КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 681.3

И.Н. ПАРАСЮК, Ф.В. КОСТУКЕВИЧ

НЕЧЕТКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ВОПРОСЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В АЛГОРИТМАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДОВЕРИЯ НА БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ

Рассмотрены общие схемы алгоритмов распространения доверия для байесовских сетей. Основное внимание уделено свойствам вероятностных и нечетких потенциалов. Авторами построены новые алгоритмы распространения доверия для потенциалов, определенных над байесовскими сетями с детерминированными состояниями. Описаны структуры этих алгоритмов, условия их корректной работы, полученные при моделировании основных операций с потенциалами, заданными над нечеткими множествами.

Введение. Интерес к вероятностным моделям в виде байесовских сетей и к методам их эффективной компьютеризации чрезвычайно велик, так как они позволяют оценивать и прогнозировать состояния сложных систем [1]. Правда, использующиеся для этих целей методы ориентированы на четкую (точечную) информацию в виде оценок вероятностей и потенциалов, которая, как показывает опыт, не всегда адекватно может отображать реалии и сужает альтернативы в принятии решений. Весьма интересно использовать для этих целей нечеткую информацию [2], тем более, что положительный опыт такого подхода имеется, например, в [3].

В данной работе введено понятие нечетких потенциалов, проведен сравнительный анализ вероятностных распределений, а также приведены новые алгоритмы распространения доверия над байесовскими сетями, использующие нечеткие входные данные.

Определение потенциалов и операций над ними. Случайные переменные или их множества, здесь и далее, обозначаются большими буквами, а их отдельные значения – малыми буквами: $X = x$ означает, что переменная X получает значение x, или вектор переменных $X = (X_1,\ldots,X_n)$, получает вектор значений $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Область определения для X обозначается $\mathrm{dom}(X)$; $\|X\|=$ $= |\mathrm{dom}(x)|$ определяет количество возможных различных значений переменной X.

Если $X = (X_1,\ldots,X_n)$, тогда dom(X) – декартовное произведение (такое произведение называют пространством состояний, а его элементы – конфигурациями [4]) над областями определения переменных в X, т. е. $\|X\| = \prod_i \| X_i \|$.

Потенциал – это функция $\varphi: D \to K$, где D – пространство состояний и K – множество значений потенциала. Если сумма значений потенциала над областью его определения равна 1, то такой потенциал называется нормализованным. Множество потенциалов обозначается Φ. Для обозначения области определения потенциала φ используют нижний индекс (например, φ_X – потенциал, определенный над dom(X)) или записывают dom(φ).

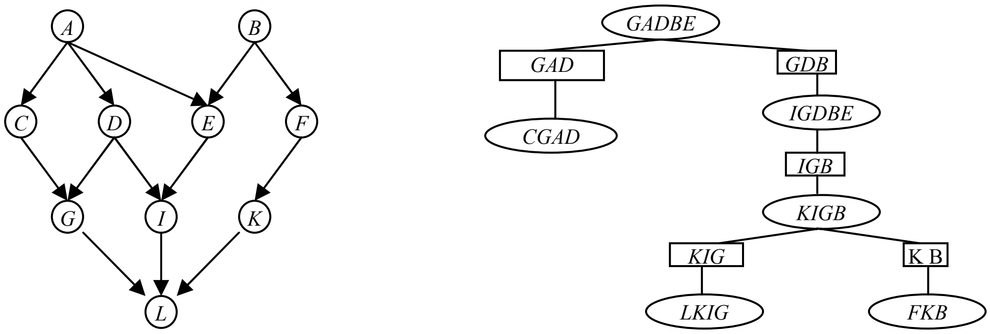
Для графического представления взаимосвязей между потенциалами введем, по аналогии с [4], обобщенное определение байесовской сети (БС) $N = (X, G, P)$ (рис. 1, а), состоящей из:

– ациклического орграфа $G = (V, E)$ с узлами $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ и дугами $E = V\times V$;

– множество случайных переменных X, которые представлены узлами графа G;

– множества потенциалов $\Phi = \{\Phi(X_v, X_{pa(v)})\}$ для каждой переменной $X_v \in X$, $X_{pa(v)}$ – множество соответствующих ей родительских переменных.

Согласно [1, 5], БС $N = (X, G, P)$ возможно трансформировать в соответствующее узловое деревом $\widetilde{T} = (\widetilde{C}, \widetilde{S})$ (рис. 1, б), где $\widetilde{C}$ – множество клик, $\widetilde{S}$ – множество сепараторов. Клики – представляют собой вершины дерева $\widetilde{T}$, а сепараторы – обозначают ребра этого дерева. Ребро между двумя соседними кликами C_i и C_j является их пересечением, т. е. $S = C_i \cap C_j$, где $S \in \widetilde{S}$.



а б

РИС. 1. Для БС (а), узловое дерево $\widetilde{T}$ (б)

Узловое дерево $T = (C,S)$ состоит из множества клик $C = \{\{GADBE\}, \{CGAD\}, \{IGDBE\}, \{KIGB\}, \{LKIG\}, \{FKB\}\}$ и множества сепараторов $S = \{\{GAD\}, \{GDBE\}, \{IGB\}, \{KIG\}, \{KB\}\}$.

Определение 1.1. БС называется вероятностной [1], если для каждого ее узла потенциал P определяется как функция $P : D \to R^+$, где R^+ – множество неотрицательных действительных чисел. Такой потенциал называют вероятностным распределением. Например, для узла F (рис. 1, а) потенциал определяется через условное вероятностное распределение $P(F \mid B)$, заданное над пространством $F \times B$, состоящим из взаимно исключающих конфигураций.

Определение 1.2. БС назовем нечеткой, если для каждого ее узла нечеткий потенциал μ, согласно [2, 6], определяется как функция принадлежности $\mu : D \to [0;1]$. Например, для узла БС F (рис. 1, а), каждому элементу пространства $F \times B$ соответствует неотрицательное действительное число $\mu_{F\times B}$, в интервале от 0 до 1 включительно, называемое степенью принадлежности. В отличие от вероятностного распределения $P(F|B)$ потенциал $\mu_{F\times B}$, заданный над пространством $F \times B$, представляет распределение возможностей, что является расширением по отношению к вероятностному потенциалу $P(F \mid B)$.

Для потенциалов определены две основные операции: комбинация и проекция (маргинализация [1, 6]). Комбинация потенциалов, обозначаемая "$\otimes$", – это бинарная операция $\Phi\otimes\Phi\to\Phi$, которая должна быть ассоциативной, коммутативной. Для операции $\otimes$ должен существовать нейтральный элемент e, такой, что $\varphi\otimes e = e\otimes\varphi = \varphi$. Проекция потенциала – также бинарная операция $\Phi\otimes D\to\Phi$, которая сокращает область определения потенциала, а именно: если область определения φ – $\mathrm{dom}(\varphi)$, то проекция φ на подпространство $X \subseteq \mathrm{dom}(\varphi)$, обозначаемая $\varphi^{\downarrow X}$, определена над $X \cap \mathrm{dom}(\varphi)$. Основное свойство проекции – транзитивность; кроме того – проекция дистрибутивна относительно операции $\otimes$.

Определение 2.1. Для вероятностных потенциалов P_1 и P_2, определенных над $\mathrm{dom}(X)$ и $\mathrm{dom}(Y)$ соответственно, для произвольного $z\in\mathrm{dom}(X \cup Y)$ поэлементное произведение $P_1\otimes P_2$ определяется, согласно [1], по формуле:

$$(P_1\otimes P_2)(z) = P_1(z_X)P_2(z_Y), \tag{1}$$

где z_X и z_Y – проекция конфигурации z на $\mathrm{dom}(X)$ и $\mathrm{dom}(Y)$ соответственно.
Проекция вероятностного потенциала $P^{\downarrow X}$ на X определяется, как суммирование (или нахождение максимального значения) над всеми переменными из $\mathrm{dom}(P)$, кроме X. Например, для клики узлового дерева $\{GADBE\}$ (рис. 1, б), над которой определен потенциал $P(GADBE)$, проекция $P^{\downarrow G}(z) = \max\limits_{z\in\mathrm{dom}(P)} P(z_G, z_{ADBE})$,

где z_G и z_{ADBE} – проекция конфигурации z на $\mathrm{dom}(G)$ и $\mathrm{dom}(ADBE)$ соответственно.

Определение 2.2. Для нечетких потенциалов μ_1 и μ_2 комбинация $\otimes$ – поэлементная операция, определяемая для произвольного $z\in\mathrm{dom}(X \cup Y)$ на основе выбранного подхода [2, 6]:

теоретико-множественного, т. е.

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(z) = \min(\mu_1(z_X), \mu_2(z_Y)); \tag{2}$$

алгебраического

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(z) = (\mu_1(z_X)\, \mu_2(z_Y) \,/\, \max(\mu_1(z_X)\, \mu_2(z_Y)), \tag{3}$$

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(z) = (\mu_1(z_X)\, \mu_2(z_Y) \,/\, 1-(1-\mu_1(z_X))(1-\mu_2(z_Y))), \tag{4}$$

где z_X и z_Y – проекция конфигурации z на dom(X) и dom(Y) соответственно.

Например, для нечетких потенциалов поэлементное алгебраическое умножение ($\mu_{LGIK}\ \mu_{KGI}$) – обобщение умножения вероятностных потенциалов ($P_{LGIK}\ P_{KGI}$), а применение теоретико-множественного умножения к этим нечетким потенциалам, позволяет избежать получения очень малых чисел, получаемых при умножении соответствующих вероятностных потенциалов.

Проекция нечеткого потенциала $\mu^{\downarrow X}$ определяется, как нахождение максимального значения над всеми переменными из dom(P), кроме X:

$$\mu^{\downarrow X} = \max_{z_Y \in \mathrm{dom}(\mu)} \mu(z_X, z_Y). \tag{5}$$

Применение операции max над нечетким потенциалом позволяет находить степень принадлежности каждого элемента конфигурации или максимальную степень принадлежности среди всех конфигураций, что является обобщением операций суммирования и максимизации вероятностного потенциала.

Для двух потенциалов φ_1 и φ_2, имеет место деление $\varphi_1 \div \varphi_2$, если они принадлежат частично упорядоченному множеству потенциалов Ф, т. е $\varphi_2 \le \varphi_1$, и существует такой потенциал ψ, что

$$\varphi_2 \otimes \psi \to \varphi_1, \tag{6}$$

где $\mathrm{dom}(\varphi_2) \cup \mathrm{dom}(\psi) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi_1)$. Множество потенциалов Ф называется частично упорядоченным, если для двух произвольных из Ф потенциалов φ_1 и φ_2 из того, что $\mathrm{dom}(\varphi_2) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi_1)$, следует $\varphi_2 \le \varphi_1$.

Определение 3.1. Для вероятностных потенциалов поэлементное деление определяется формулой

$$(\varphi_1 \div \varphi_2)(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_1(z_X) = 0, \\ \varphi_1(z_X)/\varphi_2(z_Y), & \text{если } \varphi_2(z_Y) \ne 0, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{7}$$

На основе формулы (7) для вероятностных потенциалов вводится определение условной вероятности [1].

Определение 3.2. Для нечетких потенциалов μ_1 и μ_2 деление согласно (7), возможно в том случае, если операция $\otimes$ определена алгебраическим способом и существует функция μ, удовлетворяющая условие (6). Например, деление нечетких потенциалов для всех сепараторов из множества $\widetilde{S}$ (рис. 1, б) в алгоритме HUGIN возможно, если операция $\otimes$ определена согласно (4).

Схемы алгоритма распространения нечеткого доверия. После создания узлового дерева $\widetilde{T} = (\widetilde{C}, \widetilde{S})$ (рис. 1, б) – каждая его вершина инициализируется потенциалами: каждый потенциал $\varphi\in\Phi$ присоединяется к клике так, чтобы $\mathrm{dom}(\varphi) \subseteq C$ для $C \in \widetilde{C}$. Тогда все $\varphi \in \Phi$, которые присоединяются к одной и той же клике – перемножаются. Например, для клики (FKB) узлового дерева (рис. 1) выбирают потенциалы, полностью определенные над ней: $\varphi(K|F)$, $\varphi(F|B)$, $\varphi(B)$, тогда, для каждой комбинации состояний, значения потенциала вычисляются по формуле $\varphi(FKB) = \varphi(K|F)\bullet\varphi(F|B)\bullet\varphi(B)$. Для всех сепараторов и клик, к которым потенциалы не присоединялись, последние инициализируются единицей.

Доказано в [6], что множество потенциалов с операциями $\otimes$ и $\downarrow$, обладающими всеми вышеперечисленными свойствами, образуют алгебру $(\Phi, D, \otimes, \downarrow)$, позволяющую выполнять локальные вычисления для потенциалов над узловым деревом, объединяя затем отдельные результаты в общий. Такая схема называется алгоритмом распространения доверия (АРД). Выполнение АРД (после инициализации) делится на два этапа (две фазы): выполнение процедуры COLLECT и DISTRIBUTE. Процедура COLLECT вычисляет для переменных корневой клики общее распределение вероятностей, которое учитывает все (непосредственные и опосредствованные) связи между всеми переменными БС и наличие свидетельств, поэтому вычисления начинаются от листьев дерева и заканчиваются в корневой вершине. Чтобы получить общее вероятностное распределение вероятностей для каждой оставшейся клики – выполняют вычисления в обратном порядке (от корневой клики – к листьям) с помощью процедуры DISTRIBUTE. После завершения АРД, применяя соответствующие операции проекции к произвольной клике, можно получить вероятностное распределение для каждой переменной БС или наиболее вероятную конфигурацию состояний.

Используя рекурсивное описание процедуры COLLECT, ее реализовывают с помощью алгоритма «поиск в глубину», а процедуру DISTRIBUTE – алгоритмом «поиск в ширину» [7]. Для реализации основной процедуры, входящей в состав процедур COLLECT и DISTRIBUTE, которая выполняет вычисления для одной клики на основе результатов вычислений в соседних кликах, применяют один из двух алгоритмов: более общий – алгоритм $S-S$ [5] и специализированный (с использованием операции деления) – алгоритм HUGIN [6].

Пусть в качестве потенциалов рассматриваются нечеткие потенциалы μ, определенные теоретико-множественным способом, и АРД вызывается из клики C_i, для клики C_j. Тогда алгоритм $S-S$ имеет следующую структуру (потенциалы

φ вычисляются на основе функций соответствия и хранят результаты промежуточных вычислений):

Алгоритм PASS_INFORMATION(C_i, C_j)

if клика C_j имеет смежные клики $C_k \neq C_i$, **then**

φ: = 1;

for each смежной кликой $C_k \neq C_i$:φ: = min(φ,$\varphi_{k\to j}$);

$\varphi_{j\to i}$: = $\max\limits_{C_j \backslash C_i}$ (min(φ, μ_j))

else $\varphi_{j\to i}$: = $\max\limits_{C_j \backslash C_i}$ (μ_j).

После выполнения алгоритма PASS_INFORMATION(C_i, C_j), ребро ведущее из смежной клики C_j в корневую клику C_i содержит потенциал (сообщение) рекурсивно вычисленный на основе всех остальных клик узлового дерева.

Алгоритм HUGIN в ходе вычислений использует промежуточную структуру данных в узловом дереве – сепаратор S (ребро, соединяющее смежные клики и сохраняющее потенциал, область определения которого dom($C_i \cap C_j$). Поскольку общая структура HUGIN-алгоритма использует операцию деления потенциалов, то конструкция алгоритма, с применением для нечетких потенциалов операций (2), (4) и (7), будет следующей.

Алгоритм PASS_INFORMATION (C_i, C_j).

1. Вычислить проекцию клики C_j на C_i , т. е. потенциал сепаратора S:

$$\overset{*}{\mu}_S := \max_{C_j \backslash S}(\mu_{C_j}) .$$

2. Вычислить коэффициент обновления сепаратора:

if μ_S= 0 **then** μ_{C_i} : = 0

else $\mu_{C_i} := \mu_{C_i} \cdot \dfrac{\overset{*}{\mu}_S \cdot \mu_S}{\mu_S - \overset{*}{\mu}_S + \mu_S \cdot \overset{*}{\mu}_S}$ (следует из формул (4, 6)).

3. Заменить старый потенциал – новым: μ_S: = $\overset{*}{\mu}_S$.

Результатом роботы алгоритма станут обновленные потенциалы клики C_i и сепаратора S.

Корректность работы АРД в нечеткой информационной среде и моделирование операций над нечеткими потенциалами. Нетрудно убедиться, что вышеописанные АРД с нечеткой информацией, т. е. на основе учета функций принадлежности, выполняются корректно. Доказательством этому являются следующие факты:

– схемы алгоритмов S – S и HUGIN для функций принадлежности однозначно соответствуют общим схемам алгоритмов [6], сконструированных для потенциалов алгебры (Ф, D, ⊗, ↓);

– операции над функциями принадлежности (определенные теоретико-множественным или алгебраическим способом) являются частичным случаем потенциала, принадлежащего алгебре (Ф, D, ⊗, ↓), и имеют все свойства потенциала, позволяющего корректно выполнять вычисления над узловым деревом.

Из этого следует, что алгоритмы АРД в нечеткой информационной среде выполняются корректно (по ангалогии с соответствующими алгоритмами для вероятностных потенциалов).

Уместно отметить, что выбор операций над нечеткими потенциалами, является достаточно сложным и вместе с тем весьма принципиальным и важным вопросом для реализации АРД. Поскольку функция min не имеет обратной функции (по аналогии как операция деления – обратная к операции умножения), поэтому ее использование ограничено алгоритмом S – S. Недостатком данного алгоритма, как указывается в [1], являются вычисления потенциалов, имеющих достаточно большие области определения. С другой стороны, при использовании вероятностной модели над потенциалами выполняются операции умножения, тогда как при использовании нечетких моделей – замена операции умножения на операцию min, ускоряет выполнение АРД. Таким образом, применение теории нечетких множеств к алгоритму S – S позволяет уменьшить время вычислений, сохранив одновременно корректность модели.

Особенность использования АРД HUGIN – наличие операции деления нечетких потенциалов. Моделирование вычислений потенциалов, где операция ⊗ определялась алгебраическим путем, показало, что, согласно аксиоматическому определению операций [2], значения функции min можно аппроксимировать алгебраическими функциями (рис. 2). Здесь представлены следующие определения операции ⊗ для двух произвольных функций принадлежности μ_1 и μ_0, где значение μ_0 – фиксированное и равно 0,6:

$$\mathrm{MIN}{:=}\min(\mu_1,\mu_2);\qquad F2{:=}\ \mu_1,\mu_0;$$
$$F3:=\sqrt{\mu_1\mu_0}\,;\qquad F4:=\mu_1\mu_0+\sqrt{\mu_1\mu_0(1-\mu_0)(1-\mu_1)}.$$

Для определения ⊗ возможно также использовать семейства функций (семейства Франка, семейство Хамакера и др. [2]). Возможность выбора наиболее подходящей для конкретной задачи функции обеспечивает достаточную гибкость и эффективность на практике.

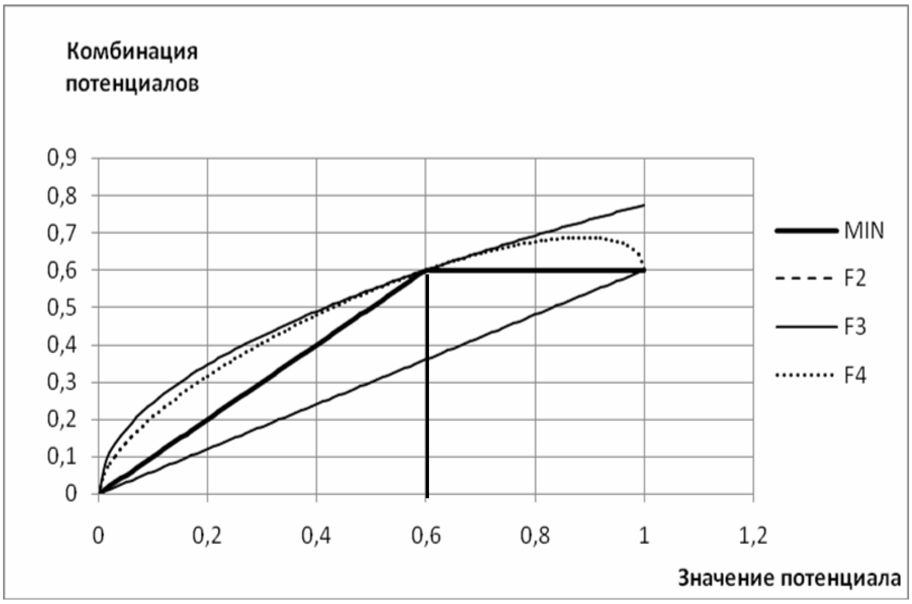


РИС. 2. Апроксимация функции min алгебраическим способом

Выводы. Таким образом, нами построены новые алгоритмы моделирования состояний сложных систем на основе размытых знаний о предметной области путем реализации процесса распространения доверия для нечетких потенциалов, определенных над байесовскими сетями с детерминированными состояниями.

Анализ построенных алгоритмов, показал, что такие алгоритмы выполняются корректно и требует меньших затрат вычислительных ресурсов по сравнению с применением аналогичных алгоритмов для вероятностных моделей.

Полученные результаты найдут свое применение при построении соответствующей нечеткой информационной технологии моделирования сложных систем.

І.М. Парасюк, Ф.В. Костукевич

НЕЧІТКІ ПОТЕНЦІАЛИ ТА ПИТАННЯ ПРО ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
В АЛГОРИТМАХ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ДОВІРИ НА БАЄСІВСЬКИХ МЕРЕЖАХ

Розглянуто загальні схеми алгоритмів розповсюдження довіри на баєсівських мережах. Побудовано нові алгоритми розповсюдження довіри на основі нечітких потенціалів. Доведена коректність виконання цих алгоритмів та вказані умови їх застосування, при яких ці алгоритми є найбільш ефективними.

I.M. Parasyuk, F.V. Kostukevich

FUZZY POTENTIALS AND THEIR APPLICATION PROBLEMS IN BELIEF PROPAGATION ALGORITHMS ON BAYESIAN NETWORKS

The most effective schemes of algorithms of belief propagation on Bayesian network are investigated. The new algorithms based on the fuzzy sets theory are constructed. Their structures and correct operation conditions, obtained during modeling the main operations with potentials given on fuzzy sets, are described.

1. *Cowell R.G., Dawid A.P., Spiegelhalter D.J., Lauritzen S.L.* Probabilistic Networks and Expert Systems. – Springer–Verlag, New York, Inc., 1999. – 321 p.
2. *Bellman R.E., Gierts M.* On the analitical formalism of theory of fuzzy sets."Inform. Sci.", 1973. – **5**, N 2. – P. 149–156.
3 *Верьовка О.В., Парасюк И.Н.* О распространении вероятностей в нечетких байесовских сетях с недетерминированными состояниiями // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 153–169.
4. *Kjaerulff Uffe B., Madsen Anders L.* Bayesian Networks and Influence Diagrams. – Springer Science+Business Media, LLC, 2008. – 318 p.
5. *Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В.* Методы трансформации байесовской сети для построения узлового дерева и их модификация // Компъютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 70–80.
6. *Shenoy P.P.* Valuation-based systems for discrete optimization // In Uncertainty in Artificial Intelligence (ed. P.P. Bonissone, M. Henrion, L.N. Kanal and J.F. Lemmer), North-Holland, Amsterdam, The Netherlands. – 1991. – № 6. – P. 385–400.
7 *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ : Пер. с англ. под ред. А. Шеня. – М.: МЦНМО:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 960 с.

Получено 11.12.2008

Об авторах:

Парасюк Иван Николаевич,
член-корреспондент НАН Украины,
заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-Mail: ivpar1@i.com.ua

Костукевич Феликс Витальевич,
аспирант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-Mail: internat_m@fk.lutsk.ua