Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 7-22

УДК 512.5

В. В. Бондаренко

Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка
E-mail: `vitaliy.bondarenko@gmail.com`

Про класифікацію унітрикутних зображень скінченних груп

У цій статті ми розглядаємо задачу про опис зображень скінченних груп унітрикутними матрицями над полем.

В этой статье мы рассматриваем задачу об описании представлений конечных групп унитреугольными матрицами над полем.

In this paper we consider the problem of classifying representations of finite groups by unitriangular matrices over a field.

Групу верхніх унітрикутних матриць розміру $n \times n$ над поле k будемо позначати через $\mathbf{UT}_n(k)$. унітрикутне зображення групи G над полем k — це гомоморфізм

$$S : G \to \mathbf{UT}_n(k),$$

де n — деяке натуральне число. Два унітрикутні зображення S та S' назвемо унітрикутно еквівалентними, якщо існує унітрикутна матриця M, така, що $S(g) = MS'(g)M^{-1}$ для довільного елементу $g \in G$. Якщо характеристика поля k ділить порядок групи G, то унітрикутне зображення назвемо модулярним.

Прямою сумою унітрикутних зображень S та S' групи G назвемо зображення T, таке, що $T(g) = S(g) \oplus S'(g)$ для довільного елементу $g \in G$. унітрикутне зображення T назвемо (унітрикутно) розкладним, якщо воно унітрикутно еквівалентне прямій сумі двох унітрикутних зображень, і нерозкладним в іншому разі.

У цій статті ми вказуємо повну класифікацію модулярних унітрикутних зображень циклічної групи другого порядку. Окрім того, ми покажемо, що задача про опис унітрикутних зображень більшості скінченних груп містить в собі задачу про унітрикутну подібність пари матриць (подібність за допомогою унітрикутних матриць). Такі групи ми називаємо унітрикутно дикими.

1. Модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку. У цьому параграфі ми опишемо модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку.

Через k позначаємо довільне поле характеристики 2 і покладемо $k^* = k \setminus 0$. $E(n)$ буде позначати одиничну матрицю розміру $n \times n$, а $I_{ij}(n)$ — матрицю розміру $n \times n$, в якій на місці (i,j) стоїть одиничний елемент, а на решті місць стоять нульові елементи. Часто замість $E(n)$ будемо писати просто E.

Для натуральних чисел p і q, таких, що $p \geq q$, покладемо $[p,q] = \{p, p+1, \ldots, q\}$, $[p,q]^2 = [p,q] \times [p,q]$ та позначимо через $[p,q]^2_<$ підмножину всіх елементів (i,j) із $[p,q]^2$, таких, що $i < j$.

Нехай P — підмножина в $[1,n]^2_<$. Елемент

$$x = (i,j) \in [1,n]^2_<$$

назвемо P-ізольованим, якщо для довільного елемента

$$y = (p,q) \in P$$

, $y \neq x$, множина $\{i,j\} \cap \{p,q\}$ порожня. Позначимо через $\mathcal{I}_n$ сукупність всіх підмножин $P \subset [1,n]^2_<$, $P \neq \varnothing$, таких, що кожний елемент $x \in P$ є P-ізольованим.

Прямою сумою $X\coprod Y$ множин $X \in \mathcal{I}_n$ і $Y \in \mathcal{I}_m$ назвемо наступну множину $Z \in \mathcal{I}_{n+m}$: $Z = X \cup Y(n)$, де $Y(n) = \{(i+n, j+n) \,|\, (i,j) \in Y\}$. Множину $X \in \mathcal{I}_n$ назвемо розкладною, якщо вона є прямою сумою деяких множин $X' \in \mathcal{I}_p$ і $X'' \in \mathcal{I}_q$, де p, q— натуральні числа. В іншому разі множину X назвемо нерозкладною. Очевидно, що $X \in \mathcal{I}_n$ є розкладною тоді і лише тоді, коли існує $1 \leq r < n$, таке, що $(p,q) \notin X$ для будь-яких $p > r$ і $q \leq r$.

Множину всіх пар (X, λ), де $X \in \mathcal{I}_n$ і λ — відображення із X в k^*, будемо позначати через $\mathcal{P}_n$; замість $\lambda((i,j))$ будемо писати $\lambda(i,j)$. Для $(X,\lambda) \in \mathcal{P}_n$ і $(Y,\gamma) \in \mathcal{P}_m$ покладемо

$$(X,\lambda)\coprod(Y,\gamma) = (X\coprod Y, \lambda \circ \gamma),$$

де

$$[\lambda \circ \gamma](i,j) = \lambda(i,j)$$

для $(i,j) \in X$ і

$$[\lambda \circ \gamma](i+n, j+n) = \gamma(i,j)$$

для $(i+n, j+n) \in Y(n)$.

Співставимо кожній парі $(X,\lambda) \in \mathcal{P}_n$ матрицю

$$M(X,\lambda) \in \mathbf{UT}_n(k)$$

наступним чином:

$$M(X,\lambda) = E(n) + \sum_{(i,j)\in X} \lambda(i,j) I_{ij}(n).$$

Легко бачити, що $(M(X,\lambda))^2 = E(n)$.

Модулярне унітрикутне зображення K циклічної групи другого порядку $G = \{a \,|\, a^2 = 1\}$, таке, що

$$K(a) = M(X,\lambda),$$

позначимо через $K_{(X,\lambda)}$. Зауважимо, що

$$K_{(X_1,\lambda_1)} \oplus K_{(X_2,\lambda_2)} = K_{(X_1\coprod X_2, \lambda_1\circ\lambda_2)}.$$

Модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку описуються (з точністю до унітрикутної еквівалентності) наступною теоремою.

Теорема 1. 1) *Будь-яке модулярне унітрикутне зображення циклічної групи другого порядку унітрикутно еквівалентне зображенню виду* $K_{(X,\lambda)}$.

2) *Зображення* $K_{(X,\lambda)}$ *і* $K_{(X',\lambda')}$ *не є унітрикутно еквівалентними, якщо* $(X,\lambda) \neq (X',\lambda')$.

3) *Зображення* $K_{(X,\lambda)}$ *нерозкладне тоді і лише тоді, коли нерозкладною є множина* X.

Твердження 1) і 2) теореми 1 безпосередньо випливають із основного результату статті [2], в якій описано повну систему представників класів спряжених елементів групи $\mathbf{UT}_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2.

Переходимо до твердження 3).

Якщо множина X розкладна, то, очевидно, що зображення $K_{(X,\lambda)}$ є розкладним. Покажемо, що зображення $K_{(X,\lambda)}$ нерозкладне, якщо нерозкладним є множина X. Допустимо, що це не так. Тоді $K_{(X,\lambda)}$ унітрикутно еквівалентне прямій сумі (унітрикутних) зображень T_1 і T_2. Згідно твердження 1) теореми $T_1 = K_{(X_1,\lambda_1)}$ і $T_2 = K_{(X_2,\lambda_2)}$ для деяких $X_1, X_2, \lambda_1, \lambda_2$. Значить

$$T_1 \oplus T_2 = K_{(X_1,\lambda_1)} \oplus K_{(X_2,\lambda_2)} = K_{(X_1 \coprod X_2, \lambda_1 \circ \lambda_2)}.$$

А це протирічить твердженню 2) теореми, тому що згідно викладеного $K_{(X,\lambda)}$ унітрикутно еквівалентне

$$K_{(X_1 \coprod X_2, \lambda_1 \circ \lambda_2)}$$

і при цьому

$$X \neq X_1 \coprod X_2$$

(бо X нерозкладне). Теорема 1 доведена.

2. Означення унітрикутно диких груп. У цьому параграфі матриці розглядаються над довільним полем.

Доведемо спочатку наступне твердження (яке для скінченного поля розглянуто в [1]).

Твердження 1. *Задача про приведення однієї (навіть унітрикутної) матриці над полем за допомогою унітрикутних подібних перетворень містить в собі задачу про приведення пари матриць за допомогою (однакових) унітрикутних подібних перетворень.*

Доведення. Наше доведення незалежне від доведення в [1].

Розглянемо матриці вигляду

$$X(A_1,A_2)=\left(\begin{array}{c|cc|ccc|cc|c} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right),$$

де A_1, A_2 — довільні матриці (всі клітини мають однаковий розмір).

Розглядаючи рівність $X(A_1,A_2)C = CX(B_1,B_2)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами, покажемо, що $X(A_1,A_2)$ і $X(B_1,B_2)$ унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є пари (A_1,A_2) і (B_1,B_2). При цьому клітини матриць $X(A_1,A_2)$ і $X(B_1,B_2)$ можна вважати однакового розміру, інакше вони не можуть бути подібними як матриці різного розміру. Розіб'ємо матрицю C на блоки у відповідності з розбиттям матриць $X(A_1, A_2)$ та $X(B_1, B_2)$:

$$C = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|cc|c}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} & C_{19} \\ \hline
0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} & C_{29} \\
0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} & C_{39} \\ \hline
0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} & C_{49} \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} & C_{59} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & C_{67} & C_{68} & C_{69} \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{77} & C_{78} & C_{79} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{88} & C_{89} \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{99}
\end{array}\right),$$

де $C_{11}, \ldots, C_{99}$ — унітрикутні матриці; перемноживши поблоково матриці, які стоять в лівій і правій частинах рівності $X(A_1, A_2)C = CX(B_1, B_2)$, та прирівнявши відповідні матриці, отримаємо наступну систему лінійних матричних рівнянь відносно ненульових клітин матриці C (тотожні рівняння ми не вказуємо):

$$C_{22} = C_{11}, \tag{1}$$
$$C_{23} = 0, \tag{2}$$
$$C_{24} = C_{12}, \tag{3}$$
$$C_{25} = C_{13}, \tag{4}$$
$$C_{26} = 0, \tag{5}$$
$$C_{27} = C_{14} + C_{15} + C_{16}, \tag{6}$$
$$C_{28} = C_{14}B_1 + C_{15}B_2 + C_{16}, \tag{7}$$
$$C_{29} = C_{18}, \tag{8}$$
$$C_{44} = C_{22}, \tag{9}$$
$$C_{45} = C_{23}, \tag{10}$$
$$C_{46} = 0, \tag{11}$$

(12) $$C_{47} = C_{24} + C_{25} + C_{26},$$

(13) $$C_{48} = C_{24}B_1 + C_{25}B_2 + C_{26},$$

(14) $$C_{49} = C_{28},$$

(15) $$C_{55} = C_{33},$$

(16) $$C_{56} = 0,$$

(17) $$C_{57} = C_{34} + C_{35} + C_{36},$$

(18) $$C_{58} = C_{34}B_1 + C_{35}B_2 + C_{36},$$

(19) $$C_{59} = C_{38},$$

(20) $$C_{77} = C_{44} + C_{45} + C_{46},$$

(21) $$C_{78} + A_1C_{88} = C_{44}B_1 + C_{45}B_2 + C_{46},$$

(22) $$C_{79} + A_1C_{89} = C_{48},$$

(23) $$C_{77} = C_{55} + C_{56},$$

(24) $$C_{78} + A_2C_{88} = C_{55}B_2 + C_{56},$$

(25) $$C_{79} + A_2C_{89} = C_{58},$$

(26) $$C_{77} = C_{66},$$

(27) $$C_{78} + C_{88} = C_{66},$$

(28) $$C_{79} + C_{89} = C_{68},$$

(29) $$0 = C_{78},$$

(30) $$C_{99} = C_{88}.$$

Проаналізуємо цю систему. Із рівнянь (1), (9), (15), (20), (10), (2), (11), (23), (16), (26), (30), (27), (29) випливає, що $C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = C_{66} = C_{77} = C_{88} = C_{99}$, а із рівнянь (21), (29), (10), (2), (11), (24), (16) — що $A_1C_{88} = C_{44}B_1$ і $A_2C_{88} = C_{55}B_2$; значить $A_1C_{88} = C_{88}B_1$ і $A_2C_{88} = C_{88}B_2$ або $(C_{88})^{-1}A_1C_{88} = B_1$ і $(C_{88})^{-1}A_2C_{88} = B_2$ (зауважимо, що матриця C_{88} унітрикутна).

Отже, якщо матриці $X(A_1, A_2)$ і $X(B_1, B_2)$ унітрикутно подібні, тобто має місце рівність $X(A_1, A_2)C = CX(B_1, B_2)$ для деякої унітрикутної матриці C, то матриці A і B є унітрикутно подібними.

Навпаки, якщо матриці A і B є унітрикутно подібними, тобто $AX = XB$ для деякої унітрикутної матриці X, то $X(A_1, A_2)C = CX(B_1, B_2)$ для блоково-діагональної матриці C із діагональними блоками $C_{ii} = X$, а значить матриці $X(A_1, A_2)$ та $X(B_1, B_2)$ унітрикутно подібні.

Твердження 1 доведено.

Зауважимо, що виходячи із твердження 1 легко показати, що задача про приведення однієї унітрикутної матриці над полем за допомогою унітрикутних подібних перетворень містить в собі аналогічну задачу не лише для пари матриць, а і для $m > 2$ матриць.

Усе вищесказане є мотивом для наступного означення.

Групу G назвемо унітрикутно дикою над полем k, якщо задача про опис (із точністю до унітрикутної еквівалентності) її унітрикутних зображень містить в собі задачу про опис квадратних матриць над k з точністю до унітрикутних подібних перетворень.

3. Теореми про унітрикутно дикі скінченні групи. Розглянемо спочатку випадок модулярних зображень p-груп.

У цьому параграфі ми доведемо наступну теорему.

Теорема 2. *Будь-яка скінченна p-група G порядку $n > 2$ є унітрикутно дикою над полем k характеристики p.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли G є циклічною групою порядку $n = p^s > 3$; у цьому випадку виконана одна із таких умов:

а) $p = 2$ і $n = 2^s$, де $s \geq 2$,

б) $p = 3$ і $n = 3^s$, де $s \geq 2$,

в) $p > 3$ і $n = p^s$, де $s \geq 1$.

Твірний елемент групи G позначимо через a.

Позначимо через T_A, де A — довільна квадратна матриця над полем k, унітрикутне зображення групи G, таке, що

$$T_A(a) = X_1(A) = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & E & A & 0 \\ 0 & 0 & E & E & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right).$$

Матриця $X_(A)$ задає зображення групи G, оскільки

$$\begin{array}{rcl} X_1(A)^n & = & [(X_1(A) - E) + E]^n \\ & = & [(X_1(A) - E) + E]^{p^s} = \\ & = & (X_1(A) - E)^{p^s} + E^{p^s} = \\ & = & 0 + E = E, \end{array}$$

(відмітимо, що $(X_1(A) - E)^{p^s} = 0$, бо $(X_1(A) - E)^4 = 0$ і $p^s > 3$).

Покажемо, що зображення T_A та T_B групи G унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли матриці A і B унітрикутно подібні (це й буде означати, що G є унітрикутно дикою над полем k). Для цього треба показати, що матриці $X_1(A)$ та $X_1(B)$ унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A та B. При цьому можна вважати, матриці $X_1(A)$ та $X_1(B)$ мають однаковий розмір (інакше вони не можуть бути подібними як матриці різного розміру).

Розглянемо рівність $X_1(A)C = CX_1(B)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами. Розіб'ємо матрицю C на блоки у відповідності з розбиттям матриць $X_1(A)$ та $X_1(B)$:

$$C = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \hline 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{array}\right),$$

де $C_{11}, \ldots, C_{66}$ — унітрикутні матриці; перемноживши поблоково матриці, які стоять в лівій та правій частинах рівності $X_1(A)C = CX_1(B)$, та прирівнявши відповідні матриці, отримаємо наступну систему лінійних матричних рівнянь відносно ненульових клітин матриці C (тотожні рівняння ми не вказуємо):

$$C_{22} = C_{11}, \tag{31}$$

$$C_{23} = 0, \tag{32}$$

$$C_{24} = C_{12} + C_{13}, \tag{33}$$

$$C_{25} = C_{12}B + C_{13}, \tag{34}$$

$$C_{26} = C_{15}, \tag{35}$$

$$C_{44} = C_{22} + C_{23}, \tag{36}$$

$$C_{45} + AC_{55} = C_{22}B + C_{23}, \tag{37}$$

$$C_{46} + AC_{56} = C_{25}, \tag{38}$$

$$C_{44} = C_{33}, \tag{39}$$

$$C_{45} + C_{55} = C_{33}, \tag{40}$$

$$C_{46} + C_{56} = C_{35}, \tag{41}$$

(42) $$0 = C_{45},$$

(43) $$C_{66} = C_{55}.$$

Проаналізуємо цю систему. З рівнянь (31), (32), (36), (39), (40), (42), (43) випливає, що

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = C_{66},$$

а з рівнянь (32), (37), (42) — що

$$AC_{55} = C_{22}B.$$

Тому $AC_{22} = C_{22}B$ або $(C_{22})^{-1}AC_{22} = B$ (зауважимо, що матриця C_{22} унітрикутна). І тому якщо матриці $X_1(A)$ та $X_1(B)$ унітрикутно подібні, тобто має місце рівність $X_1(A)C = CX_1(B)$ для деякої унітрикутної матриці C, то матриці A та B є унітрикутно подібними.

Навпаки, якщо матриці A та B є унітрикутно подібними, тобто $AX = XB$ для деякої унітрикутної матриці X, то $X_1(A)C = CX_1(B)$ для блоково-діагональної матриці C із діагональними блоками $C_{ii} = X$, а значить матриці $X_1(A)$ та $X_1(B)$ — унітрикутно подібні.

Отже, ми довели, що циклічна група порядку $n = p^s > 3$ є унітрикутно дикою.

Розглянемо тепер випадок, коли G — циклічна група порядку 3: $G = \{a \mid a^3 = 1\}$ (тоді, нагадаємо, характеристика поля дорівнює 3). Позначимо через T_A, де A — довільна квадратна матриця (над k), унітрикутне зображення групи G наступного вигляду:

$$T_A(a) = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & E & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & E & E & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right)$$

(всі клітини мають однаковий розмір).

Розглядаючи рівність $T_A(a)C = CT_B(a)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами, покажемо, що $T_A(a)$ та $T_A(b)$ унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A та B (можна вважати, що клітини матриць $T_A(a)$ та $T_B(a)$ мають однаковий розмір, інакше вони не можуть бути подібними як матриці різного розміру). Розіб'ємо матрицю C на блоки C_{ij} у відповідності із розбиттям матриць $T_A(a)$ та $T_B(a)$:

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ \hline 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & C_{67} & C_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{77} & C_{78} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{88} \end{array}\right).$$

Перемноживши поблоково матриці, які стоять в лівій та правій частинах рівності $T_A(a)C = CT_B(a)$, та прирівнявши відповідні матриці, отримаємо наступну систему лінійних матричних рівнянь відносно ненульових клітин матриці C (тотожні рівняння ми не вказуємо):

$$C_{22} = C_{11}, \tag{44}$$

$$C_{23} = 0, \tag{45}$$

$$C_{24} = 0, \tag{46}$$

$$C_{25} = C_{12} + C_{13} + C_{14}, \tag{47}$$

$$C_{26} = C_{13}B + C_{14}, \tag{48}$$

$$C_{27} = C_{14}, \tag{49}$$

$$C_{28} = C_{17}, \tag{50}$$

$$C_{55} = C_{22} + C_{23} + C_{24}, \tag{51}$$

$$C_{56} = C_{23}B + C_{24}, \tag{52}$$

$$C_{57} = C_{24}, \tag{53}$$

$$C_{58} = C_{27}, \tag{54}$$

$$C_{55} = C_{33} + C_{34}, \tag{55}$$

$$C_{56} + AC_{66} = C_{33}B + C_{34}, \tag{56}$$

$$C_{57} + AC_{67} = C_{34}, \tag{57}$$

$$C_{58} + AC_{68} = C_{37}, \tag{58}$$

$$C_{55} = C_{44}, \tag{59}$$

$$C_{56} + C_{66} = C_{44}, \tag{60}$$

$$C_{57} + C_{67} + C_{77} = C_{44}, \tag{61}$$

$$C_{58} + C_{68} + C_{78} = C_{47}, \tag{62}$$

$$0 = C_{57}, \tag{63}$$

$$0 = C_{67}, \tag{64}$$

$$C_{88} = C_{77}. \tag{65}$$

Проаналізуємо цю систему.

З рівнянь (44), (45), (46), (51), (52), (55), (57), (59), (60), (61), (63), (64), (65) випливає, що

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = C_{66} = C_{77} = C_{88},$$

а з рівнянь (45), (46), (52), (56), (57), (63), (64) — що

$$AC_{66} = C_{33}B.$$

Тому $AC_{33} = C_{33}B$ або $(C_{33})^{-1}AC_{33} = B$ (зауважимо, що матриця C_{33} унітрикутна). Таким чином, якщо матриці $T_A(a)$ та $T_B(a)$ — унітрикутно подібні, тобто має місце рівність $T_A(a)C = CT_B(a)$ для деякої унітрикутної матриці C, то матриці A та B є унітрикутно подібними.

Навпаки, якщо матриці A та B є унітрикутно подібними, тобто $AX = XB$ для деякої унітрикутної матриці X, то

$$T_A(a)C = CT_B(a)$$

для блоково-діагональної матриці C з діагональними блоками $C_{ii} = X$, а значить матриці $T_A(a)$ і $T_B(a)$ — унітрикутно подібні.

Отже, ми довели, що зображення T_A та T_B унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A та B. А значить група G унітрикутно дика.

Таким чином, теорема 2 має місце, якщо група G циклічна.

Нехай, нарешті, група G нециклічна. Оскільки в цьому випадку фактор-група по комутанту $H = G/G'$ не може бути циклічною групою, то H (а значить і G) має фактор-групу H_0, що є прямим добутком двох циклічних підгруп порядку p. Звідси випливає, що для $p > 2$ група G має циклічну фактор-групу порядку p, а значить (згідно вже доведеного) є унітрикутно дикою. Таким чином, щоб завершити доведення теореми, залишилося розглянути випадок, коли група G є прямим добутком двох циклічних підгруп порядку 2:

$$G = \{a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba\}.$$

Покладемо

$$T_A(a) = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad T_A(b) = \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що два такі зображення T_A та T_B унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли матриці A та B унітрикутно подібні. Отже G — унітрикутно дика.

Теорему 2 доведено.

Розглянемо тепер випадок довільних скінченних груп.

Для скінченної групи G та цілого числа $m \geq 0$ позначимо через $G(n)$ нормальний дільник G, породжений елементами, порядки яких взаємно прості з n (зокрема, $G(0) = G$). Очевидно, що коли число n просте, то фактор-група $G/G(n)$ є n-групою.

Твердження 2. *Нехай G — скінченна група і k — поле характеристики $p \geq 0$. Тоді будь-яке унітрикутне зображення $T : G \to \mathbf{UT}_n(k)$ індукується зображенням фактор-групи $G/G(p)$ (тобто $T = \phi S$, де S — унітрикутне зображення $G/G(p)$ і $\phi : G \to G/G(p)$ — проекція G на $G/G(p)$).*

Твердження випливає із того, що якщо $A^m = E$ для унітрикутної матриці A і до того ж m взаємно просте з p, то $A = E$.

Безпосередньо з теореми 2 та твердження 2 (з урахуванням того факту, що $G/G(p)$ — p-група) випливає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай G — скінченна група і k — поле характеристики $p > 0$. Тоді*

a) якщо $p \neq 2$ і $[G : G(p)] > 1$, то група G унітрикутно дика;

b) якщо $p = 2$ і $[G : G(p)] > 2$, то група G унітрикутно дика.

Зауважимо, що якщо $G = G(p)$ (зокрема, коли p взаємно просте з порядком групи), то унітрикутні зображення групи G вичерпуються одиничними зображеннями (це випливає із твердження 2); якщо ж $p = 2$ і $[G : G(p)] = 2$, то унітрикутні зображення групи G описує теорема 2 разом із твердженням 2.

Література

[1] *Гудивок П. М., Капитонова Ю. В., Поляк С. С., Рудько В. П., Цыткин А. И.* Классы сопряженных элементов унитреугольной группы // Кибернетика. - 1990. - N1. - С. 40-48, 133.

[2] *Бондаренко В. В.* Про спряжені елементи порядку 2 в групі унітрикутних матриць над полем характеристики 2 // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. - 2005. - вип. 10-11. - С. 9-21.