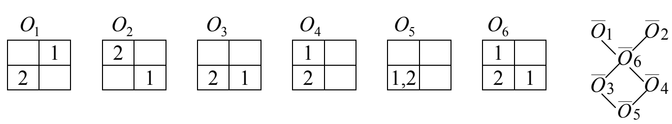

Рис. 18. Орбіти $Bisch(1,1)$

Розглянемо деяку незвідну компоненту C в $Bisch(m,n)$. Вона є замиканням відповідної "великої" орбіти O. Тому O перетинається з C_{reg}. А так як всі перетворення із нашої алгебраїчної групи A_G не змінюють регулярності чи особливості точки, то $O \subset C_{reg}$. Це стосується і всіх інших орбіт із C, вони містять або тільки регулярні точки, або тільки особливі.

3.1. **Компонента $C_1 = \overline{O}_1$.**

Позначимо через S_i множину визначальних рівнянь компоненти C_i в $Gr(2,h)$ (див. теорему 4, [1]). Тоді
(136)

$$\dim C_1 = 2D_{1,1} + D_{1,2} + D_{2,1} + D_{2,2} - 3,$$
$$|S_1| = D_{1,2}\cdot D_{2,1} + D_{1,2}\cdot D_{2,2} + D_{2,1}\cdot D_{2,2} +$$
$$\binom{D_{1,2}}{2} + \binom{D_{2,1}}{2} + \binom{D_{2,2}}{2} = \binom{h}{2} - NI_1 =$$
$$= \binom{h}{2} - \left(D_{1,1}\cdot D_{1,2} + D_{1,1}\cdot D_{2,1} + D_{1,1}\cdot D_{2,2} + \binom{D_{1,1}}{2}\right).$$

В усьому просторі P^N, $N = \binom{h}{2} - 1$, компонента C_i задається рівняннями із S_i плюс рівняннями грассманіана $SGr(2,h)$.

Отже, для регулярності точки $p \in C_1$, нам треба знайти $\left(\binom{h}{2} - 1\right) - \dim C_1$ рівнянь із $S_1 \cup SGr(2,h)$, чиї якобіани були б лінійно незалежними в точці p. А так як якобіани функцій із S_i є просто ЛНЗ векторними константами (з єдиним ненульовим елементом, рівним, до речі, одиниці), то задача зводиться до того, щоб знайти

$$\left(\binom{h}{2} - 1\right) - \dim C_1 - |S_1| = NI_1 - \dim C_1 - 1$$

рівнянь із $SGr(2,h)$, чиї б якобіани були ЛНЗ в точці p разом з якобіанами від функцій із S_1.

Розглянемо орбіту O_3 і її загальний елемент e_3, зображений на Рис.18. Розглянемо деяку функцію f із

$SGr(2,h)$: $X_{i,j}\cdot X_{k,l} - X_{i,k}\cdot X_{j,l} + X_{i,l}\cdot X_{j,k}$. Її якобіан рівний

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{array}{ccccccc} (\dots, & X_{k,l} & ,\dots, & -X_{j,l} & ,\dots, & X_{j,k} & ,\dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & X_{i,j} & & X_{i,k} & & X_{i,l} & \end{array} \tag{137}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots, & X_{i,l} & ,\dots, & -X_{i,k} & ,\dots, & X_{i,j} & ,\dots) \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & X_{j,k} & & X_{j,l} & & X_{k,l} & \end{array}$$

де "…" означають нулі.

Для того, щоб він не був рівний нулю в точці $p = e_3$, треба щоб хоч один $X_{*,*}$ із f був рівним $X_{\tilde{1},\tilde{2}} = 1$, де $\tilde{l}$ позначає рядок, в якому стоїть число l в e_3. А це можливо тільки якщо $\left\{\tilde{1},\tilde{2}\right\} \subset \{i,j,k,l\}$. Отже, треба розглядати $A \cup B = \left\{i,j,\tilde{1},\tilde{2}\right\}$, для яких матимемо

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)(e_3) = \begin{array}{ccc} (0,\dots,0, & 1 & ,0,\dots,0) \\ & \uparrow & \\ & X_{i,j} & \end{array} \tag{138}$$

Але $X_{i,j}$ не повинно належати S_1, інакше $(\partial f/\partial X)(e_3)$ буде рівним $(\partial X_{i,j}/\partial X)(e_3)$, а отже якобіан від f буде ЛЗ від якобіанів функцій із S_1.

Отже, для $i,j \notin \left\{\tilde{1},\tilde{2}\right\}$ можливі такі варіанти: $(K_{1,1},K_{1,2})$, $(K_{1,1},K_{2,1})$, $(K_{1,1},K_{2,2})$, $(K_{1,1},K_{1,1})$. Залишається їх тільки порахувати.

$$\begin{aligned} \tilde{N}_3 &= (D_{1,1}-1)\cdot D_{1,2} + (D_{1,1}-1)\cdot(D_{2,1}-1) + \\ &+ (D_{1,1}-1)\cdot D_{2,2} + \binom{D_{1,1}-1}{2} = NI_1 - \dim C_1 - 1. \end{aligned} \tag{139}$$

Отже, вся орбіта O_3 складається з регулярних в C_1 точок.

Так само розглядаємо орбіти O_4, O_5. Маємо

$$\begin{aligned}\tilde{N}_4 &= (D_{1,1}-1)\cdot(D_{1,2}-1)+(D_{1,1}-1)\cdot D_{2,1}+\\ &+(D_{1,1}-1)\cdot D_{2,2}+\tbinom{D_{1,1}-1}{2}=NI_1-\dim C_1-1.\end{aligned} \tag{140}$$

(141)

$$\begin{aligned}\tilde{N}_5 &= (D_{1,1}-2)\cdot D_{1,2}+(D_{1,1}-2)\cdot D_{2,1}+\\ &+(D_{1,1}-2)\cdot D_{2,2}+\tbinom{D_{1,1}-2}{2}=(NI_1-\dim C_1-1)-\\ &-(D_{1,2}+D_{2,1}+D_{2,2}-1)<NI_1-\dim C_1-1.\end{aligned}$$

Отже, O_4 є регулярною, а O_5 особливою в C_1.

Випадок орбіти O_6 трохи складніший. Щоб розрізняти рядки, в яких стоять дві одинички її таблиці, запишемо її загальний елемент e_6 в такому вигляді:

$$e_6 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1' & \\ \hline 2 & 1'' \\ \hline\end{array} \tag{142}$$

Тоді, вибравши за $A\cup B$, наприклад, $\{i,j,\tilde{1}',\tilde{2}\}$, $i,j\notin\{\tilde{1}',\tilde{1}'',\tilde{2}\}$, ми маємо ті самі випадки, що і для попередніх орбіт. Випадки $A\cup B=\{i,j,\tilde{1}'',\tilde{2}\}$ на рівні якобіанів аналогічні випадкам $A\cup B=\{i,j,\tilde{1}',\tilde{2}\}$, а тому не повинні додатково обчислюватись. Плюс існує ще один випадок: $A\cup B=\{i,\tilde{1}',\tilde{1}'',\tilde{2}\}$. Для нього маємо таке значення якобіана в точці e_6:

(143)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)(e_6) = \begin{array}{ccccc}(0,\ldots,0, & \pm1 & ,0,\ldots,0, & \pm1 & ,0,\ldots,0)\\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & X_{i,\tilde{1}'} & & X_{i,\tilde{1}''} & \end{array}$$

Цей випадок ніяк не перетинається з попередніми, і всі такі випадки між собою також різні. Тобто треба додатково порахувати кількість таких $A\cup B=\{i,\tilde{1}',\tilde{1}'',\tilde{2}\}$, щоб хоча б один із $X_{i,\tilde{1}'}$, $X_{i,\tilde{1}''}$ не належав S_1. Маємо:

(144)

$$\begin{aligned}&\tilde{N}_6 = (D_{1,1}-1)\cdot(D_{1,2}-1) + (D_{1,1}-1)\cdot(D_{2,1}-1) + \\ &+ (D_{1,1}-1)\cdot D_{2,2} + \binom{D_{1,1}-1}{2} + (D_{1,1}-1) = \\ &= NI_1 - \dim C_1 - 1\end{aligned}$$

Отже O_6 є регулярною в C_1.

3.2. **Компонента $C_2 = \overline{O}_2$.**

Для другої компоненти маємо такий результат:

$$\begin{array}{l} O_2 \text{ в } C_2: \ \textit{регулярна} \\ O_3 \text{ в } C_2: \begin{cases} \textit{регулярна, якщо } D_{1,2}=1 \\ \textit{особлива, якщо } D_{1,2}>1 \end{cases} \\ O_4 \text{ в } C_2: \begin{cases} \textit{регулярна, якщо } D_{2,1}=1 \\ \textit{особлива, якщо } D_{2,1}>1 \end{cases} \\ O_5 \text{ в } C_2: \begin{cases} \textit{регулярна, якщо } D_{1,2}=D_{2,1}=1 \\ \textit{особлива, якщо } D_{1,2}+D_{2,1}>2 \end{cases} \\ O_6 \text{ в } C_2: \textit{регулярна} \end{array} \tag{145}$$

Отже, вже для $Bisch(1,1)$ виявилося, що існують особливі точки. Для $Bisch(2,1)$ було також перевірено декілька випадків і ситуація виявилася аналогічною. Тому видається правдоподібним, що вона буде зберігатися і для інших бішубертівських багатовидів.

Література

[1] Коломієць П.С. Деякі факти про бішубертівські багатовиди // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки – **4** – 2006. – с. 38-47.

[2] Y.A. Drozd, P.S. Kolomiets On some generalization of Schubert's varieties // Computational Commutative and Non-Commutative Algebraic Geometry. NATO Science Series III: Computer and Systems Sciences – Vol.196 – 2005. – с. 79-89.

[3] Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, том 2. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1954.

[4] Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, том 1. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1954.

[5] Дрозд Ю.А. Вступ до алгебраїчної геометрії. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2001.