КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 532.546:539.3

В.В. СКОПЕЦКИЙ, О.А. МАРЧЕНКО, Т.А. САМОЙЛЕНКО

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРУЮЩИХ ГРУНТОВ

Рассмотрена начально-краевая задача для нелинейной системы одного параболического уравнения влагопереноса-фильтрации и двух гиперболических уравнений теории упругости. Построен алгоритм численного решения соответствующей обобщенной задачи, сформулированной по методу Галеркина. Представлены результаты вычислительного эксперимента.

Введение. Проблема математического моделирования и исследования взаимосвязанных процессов влагопереноса-фильтрации и упругой деформации в неоднородных по структуре грунтовых массивах представляет собой сложную математическую задачу, которая в настоящее время не разрешает учитывать все влияющие на деформацию грунта факторы, заставляя вводить в математические модели определенные допустимые ограничения [1–5]. В работе сформулирована дифференциальная модель грунтового фильтрующего сооружения и предложен новый подход, при котором рассмотрение вышеупомянутых физических процессов сводится к решению задачи для общего операторного уравнения; построен алгоритм численного решения соответствующей задачи. Учитывая неоднородность структуры грунтового массива, последний при постановке начально-краевой задачи задается в виде области, являющейся объединением подобластей-пластов, в каждом из которых рассматривается система уравнений со своими физическими параметрами. На участках контакта подобластей с необходимостью задаются условия сопряжения, отражающие реальные физические процессы на этих участках в каждом конкретном случае.

В плоской постановке процесс описывается начально-краевой задачей для нелинейной системы одного параболического уравнения влагопереноса-фильтрации и двух гиперболических уравнений теории упругости такого вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} - div\left(K_{\phi}(h,u) \cdot grad \;\; h\right) = f(x,t), \\ \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(Au\right)(h,u) = -grad \;\; h + F(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T,\ \Omega_T = \Omega \times (0,T], \end{cases} \tag{1}$$

где $u(x,t) = \left(u_1(x,t), u_2(x,t)\right)^T$, $x = (x_1, x_2)^T$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$; $K_{\phi}(h,u)$ – матрица вида:

$$K_{\phi}(h,u) = \begin{pmatrix} k_1(h,u) & 0 \\ 0 & k_2(h,u) \end{pmatrix};$$

A – оператор теории упругости:

$$\left(Au\right)(h,u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{x_1} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\tau_{x_1 x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\tau_{x_1 x_2} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{x_2} \end{pmatrix},\ (x,t) \in \Omega_T;$$

$$\sigma_{x_1} = \lambda(h,u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 2\mu(h,u)\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{x_2} = \lambda(h,u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 2\mu(h,u)\frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$\tau_{x_1 x_2} = \mu(h,u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right);$$

компоненты матрицы $K_{\phi}(h,u)$, коэффициенты Ламе $\lambda(h,u)$, $\mu(h,u)$, функция $f(x,t)$ и компоненты вектор-функции $F(x,t) = \left(F_1(x,t),\ F_2(x,t)\right)^T$ имеют достаточную гладкость; $\rho = \text{const} \geq 0$.

Краевые условия зададим таким образом:

$$h(x,t) = \varphi(x,t),\ (x,t) \in \Gamma_3 \times (0,T]; \tag{2}$$

$$k_1 \frac{\partial h}{\partial x_1}\cos(n, x_1) + k_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}\cos(n, x_2) = 0, \quad (x,t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4) \times (0,T]; \tag{3}$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,T], \quad u_1 = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T]; \tag{4}$$

$$\tau_s = 0,\ (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T],\ \sigma_n = S(x,t),\ \tau_s = T(x,t),\ (x,t) \in (\Gamma_3 \cup \Gamma_4) \times (0,T], \tag{5}$$

где σ_n, τ_s – нормальная и касательная составляющие вектора напряжений, $\bigcup\limits_{i=1}^{4}\Gamma_i = \partial\Omega \setminus \gamma$ $(\gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2})$.

Начальные условия:

$$h(x,0) = h_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = q_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{6}$$

Неоднородные условия сопряжения неидеального контакта на участке соприкосновения грунтовых пластов $\gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ [1, 3]:

$$\left[k_1 \frac{\partial h}{\partial x_1}\cos(n,x_1) + k_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}\cos(n,x_2)\right] = 0, \tag{7}$$

$$\left\{k_1 \frac{\partial h}{\partial x_1}\cos(n,x_1) + k_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}\cos(n,x_2)\right\}^{\pm} = r(h,u)[h], \quad (x,t) \in \gamma \times (0,T]; \tag{8}$$

$$[u_n] = 0, \tag{9}$$

$$[\sigma_n] = 0, \tag{10}$$

$$[\tau_s] = 0, \ \{\tau_s\}^{\pm} = R(h,u)\ [u_s], \ (x,t) \in \gamma \times (0,T], \tag{11}$$

где $r(h,u), R(h,u) \ge 0$ – параметры тонкого включения γ, характеризующие его водопроницаемость и прочность на сдвиг соответственно.

Здесь φ, S, T, h_0, u_0, q_0, r, R – заданные функции достаточной гладкости; n – нормаль к отрезку γ, направленная в Ω_2.

Обозначим Z – множество вектор-функций $w(x,t) = (h(u,t),u(x,t))^T$, компоненты которых принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$ $\forall t \in (0,T]$, а компоненты их производных по времени $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \forall t \in (0,T], \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ вместе с компонентами $h(x,0), u(x,0)$ принадлежат $L_2(\Omega)$.

Запишем систему (1) в операторном виде:

$$M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \overline{M}\frac{\partial w}{\partial t} + (Lw)(w) = \overline{F}(x,t), \ (x,t) \in \Omega_T, \tag{12}$$

где $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Lw = \begin{pmatrix} -div(K_\phi grad\ \ h) \\ -Au + grad\ \ h \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{F}(x,t) = \begin{pmatrix} f(x,t) \\ F(x,t) \end{pmatrix}$.

Пусть множеству Z_0 принадлежат вектор-функции $z(x) = (p(x), q(x))^T$, $q(x) = (q_1(x), q_2(x))$, удовлетворяющие однородным главным краевым условиям

(2), (4), главному условию сопряжения (9), а их компоненты принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$.

Умножив уравнение (12) скалярно в пространстве $L_2(\Omega)$ на вектор-функцию $z \in Z_0$, $z = (p, q)^T$, получаем:

$$\left(M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ z \right) + \left(\overline{M}\frac{\partial w}{\partial t},\ z \right) + ((L_0 w)(w),\ z) = (\tilde{F},\ z) \quad \forall z \in Z_0,\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{13}$$

где

$$\left(M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, z \right) = \rho \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} q_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} q_2 \right) d\Omega, \quad \left(\overline{M}\frac{\partial w}{\partial t}, z \right) = \iint_\Omega \frac{\partial h}{\partial t} p\, d\Omega,$$

$$((L_0 w)(w), z) = W_1(w;\ h,\ p) + W_2(w; u, q) + F_h(h, q),$$

$$W_1(w;\ h,\ p) = \iint_\Omega \left(k_1(w)\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial p}{\partial x_1} + k_2(w)\frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial p}{\partial x_2} \right) d\Omega + \int_\gamma r(w)[h]\ [p]\, d\gamma,$$

$$W_2(w;\ u,\ q) = \iint_\Omega \left[\lambda(w)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu(w)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_2} \right) + \right.$$

$$\left. + \mu(w)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right) \right] d\Omega + \int_\gamma R(w)[u_s]\ [q_s]\, d\gamma,$$

$$F_h(h, q) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} q_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} q_2 \right) d\Omega,$$

$$(\tilde{F},\ z) = \iint_\Omega (fp + F_1 q_1 + F_2 q_2)\, d\Omega + \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} \left(S(x,t) q_n + T(x,t)\, q_s \right) d\Gamma.$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1), (2)–(11), допускающей разрыв в решении по пространственным переменным, называется вектор-функция $w(x,t) = (h(x,t), u(x,t))^T \in Z$, которая удовлетворяет однородным главным краевым условиям (2), (4), главным условиям сопряжения (9) и для любой вектор-функции $z(x) = (p(x), q(x))^T \in Z_0$ удовлетворяет равенству (13) и следующим интегральным соотношениям:

$$\left(w(x,0),\ z(x) \right) = \left(w_0(x),\ z(x) \right), \ \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x,0),\ z(x) \right) = \left(w_1(x),\ z(x) \right) \quad \forall z \in Z_0, \tag{14}$$

где $w_0(x) = (h_0(x),\ u_0(x))^T$, $w_1(x) = (0,\ q_0(x))^T$.

Непрерывное по времени приближенное обобщенное решение будем искать методом конечных элементов (МКЭ) в соответствующем конечно-измеримом пространстве $Z^N \subset Z$. Для этого разобъем область $\overline{\Omega}$ на треугольные элементы $\overline{e}_i \, (\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I} \overline{e}_i, e_i \cap e_j = \varnothing, i \neq j, i, j = \overline{1, I})$, которые удовлетворяют признаку «регулярности».

Запишем произвольную функцию $w^N(x,t) \in Z^N$ в виде:

$$w^N(x,t) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i(t) \;\; \Phi_i(x), \tag{15}$$

где $N' = 3N$ – количество базисных функций, которые отвечают N узловым точкам в разбиении области $\overline{\Omega}$ с учетом всех узловых точек на границе области; $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, N'}$, – функции, интегрируемые вместе со второй производной на [0,T]; $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^{N'}$ – базис пространства Z_t^N, который получается из Z^N фиксированием $\forall t \in [0,T]$. Компоненты данного базиса имеют вид

$$\Phi_i = (\varphi_i, \;\; 0, \;\; 0)^T, \; \Phi_{N+2i-1} = (0, \;\; \varphi_i, \;\; 0)^T, \; \Phi_{N+2i} = (0, \;\; 0, \;\; \varphi_i)^T, \; i = \overline{1,N},$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ – совокупность линейно независимых функций, соответствующих узловым точкам МКЭ, построенных на полных полиномах степени k (k = 1,2,3), что допускают разрыв первого рода на γ и имеют в $\overline{\Omega}$ ограниченный носитель.

Базис подпространства $Z_0^N \subset Z_0$ аналогично состоит из N' вектор-функций Φ_i, соответствующих функциям $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, N}$, т. е. любая функция $z^N(x) \in Z_0^N$ может быть представлена в виде:

$$z^N(x) = \sum_{i=1}^{N'} \beta_i \;\; \Phi_i(x), \tag{16}$$

где β_i – константы.

Приближенное обобщенное решение $w^N(x,t) \in Z^N$ задачи (13), (14) удовлетворяет следующим интегральным соотношениям:

$$\left(M \, \frac{\partial^2 w^N}{\partial t^2}, \;\; z^N \right) + \left(\overline{M} \, \frac{\partial w^N}{\partial t}, \;\; z^N \right) + ((L_0 w^N)(w^N), \;\; z^N) = (\tilde{F}, \;\; z^N)$$

$$\forall z^N \in Z_0^N, \quad \forall t \in (0,T], \tag{17}$$

$$\left(w^N(x,0), z^N\right) = \left(w_0(x), z^N\right), \;\; \left(\frac{\partial w^N(x,0)}{\partial t}, \;\; z^N \right) = \left(w_1(x), \;\; z^N\right) \quad \forall z^N \in Z_0^N. \tag{18}$$

Полностью дискретное приближенное обобщенное решение задачи (13), (14) будем искать путем приближенного решения задачи Коши (17)–(18). Пусть $T = K\tau$ для некоторого целого $K \ge 1$. Будем искать последовательность $\left\{W^k(x)\right\}_{k=0}^{K} \subset Z_t^N$, $W^k(x) = W(x, k\tau)$.

Определим следующие соотношения:

$$\partial_\tau W^k = \frac{1}{\tau}(W^{k+1} - W^k), \; W^{k+1/2} = \frac{1}{2}(W^{k+1} + W^k), \; k = \overline{0, K-1}. \tag{19}$$

Исходя из равенств (17)–(19), $\forall z^N \in Z_0^N$ запишем интегральные соотношения

$$(W^0, z^N) = (w_0, z^N), \quad (Q^0, z^N) = (q_0, z^N), \tag{20}$$

$$(M(\partial_\tau Q^k), z^N) + (\overline{M}(\partial_\tau W^k), z^N) +$$

$$+((L_0(W^{k+1/2}))(W^{k+1/2}), \; z^N) = (\tilde{F}^{k+1/2}, z^N), \tag{21}$$

$$W^{k+1} = W^k + \tau Q^{k+1/2}, \; k = \overline{0, K-1}, \tag{22}$$

где

$$W^{k+1}(x) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i^{k+1} \Phi_i(x), \; Q^{k+1}(x) = \sum_{i=1}^{N'} \gamma_i^{k+1} \Phi_i(x), \; k = \overline{0, K-1}, \tag{23}$$

$\{\Phi_i(x)\}_{i=0}^{N'}$ – базис пространства Z_t^N.

Легко показать, исходя из (15), (16), (23), что задача (20)–(22) соответствует следующей схеме Кранка – Николсона:

$$\alpha^0 = W^0, \quad \gamma^0 = Q^0, \tag{24}$$

$$\left(M + \frac{\tau}{2}\overline{M} + \frac{\tau^2}{4} L\left(\frac{W^{k+1} + W^k}{2}\right)\right)\gamma^{k+1} = \left(M - \frac{\tau}{2}\overline{M} - \frac{\tau^2}{4} L\left(\frac{W^{k+1} + W^k}{2}\right)\right)\gamma^k -$$

$$-\tau \; L\left(\frac{W^{k+1} + W^k}{2}\right)\alpha^k + \frac{\tau}{2}\left(\tilde{F}^{k+1} + \tilde{F}^k\right), \tag{25}$$

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \frac{\tau}{2}\left(\gamma^{k+1} + \gamma^k\right), \; k = \overline{0, K-1}. \tag{26}$$

Матрицы M, $\overline{M}$ и $L = A + R + F$ имеют размерность $N' \times N'$ и структуру:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_u \end{pmatrix}, \; \overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{M}h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} A_h & 0 \\ 0 & A_h \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} R_h & 0 \\ 0 & R_h \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_h & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Здесь

$$\overline{M}_h = \{\overline{m}_h^{ij}\}_{i,j=1}^N, \quad A_h = \{a_h^{ij}\}_{i,j=1}^N, \quad R_h = \{r_h^{ij}\}_{i,j=1}^N, \tag{28}$$

$$\overline{m}_h^{ij} = \iint_\Omega \varphi_i \varphi_j \, d\Omega, \quad a_h^{ij} = \iint_\Omega \left[k_1(w) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + k_2(w) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2,$$

$$r_h^{ij} = \int_\gamma r(w) q_{ij} \, d\gamma, \quad q_{ij} = [\varphi_i] \; [\varphi_j].$$

Матрицы жесткости A_u $(2N \times 2N)$ и масс M_u $(2N \times 2N)$ имеют следующую структуру:

$$A_u = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^N, \quad M_u = \{M_{ij}\}_{i,j=1}^N, \tag{29}$$

где A_{ij}, M_{ij} – элементарные матрицы вида

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} \end{pmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{pmatrix} m_{11}^{ij} & 0 \\ 0 & m_{22}^{ij} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,N}, \; j = \overline{1,N},$$

$$a_{11}^{ij} = \iint_\Omega \left[(\lambda(w) + 2\mu(w)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu(w) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 ,$$

$$a_{12}^{ij} = \iint_\Omega \left(\lambda(w) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu(w) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 ,$$

$$a_{21}^{ij} = \iint_\Omega \left(\lambda(w) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \mu(w) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 ,$$

$$a_{22}^{ij} = \iint_\Omega \left[(\lambda(w) + 2\mu(w)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \mu(w) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2;$$

$$m_{11}^{ij} = m_{22}^{ij} = \rho \iint_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx_1 dx_2 .$$

Матрица R_u $(2N \times 2N)$ имеет структуру, аналогичную матрице A_u, т. е.

$$R_u = \{R_{ij}\}_{i,j=1}^N, \quad R_{ij} = \begin{pmatrix} r_{11}^{ij} & r_{12}^{ij} \\ r_{21}^{ij} & r_{22}^{ij} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,N}, \; j = \overline{1,N}, \tag{30}$$

$$r_{11}^{ij} = \int_\gamma R(w) m_0^2 q_{ij} \, d\gamma, \quad r_{12}^{ij} = r_{21}^{ij} = \int_\gamma R(w) l_0 m_0 q_{ij} \, d\gamma, \quad r_{22}^{ij} = \int_\gamma R(w) l_0^2 q_{ij} \, d\gamma,$$

где $l_0 = \cos(n, x_1), m_0 = \cos(n, x_2)$, n – внешняя нормаль к участку контакта.

Матрица $F_h\,(2N \times N)$ учета градиента напора имеет структуру:

$$F_h = \{F_{ij}\}_{i=\overline{1,2N},\, j=\overline{1,N}}, \tag{31}$$

где $F_{ij} = \begin{pmatrix} f_1^{ij} \\ f_2^{ij} \end{pmatrix}$, $f_1^{ij} = \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_j \, d\Omega$, $f_2^{ij} = \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \varphi_j \, d\Omega$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,N}$.

Векторы $\tilde{F}(N'), W^0(N'), Q^0(N')$ имеют структуру:

$$\tilde{F}(t) = (f, F)^T = \left(f^1, f^2, ..., f^N, F_1^1, F_2^1, F_1^2, F_2^2, \dots, F_1^N, F_2^N\right)^T,$$

$$W^0(t) = (H^0(t), U^0(t))^T = \left(h_0^1, h_0^2, \dots, h_0^N, u_{01}^{\;1}, u_{02}^{\;1}, u_{01}^{\;2}, u_{02}^{\;2}, \dots, u_{01}^{\;N}, u_{02}^{\;N}\right)^T, \tag{32}$$

$$Q^0(t) = \left(0, ..., 0, q_{01}^{\;1}, q_{02}^{\;1}, q_{01}^{\;2}, q_{02}^{\;2}, \dots, q_{01}^{\;N}, q_{02}^{\;N}\right)^T,$$

где

$$f^i = \iint\limits_{\Omega} f\,(x,t)\varphi_i(x)\,d\Omega,$$

$$F_\nu^i = \iint\limits_{\Omega} F_\nu(x,t)\varphi_i(x)\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} \left(S(x,t) l_0 \varphi_i(x) + T(x,t) m_0 \varphi_i(x)\right) d\Gamma,$$

$$u_{0\nu}^{\;i} = \iint\limits_{\Omega} u_{0\nu}(x)\varphi_i(x)\,d\Omega,$$

$$q_{0\nu}^{\;i} = \iint\limits_{\Omega} q_{0\nu}(x)\varphi_i(x)\,d\Omega, \quad \nu = 1, 2, \; i = \overline{1,N},$$

а $l_0 = \cos(n, x_1)$, $m_0 = \cos(n, x_2)$, n – внешняя нормаль к контуру.

Искомый вектор решения $\alpha(N')$ задачи (24)–(26) на k-м временном слое, $k = \overline{0, K-1}$, имеет такую структуру:

$$\alpha(t_k) = (\alpha_h(t_k), \alpha_u(t_k))^T = (h_1(t_k), h_2(t_k), ..., h_N(t_k),$$
$$u_{11}(t_k), u_{21}(t_k), u_{12}(t_k), u_{22}(t_k), \dots, u_{1N}(t_k), u_{2N}(t_k))^T. \tag{33}$$

Исходя из изложенной в (27)–(33) блочной структуры матриц и векторов, схему Кранка – Николсона (24)–(26) для всей задачи (20)–(22) можем разложить на две следующих схемы Кранка – Николсона, которые на каждом временном шаге и на каждой итерации применяются последовательно:

$$\alpha_h^0 = H^0,$$

$$\left(\overline{M}_h + \frac{\tau}{2}\left(A_h\left(\frac{W^{k+1} + W^k}{2}\right) + R_h\left(\frac{W^{k+1} + W^k}{2}\right)\right)\right)\alpha_h^{k+1} =$$

$$=\left(\overline{M}_h-\frac{\tau}{2}\left(A_h\left(\frac{W^{k+1}+W^k}{2}\right)+R_h\left(\frac{W^{k+1}+W^k}{2}\right)\right)\right)\alpha_h^k+\frac{\tau}{2}\left(f^{k+1}+f^k\right), \quad k=\overline{1,K-1};$$

$$\alpha_u^0=U^0,\ \gamma_u^0=Q^0,$$

$$\left(M_u+\frac{\tau^2}{4}\left(A_u\left(\frac{W^{k+1}+W^k}{2}\right)+R_u\left(\frac{W^{k+1}+W^k}{2}\right)\right)\right)\gamma_u^{k+1}=$$

$$=\left(M_u-\frac{\tau^2}{4}\left(A_u\left(\frac{W^{k+1}+W^k}{2}\right)+R_u\left(\frac{W^{k+1}+W^k}{2}\right)\right)\right)\gamma_u^k-$$

$$-\tau\left(A_u\left(\frac{W^{k+1}+W^k}{2}\right)+R_u\left(\frac{W^{k+1}+W^k}{2}\right)\right)\alpha_u^k+\tau F_h\left(\frac{\alpha_h^{k+1}+\alpha_h^k}{2}\right)+\frac{\tau}{2}\left(F^{k+1}+F^k\right),$$

$$\alpha_u^{k+1}=\alpha_u^k+\frac{\tau}{2}\left(\gamma_u^{k+1}+\gamma_u^k\right),\ k=\overline{1,K-1}.$$

Модельный пример. В области $\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2=\{(x_1,x_2)\in\in[1.0;2.0]\times[1.0;2.0]\}$ система уравнений записывается соотношениями (1) с коэффициентами фильтрации $k_1(x,u)$, $k_2(x,u)$, зависимыми от объемных деформаций $\Theta=\partial u_1/\partial x_1+\partial u_2/\partial x_2$, а именно:

$$k_1(x,u)=k_2(x,u)=\frac{e^{5/(2a)b\left(\partial u_1/\partial x_1+\partial u_2/\partial x_2\right)-5/4bx_2(t-1)+b/t(x_2-1{,}5)+d}}{x_1+t};$$

$\lambda(x)=\mu(x)=a^{-1},\ \rho=a;$

правая часть системы (1) имеет вид

$$f(x,t)=a(x_2-1{,}5)-ae^{b(x_1+t)(x_2-1{,}5)+d}\left((x_2-1{,}5)\frac{b(x_2-1{,}5)(x_1+t)-1}{(x_1+t)^2}+b(x_1+t)\right),$$

$$F_1(x,t)=0,\ F_2(x,t)=1,\ (x,t)\in\Omega\times(t_0,t_k];$$

$$a=\begin{cases}a^+=\ln 2/e^2, & (x_1,x_2)\in\overline{\Omega_2},\\ a^-=\ln 2/e, & (x_1,x_2)\in\overline{\Omega_1},\end{cases}\qquad b=\begin{cases}b^+=1/2, & (x_1,x_2)\in\overline{\Omega_2},\\ b^-=1, & (x_1,x_2)\in\overline{\Omega_1},\end{cases}$$

$$c=\begin{cases}c^+=3\ln\ 2, & (x_1,x_2)\in\overline{\Omega_2},\\ c^-=2\ln\ 2, & (x_1,x_2)\in\overline{\Omega_1},\end{cases}\qquad d=\begin{cases}d^+=2, & (x_1,x_2)\in\overline{\Omega_2},\\ d^-=1, & (x_1,x_2)\in\overline{\Omega_1};\end{cases}$$

краевые условия

$h=a(x_1+t)(x_2-1{,}5)+c,\ (x_1,x_2,t)\in\partial\Omega\times(0,T],$

$u_1=a(0{,}1x_1^2(x_2-1{,}5)+0{,}5x_1x_2(t-1)),$

$$u_2 = 0{,}1ax_1(x_2 - 1{,}5)^2,\ (x_1, x_2, t) \in \{\partial\Omega \setminus \Gamma_1\} \times (0, T],$$
$$\sigma_n = 0{,}8x_1(x_2 - 1{,}5) + 0{,}5x_2(t - 1),$$
$$\tau_s = 0{,}1x_1^2 + 0{,}1(x_2 - 1{,}5)^2 + 0{,}5x_1(t - 1),\ (x_1, x_2, t) \in \Gamma_1 \times (0, T],$$
$$\Gamma_1 = [(1.0; 2.0), (2.0; 2.0)];$$

начальные условия

$$h(x_1, x_2, t_0) = a(x_1 + t_0)(x_2 - 1{,}5) + c, \quad (x_1, x_2) \in \overline{\Omega},$$
$$u_1(x_1, x_2, t_0) = a(0{,}1x_1^2(x_2 - 1{,}5) + 0{,}5x_1x_2t_0 - 0{,}5x_1x_2),$$
$$u_2(x_1, x_2, t_0) = 0{,}1ax_1(x_2 - 1{,}5)^2, \quad (x_1, x_2) \in \overline{\Omega},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x_1, x_2, t_0) = 0{,}5ax_1x_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x_1, x_2, t_0) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}, \quad t = t_0;$$

условия сопряжения (7)–(11) на участке $\gamma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = [(1.0; 1.5); (2.0; 1.5)]$ имеют параметры $r = 1$, $\quad R = \dfrac{2e^2}{3\ln 2(1-e)}\left(\dfrac{0{,}2x_1}{t-1} + 1\right).$

Классическое решение задачи имеет вид

$$h(x_1, x_2, t) = a(x_1 + t)(x_2 - 1{,}5) + c,$$
$$u_1(x_1, x_2, t) = a(0{,}1x_1^2x_2 + 0{,}5x_1x_2t - 0{,}5x_1x_2),$$
$$u_2(x_1, x_2, t) = 0{,}1ax_1(x_2 - 1{,}5)^2, \quad (x_1, x_2, t) \in \Omega_T.$$

Задача решена с шагом по времени $\tau = 0{,}01$ на трех временных слоях. Количество узлов в разбиении МКЭ N=132, полуширина ленты ненулевых элементов матриц равняется 12.

Итерационный процесс на каждом временном слое заканчивался при выполнении условия:

$$\max_{i=1,N}\left|H_{k+1}^m - H_k^m\right| < \varepsilon,\ \max_{i=1,N}\left|U_{i,k+1}^m - U_{i,k}^m\right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 10^{-6}$, i – номер компонента вектора решения; k – номер итерации на m-м временном слое. Для достижения заданной точности на каждом временном слое оказались необходимыми 6 итераций, максимальная относительная погрешность не превысила 5,75 %.

Заключение. В результате представления системы, объединяющей дифференциальные уравнения различных типов, в виде одного операторного уравнения, сформулирована соответствующая обобщенная задача, построен вычислительный алгоритм ее решения на основании метода конечных элементов.

В.В. Скопецький, О.О. Марченко, Т.А. Самойленко

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ МОДЕЛІ ФІЛЬТРУЮЧИХ ГРУНТІВ

Розглянута початково-крайова задача для нелінійної системи одного параболічного рівняння вологопереносу-фільтрації та двох гіперболічних рівнянь теорії пружності. Побудовано алгоритм чисельного розв'язання відповідної узагальненої задачі, яка сформульована за методом Гальоркіна. Наведено результати обчислювального експерименту.

V.V. Skopetsky, O.O. Marchenko, T.A. Samoilenko

APPROXIMATE SOLUTION FOR NONLINEAL DIFFERENTIAL MODEL OF FILTER SOILS

The initial-boundary value problem for nonlinear system of one parabolic moisture-transfer–filtration equation and two hyperbolic elasticity equations are considered. The numerical solution algorithm for respective generalized problem based on Galerkin method is obtained. Numerical experiment results are presented.

1. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.
2. *Скопецкий В.В., Марченко О.А., Лежнина Н.А.* Системный анализ объектов, находящихся под влиянием взаимодействующих процессов // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 6. – С. 54–66.
3. *Скопецкий В.В., Марченко О.А.* Постановка и исследование задач для динамических систем неоднородных двухфазных сред // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 6. – С. 87–102.
4. *Скопецкий В.В., Марченко О.А., Самойленко Т.А.* Приближенное решение нелинейной системы уравнений для двухфазных сред // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 4. – С. 524–536.
5. *Марченко О.А., Благовещенская Т.Ю., Вусата Л.А.* Информационная технология расчета напряженно-деформированного состояния неоднородных водонасыщенных грунтовых массивов, находящихся под нагрузкой // Компьютерная математика. – 2007. – № 2. – С. 39–50.

Получено 28.11.2008

Об авторах:

Скопецкий Василий Васильевич,
доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Украины,
заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Марченко Ольга Алексеевна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Самойленко Татьяна Анатольевна,
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.