Компьютерная
Математика

УДК 517.95

В.В. СТОЯН

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ОБРАЩЕНИИ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ПРОЦЕССА С НЕПРЕРЫВНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Исследуется нелинейный пространственно-временной процесс, функция состояния которого через произведение своих линейных дифференциальных преобразований определяется дискретно и непрерывно заданным пространственно-временным возмущением. Строится функция, которая среднеквадратически приближается к решению системы.

Введение. Обобщение методов линейной алгебры [1] и псевдоинверсного обращения [2] систем линейных алгебраических уравнений, выполненное в работах Н.Ф. Кириченко [3, 4], позволило [5] построить среднеквадратическое приближение к решениям линейных интегральных и функциональных уравнений. Последнее вместе с предложенным в [6] подходом к моделированию начально-краевых условий было положено в развитую со временем [7, 8] методологию решения прямых и обратных задач динамики линейных систем с распределенными параметрами. Для распространения математических результатов, изложенных в [7, 8] и последующих журнальных публикациях, на нелинейные динамические системы в [9] была предложена методика среднеквадратического обращения нелинейных алгебраических систем, левая часть которых является произведением нескольких линейных алгебраических преобразований. Использование этой методики к исследованию дискретно-возмущаемых распределенных пространственно-временных процессов позволило смоделировать [10] среднеквадратическое приближение к его дискретно и непрерывно определенной функции состояния. Далее в развитие [10] методика [9], дополненная идеями работы [5], используется для построения функции состояния распределенной пространственно-временной системы, находящейся под влиянием непрерывно заданных внешнединамических возмущений и описываемой нелинейным дифференциальным уравнением, образованным произведением линейных дифференциальных преобразований, которое в дискретно определенных точках среднеквадратически выполняется для данной функции. Исследованы условия точности и однозначности полученных решений.

Постановка задачи. Рассмотрим динамику системы, функция $y(s)$ состояния которой в неограниченной пространственно-временной области $S=\{s=(x,t):\ x\in R^n, t\in R^1\}$ определяется уравнением

$$L_1(\partial_s)y(s)L_2(\partial_s)y(s)=u(s), \tag{1}$$

где $u(s)$ – функция внешнединамических возмущений, которые действуют на систему, $\partial_s=(\partial_x,\partial_t)$, $\partial_x=(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\dots,\partial_{x_n})$ – вектор производных по пространственным координатам $x_1,x_2,\dots,x_n$, ∂_t – производная по времени t, а $L_1(\cdot)$ и $L_2(\cdot)$ – полиномиальные функции своих аргументов.

Считая $u(s)$ известной функцией, построим функцию $y(s)$ $(s\in S)$ состояния рассматриваемой системы, вектор $\vec{y}=(y(s_1),y(s_2),\dots,y(s_L))^T$ значений которой удовлетворяет условию

$$\int_S[(L_1(\partial_s)y(s))(L_2(\partial_s)y(s))-u(s)]^2ds\to\min_{\vec{y}}. \tag{2}$$

Полагая

$$L_k(\partial_s)y(s)=u_k(s)\quad (k=\overline{1,2}), \tag{3}$$

или, что эквивалентно,

$$y(s)=\int_S G_k(s-s')u_k(s')ds'\quad (k=\overline{1,2}), \tag{4}$$

где $G_k(s-s')$ – функция Грина [9] уравнения (3) в области S, систему (1) запишем в виде

$$u_1(s)u_2(s)=u(s). \tag{5}$$

Считая функции $G_k(s-s')$ в (4) известными [7, 8], рассмотрим проблемы построения решения (или среднеквадратичного приближения к нему) уравнения (5) такого, чтобы

$$\int_S(u_1(s)u_2(s)-u(s))^2ds\to\min_{u_1(s),u_2(s)} \tag{6}$$

при $y(s)$, определенном вектором $\vec{y}$.

Дискретное исследование квадратично нелинейной модели. Рассмотрим вариант решения вышесформулированной задачи для случая, когда функция $u(s)$ задана вектором ее значений $u(s'_m)$ $(m=\overline{1,M})$, определенных в точках s'_m, для которых $s'_{m+1} - s'_m = \Delta s'_m$. В этом случае уравнения (4), (5) и условие (6) приведем к виду

$$\vec{y} = A_1\vec{u}_1 = A_2\vec{u}_2, \tag{7}$$

$$\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 = \vec{u}, \tag{8}$$

$$\left\|\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 - \vec{u}\right\|^2 \to \min_{\vec{u}_1, \vec{u}_2}, \tag{9}$$

где $\otimes$ – операция декартового произведения векторов,

$$A_k = [G_k(s_l - s'_m)\sqrt{\Delta s'_m}\,]\Big|_{l,m=1}^{l=L,m=M},$$

$$\vec{u}_k = (u_{k1}, u_{k2}, \ldots, u_{kM}) \ \ (k = \overline{1,2}), \quad \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_M)^T$$

при

$$u_m = u(s'_m)\Delta s'_m, \ u_{km} = u_k(s'_m)\sqrt{\Delta s'_m} \quad (m = \overline{1,M}).$$

С использованием

$$\vec{u}_k = \arg\min_{\bar{u}_k \in \Omega_k} \left\|\bar{u}_k\right\|^2 = A_k^T P_k^+ \vec{y} \ \ (k = \overline{1,2}), \tag{10}$$

где $P_k = A_k A_k^T$,

$$\Omega_k = \{\bar{u}_k \in R^M : \ \bar{u}_k = \arg\min_{u_k} \left\|A_k u_k - \vec{y}\right\|^2 = A_k^T P_k^+ \vec{y} + v_k - A_k^T P_k^+ A_k v_k, \ \forall v_k \in R^M\},$$

$v_k \equiv 0$ при $\det A_k^T A_k > 0$, а

$$\min_{\bar{u}_k \in \Omega_k} \left\|A_k \bar{u}_k - \vec{y}\right\|^2 = \vec{y}^T \vec{y} - \vec{y}^T P_k P_k^+ \vec{y} = \varepsilon_k^2,$$

уравнение (8) запишем в виде

$$\vec{u}_1 \otimes A_2^T P_2^+ A_1 \vec{u}_1 = \vec{u}, \tag{11}$$

или

$$\vec{u}_2 \otimes A_1^T P_1^+ A_2 \vec{u}_2 = \vec{u}. \tag{12}$$

Решения уравнений (11), (12) такие, чтобы

$$\left\|\vec{u}_1 \otimes A_2^T P_2^+ A_1 \vec{u}_1 - \vec{u}\right\| \to \min_{\vec{u}_1}, \tag{13}$$

$$\left\|\vec{u}_2 \otimes A_1^T P_1^+ A_2 \vec{u}_2 - \vec{u}\right\| \to \min_{\vec{u}_2}, \tag{14}$$

найдем после среднеквадратичного обращения систем

$$\bar{A}_k \alpha_k = \vec{u} \ \ (k = \overline{1,2}), \tag{15}$$

где

$$\bar{A}_1 = col((\underbrace{0, \ldots, 0}_{M(i-1)}, str([A_2^+ A_1]_{ij}, \ j = \overline{1,M}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{M^2 - iM}), i = \overline{1,M}), \tag{16}$$

$$\bar{A}_2 = col((\underbrace{0, \ldots, 0}_{M(i-1)}, str([A_1^+ A_2]_{ij}, \ j = \overline{1,M}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{M^2 - iM}), i = \overline{1,M}), \tag{17}$$

$$\alpha_k = col(((u_{ki} u_{kj}), \ j = \overline{1,M}), i = \overline{1,M}) \quad (k = \overline{1,2}).$$

Комбинации $(u_{ki}u_{kj})$ $(i,j=\overline{1,M})$ компонент u_{ki} $(i=\overline{1,M})$ векторов $\vec{u}_k$ $(k=\overline{1,2})$ такие, чтобы

$$\vec{\alpha}_k = \arg\min_{a_k\in\Omega_k^{(\alpha)}} \|a_k\|^2,$$

$$\Omega_k^{(\alpha)} = \{a_k : a_k = \arg\min_{\alpha\in R^{M^2}} \|\overline{A}_k\alpha - \vec{u}\|^2\},$$

определим соотношениями:

$$u_{1i}u_{1j} = [A_2^T P_2^+ A_1]_{ij}\left(u_i - \sum_{p=1}^{M}[A_2^T P_2^+ A_1]_{ip}[v_1]_{(i-1)M+p}\right)\left[\sum_{m=1}^{M}([A_2^T P_2^+ A_1]_{im})^2\right]^{-1} + [v_1]_{(i-1)M+j}, \quad (18)$$

$$u_{2i}u_{2j} = [A_1^T P_1^+ A_2]_{ij}\left(u_i - \sum_{p=1}^{M}[A_1^T P_1^+ A_2]_{ip}[v_2]_{(i-1)M+p}\right)\left[\sum_{m=1}^{M}([A_1^T P_1^+ A_2]_{im})^2\right]^{-1} + [v_2]_{(i-1)M+j}, \quad (19)$$

где

$$\min_{a_k\in\Omega_k}\|\overline{A}_k a_k - \vec{u}\|^2 = \vec{u}^T\vec{u} - \vec{u}^T\,\overline{A}_k\,\overline{A}_k^+\vec{u} = \delta_k^2, \quad (20)$$

а $v_k \in R^{M^2}$ определяется из условия, чтобы

$$[\alpha_k]_{(i-1)M+j} = [\alpha_k]_{(i-1)M+i}[\alpha_k]_{(j-1)M+j},$$

или есть решением системы

$$([\overline{A}_k^T]_{(i-1)M+j}(\overline{A}_k\overline{A}_k^T)^+ a + [v_k]_{(i-1)M+j} - [\overline{A}_k^T]_{(i-1)M+j}(\overline{A}_k\overline{A}_k^T)^+\overline{A}_k v_k)^2 =$$
$$= ([\overline{A}_k^T]_{(i-1)M+i}(\overline{A}_k\overline{A}_k^T)^+ a + [v_k]_{(i-1)M+i} - [\overline{A}_k^T]_{(i-1)M+i}(\overline{A}_k\overline{A}_k^T)^+\overline{A}_k v_k)\times \quad (21)$$
$$\times([\overline{A}_k^T]_{(j-1)M+j}(\overline{A}_k\overline{A}_k^T)^+ a + [v_k]_{(j-1)M+j} - [\overline{A}_k^T]_{(j-1)M+j}(\overline{A}_k\overline{A}_k^T)^+\overline{A}_k v_k) \quad j=\overline{1,M}, i=\overline{1,M}.$$

Здесь и далее $[\cdot]_{ij}$, $[\cdot]_i$ – (i,j)-ий элемент матрицы и i-я компонента вектора соответственно.

Если учесть, что

$$[\alpha_k]_{(i-1)M+j} = [\alpha_k]_{(j-1)M+i},$$

то размерность системы (21) можно уменьшить к $(M^2-M)/2$. С учетом (21) из соотношений (18), (19) находим компоненты u_{ki} $(i=\overline{1,M})$ искомых согласно (13), (14) векторов $\vec{u}_k$ $(k=\overline{1,2})$.

Завершая рассмотрение дискретного случая задачи (4)–(6), заметим, что функция $y(s)$, вектор $\vec{y}$ значений $y(s_l)$ $(l=\overline{1,L})$ которой удовлетворяет дискретизированному точками s_l $(l=\overline{1,L})$ соотношению (2), по аналогии с (4) запишем в виде

$$y(s)=\sum_{m=1}^{M}G_k(s-s'_m)u_{km}\sqrt{\Delta s'_m},$$

где

$$k=1 \text{ при } \varepsilon_1^2+\delta_1^2<\varepsilon_2^2+\delta_2^2 \tag{22}$$

или

$$k=2 \text{ при } \varepsilon_2^2+\delta_2^2<\varepsilon_1^2+\delta_1^2. \tag{23}$$

Квадратично нелинейная модель с непрерывно определенным возмущающим фактором. Для построения функции $y(s)$, которая согласно (2) удовлетворяет (1) и соотношением (4) определяется через функционально заданное внешнединамическое возмущение $u(s)$, будем исходить из результатов решения рассматриваемой задачи, вышеполученных для случая, когда $u(s)$ определена в точках s'_m $(m=\overline{1,M})$.

Аналитический вид функций $u_k(s)$ $(k=\overline{1,2})$, через одну из которых соотношением (4) определяется искомая функция $y(s)$, получим из (18), (19), учитывая, что

$$\lim_{M\to\infty}\sqrt{\frac{u_{ki}u_{kj}}{\Delta s'_m}}\Bigg|_{i=j=m}=\lim_{M\to\infty}u_k(s'_m)=u_k(s'),$$

$$\lim_{M\to\infty}\frac{A_k}{\sqrt{\Delta s'_m}}=\lim_{M\to\infty}col(G_k(s_l-s'_m),l=\overline{1,L})=col(G_k(s_l-s),\ l=\overline{1,L})=\overline{G}_k(s),$$

$$\lim_{M\to\infty}A_kA_k^T=\int_S\overline{G}_k(s)\overline{G}_k^T(s)ds=P_k.$$

При этом

$$u_1^2(s)=\overline{G}_2^T(s)P_2^+\overline{G}_1(s)Q_1^{-1}(s)u(s), \tag{24}$$

$$u_2^2(s)=\overline{G}_1^T(s)P_1^+\overline{G}_2(s)Q_2^{-1}(s)u(s), \tag{25}$$

где

$$Q_1(s)=\int_S(\overline{G}_2^T(s)P_2^+\overline{G}_1(s'))^2ds',\quad Q_2(s)=\int_S(\overline{G}_1^T(s)P_1^+\overline{G}_2(s'))^2ds'.$$

При $M\to\infty$ из соотношений (20) получим и величины δ_k^2 – точности, с которыми найденные согласно (24), (25) функции $u_k(s)$ $(k=\overline{1,2})$ удовлетворяют уравнению (5). Они будут такими:

$$\delta_k^2=\int_S u^2(s)ds-a_k^T\overline{P}_k^+a_k, \tag{26}$$

где

$$\overline{P}_k=\int_S\overline{A}_k^T(s)\overline{A}_k(s)ds,\quad a_k=\int_S\overline{A}_k^T(s)u(s)ds.$$

Для выбора значения k в соотношении (4) кроме вышеопределенных δ_k^2 $(k=\overline{1,2})$ учтем также точности

$$\varepsilon_k^2 = \min_{u_k(s)} \sum_{l=1}^{L} (y(s_l) - \int_S G_k(s_l - s')u_k(s')ds')^2 = \lim_{M\to\infty} \min_{\vec{u}_k} \|A_k \vec{u}_k - \vec{y}\|^2 =$$

$$= \vec{y}^T \vec{y} - \vec{y}^T P_k P_k^+ \vec{y} \quad (k=\overline{1,2}), \tag{27}$$

с которыми используемые в (5) функции $u_k(s)$ в точках s_l $(l=\overline{1,L})$ будут удовлетворять уравнению (4).

Найденные согласно (26), (27) величины δ_k^2 и ε_k^2 по аналогии с (22), (23) будут определять индекс k при выборе (соотношения (24), (25)) функции $u_k(s)$ и в конечном представлении состояния $y(s)$ рассматриваемой системы.

Общее решение задачи. Рассмотрим задачу построения вектора $\vec{y}$ значений $y_l = y(s_l)$ $(l=\overline{1,L})$ функции $y(s)$ таких, чтобы

$$\int_S [(L_1(\partial_s)y(s))(L_1(\partial_s)y(s))\ldots(L_n(\partial_s)y(s)) - u(s)]^2 ds \to \min_{\vec{y}}, \tag{28}$$

где $u(s)$ и $L_i(\partial_s)$ $(i=\overline{1,n})$ – заданные функция и линейные дифференциальные операторы.

Нетрудно видеть, что задача (28) эквивалентна задаче среднеквадратичного обращения уравнения

$$u_1(s)u_2(s)\ldots u_n(s) = u(s), \tag{29}$$

в котором

$$u_k(s) = L_k(\partial_s)y(s) \quad (k=\overline{1,n}), \tag{30}$$

или (что эквивалентно)

$$y(s) = \int_S G_k(s-s')u_k(s')ds' \quad (k=\overline{1,n}). \tag{31}$$

Среднеквадратически обращая дискретизированное по нештрихованным координатам точками s_l $(l=\overline{1,L})$ уравнения (31), с точностью

$$\varepsilon_k^2 = \min_{u_k(s)} \sum_{l=1}^{L} \left(\int_S G_k(s_l - s')u_k(s')ds' - y_l \right)^2 = \vec{y}^T \vec{y} - \vec{y}^T P_k P_k^+ \vec{y} \tag{32}$$

получаем

$$u_k(s) = \bar{G}_k^T(s) P_k^+ \vec{y} \quad (k=\overline{1,n}), \tag{33}$$

где $\bar{G}_k(s)$ и P_k – вектор-функция и матрица, которые совпадают с вышеопределенными.

С учетом (33) при

$$U_i(s) = \bar{G}_i^T(s) P_i^+ (\int_S \bar{G}_k(s')u_k(s')ds') \quad (i=\overline{1,n}, i\neq k) \tag{34}$$

уравнение (29) запишем в виде

$$U_1(s)\ldots U_{k-1}(s)u_k(s)U_{k+1}(s)\ldots U_n(s) = u(s). \tag{35}$$

Из соотношения (35) находим значения $u_k(s'_m)$ $(m=\overline{1,M})$ функций $u_k(s)$ $(k=\overline{1,M})$, которые, как и выше, удовлетворяют уравнению (15) при $k=\overline{1,n}$ и

$$\bar{A}_k = col(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k-1)M^{n-1}}, A_j^{(k)}, \underbrace{0,\ldots,0}_{M^n-kM^{n-1}}, \quad j=\overline{1,M}),$$

$$A_j^{(k)} = str((\ldots(((\ldots([\bar{\bar{G}}_1^T P_1^+ \bar{\bar{G}}_k]_{ji_1} \ldots [\bar{\bar{G}}_{k-1}^T P_{k-1}^+ \bar{\bar{G}}_k]_{ji_{k-1}} [\bar{\bar{G}}_{k+1}^T P_{k+1}^+ \bar{\bar{G}}_k]_{ji_{k+1}} \ldots [\bar{\bar{G}}_n^T P_n^+ \bar{\bar{G}}_k]_{ji_n},$$

$$i_n=\overline{1,M}),\ldots), i_{k+1}=\overline{1,M}), i_{k-1}=\overline{1,M}),\ldots), i_1=\overline{1,M}),$$

$$\bar{\bar{G}}_k = str(\bar{G}_k(s'_m)\sqrt[n]{(\Delta s'_m)^{n-1}}, \ m=\overline{1,M}),$$

$$\alpha_k = col(u_{ki_1}\ldots u_{ki_n}, \ i_n=\overline{1,M},\ldots,i_1=\overline{1,M}).$$

По аналогии с (18), (19) эти значения определим соотношением

$$u_k(s'_{i_1})\ldots u_k(s'_{i_n}) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1}[\bar{\bar{G}}_j^T P_j^+ \bar{\bar{G}}_k]_{i_1 i_{j+1}} \prod_{j=k+1}^{n}[\bar{\bar{G}}_j^T P_j^+ \bar{\bar{G}}_k]_{i_1 i_j}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{p_j=1}^{M}[\bar{\bar{G}}_j^T P_j^+ \bar{\bar{G}}_k]_{i_1 p_j}^2}\Big(u(s'_{i_1}) -$$

$$\left. - v_{i_1}\prod_{j=1}^{k-1}\sum_{p_j=1}^{M}[\bar{\bar{G}}_j^T P_j^+ \bar{\bar{G}}_k]_{i_1 p_{j+1}} v_{p_j} \prod_{j=k+1}^{n}\sum_{p_j=1}^{M}[\bar{\bar{G}}_j^T P_j^+ \bar{\bar{G}}_k]_{i_1 p_j} v_{p_j}\right) + \prod_{j=1}^{n} v_{i_j}.$$

Откуда при $M\to\infty$ находим

$$u_k(s_1)\ldots u_k(s_n) = U(s_1,\ldots,s_n),$$

где

$$U(s_1,\ldots,s_n) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1}\bar{G}_j^T(s_{j+1})P_j^+\bar{G}_k(s_1)\prod_{j=k+1}^{n}\bar{G}_j^T(s_j)P_j^+\bar{G}_k(s_1)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\int_S(\bar{G}_j^T(\xi)P_j^+\bar{G}_k(\xi))^2 d\xi}\Big(u(s_1) -$$

$$\left. - v(s_1)\prod_{j=1}^{k-1}\bar{G}_j^T(s_{j+1})P_j^+\prod_{j=k+1}^{n}\bar{G}_j^T(s_j)P_j^+\left(\int_S \bar{G}_k^T(\xi)v(\xi)d\xi\right)^{n-1}\right) + \prod_{j=1}^{n} v(s_j)$$

для $k=\overline{1,n}$, $s_1\in S,\ldots,s_n\in S$. При этом $v(s_j)$ $(j=\overline{1,n})$ – произвольные функции, выбор которых ограничивается условиями

$$U^n(s_1,\ldots,s_n) = \prod_{j=1}^{n} U(s_j,\ldots,s_j),$$

$$U(s_1,\ldots,s_n) = U(s_n,\ldots,s_1).$$

С учетом

$$\lim_{M\to\infty}\min_{a_k\in\Omega_k}\left\|\overline{A}_k a_k - \vec{u}\right\|^2 = \delta_k^2 = 0 \quad \forall k=\overline{1,n}\ ,$$

при

$$k = \arg\min_{i=\overline{1,n}} \varepsilon_i^2$$

соотношением (31) определим искомую согласно (28) функцию $y(s)$ состояния рассматриваемой системы.

Заключение. Рассмотрен нелинейный динамический процесс, который описывается дифференциальной моделью, образованной произведением линейных пространственно-временных преобразований функции состояния процесса. Имея прямой выход на практику, она может быть элементом и более сложной модели

$$\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{i} L_j^{(i)}(\partial_s)\,y(s) = u(s).$$

Предложенная в работе методика исследования рассматриваемой модели позволяет построить дискретно и непрерывно определенную функцию состояния процесса, которая по среднеквадратичному критерию согласовывается с реальной. Расчетные формулы методики простые и доступные для практического использования, поскольку основываются на классических результатах линейной алгебры, а также их обобщениях на системы интегральных и функциональных уравнений.

Используя вышеполученные выражения для функции состояния $y(s)$, как частное решение дифференциального уравнения процесса и основываясь на методике [7, 8] моделирования начально-краевых эффектов для линейных динамических систем можно построить и среднеквадратическое приближение к решению начально-краевой задачи для систем вида (2), (28). Заметим, что вопросы эти будут рассмотрены в последующих публикациях автора.

В.В. Стоян

ПРО СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНЕ ОБЕРНЕННЯ ОДНІЄЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОГО ПРОЦЕСУ З НЕПЕРЕРВНО ВИЗНАЧЕНИМИ ЗОВНІШНЬО-ДИНАМІЧНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Досліджується нелінійний просторово-часовий процес, функція стану якого через добуток своїх лінійних диференціальних перетворень визначається дискретно та неперервно заданим просторово-часовим збуренням. Будується функція, яка середньоквадратично наближається до розв’язку системи.

V.V. Stoyan

ON ROOT-MEAN-SQUARE INVERSION OF A DIFFERENTIAL MODEL OF NONLINEAR SPATIO-TEMPORAL PROCESS WITH CONTINUOUSLY DETERMINED OUTER-DYNAMIC DISTURBANCES

A nonlinear spatio-temporal process with a state function defined by discretely and continuously spatio-temporal disturbance via the product of its linear differential transformations is investigated. A function approximating the solution of a system in root-mean-square sense is built.

1. *Гантмахер А.Ф.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 287 с.
2. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 305 с.
3. *Кириченко Н.Ф.* Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 1. – С. 114–127.
4. *Кириченко Н.Ф.* Рекуррентность операций псевдообращения в задачах идентификации и синтеза матриц // Кибернетика и вычислительная техника. – 1994. – № 104. – С. 17–21.
5. *Стоян В.А., Кириченко Н.Ф.* Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 3. – С. 90–104.
6. *Стоян В.А.* Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 1. – С. 79–86.
7. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – К.: Наук. думка, 2001. – 361 с.
8. *Стоян В.А.* Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами. – К.: ВПЦ "Київський університет". – 2004. – 184 с.
9. *Стоян В.В.* Псевдоінверсний підхід до розв’язання одного класу нелінійних алгебраїчних рівнянь // Доп. НАН України. – 2008. – № 3. – С. 45–49.
10. *Стоян В.В.* Про середньоквадратичне обернення однієї диференціальної моделі нелінійного просторово-часового процесу з дискретно визначеними збурюючими факторами // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 55–61.
11. *Стоян В.А.* До побудови функцій Гріна для систем з розподіленими параметрами // Вычислительная и прикладная математика. – 1998. – Вып. 83. – С. 108–111.

Получено 11.12.2008

Об авторе:

Стоян Виталий Владимирович,
студент 5-го курса факультета кибернетики
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.
e-mail: v_stoyan@i.ua