УДК 621.317.4

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРОДОЛЬНО НАМАГНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА

А.В.Гетьман, канд.техн.наук, **А.В.Константинов,**
Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины,
ул. Индустриальная, 19, Харьков, 61106, Украина.

Рассмотрено применение гармонического анализа для аналитического описания остаточной и индуктивной намагниченности, а также магнитного поля продольно намагниченного цилиндра. Исследуются особенности представления заданной аналитической функцией внешнего и внутреннего магнитного полей на основе использования цилиндрических гармоник для случая однородно намагниченного цилиндра, а также с неоднородным распределением намагниченности. Рассматривается внешнее магнитное поле индуктивно намагниченного цилиндра, которое может быть представлено аналогично случаю с остаточной намагниченностью. Библ. 6.
Ключевые слова: магнитное поле, остаточная намагниченность, индуктивная намагниченность, цилиндрические гармоники.

Введение. Решение задач по магнитной совместимости все более актуально при создании современных космических аппаратов (КА) с характерным плотным монтажом бортовой аппаратуры. При этом большинству основных источников помехонесущего магнитного поля КА характерна цилиндрическая форма его магнитоактивной части. В частности, имеют форму цилиндров используемые в аппаратуре СВЧ связи постоянные магниты, а также электромагниты системы управления ориентацией, которые изготавливаются в виде многослойных соленоидов с магнитомягким сердечником внутри [3].

Несмотря на многообразие численных методов расчета магнитных характеристик технических объектов (ТО) представляет практический интерес построение аналитических моделей, что обусловлено необходимостью анализа ТО по целому набору его параметров [5]. Сложность взаимосвязей между параметрами ТО и его магнитным полем существенно затрудняет, а порой делает невозможным проведение комплексного анализа конструктивных, энергетических и магнитных параметров ТО только на основе результатов численного расчета. Такое ограничение не свойственно аналитическим моделям ТО, однако практическое применение последних связано с усложнением математического аппарата и необходимостью использования ряда упрощений, что негативно сказывается на точности результатов. Так, например, применение уравнения Пуассона-Томсона для описания намагниченности приводит к использованию линейного приближения представления магнитной восприимчивости материала, что ограничивает использование модели для случая магнитного насыщения элементов ТО.

Кроме того, на сегодняшний день сдерживающим фактором для построения и практического применения аналитических моделей магнитного поля ТО остаются трудности адаптации сложного математического аппарата к реальной геометрии электротехнических изделий. Поэтому часто приходится заменять реальную геометрию объекта на ее упрощенное аналитическое представление, что также негативно сказывается на точности результатов. Так, для применения методов пространственного гармонического анализа (ПГА) магнитного поля ограничения накладываются на форму граничной поверхности ТО, которая должна описываться аналитической функцией. В случае таких электротехнических изделий, когда поверхностью магнитоактивной части ТО является поверхность цилиндра, могут быть использованы методы ПГА в цилиндрической системе координат для построения модели в виде комбинации простейших моделей кругового контура с током и соленоида. В частности, построение модели магнитного поля электромагнитов системы ориентации спутника и расчет их магнитных моментов может быть проведен на основе цилиндрического гармонического анализа намагниченности сердечника и намагничивающей обмотки.

С целью построения и практического применения аналитических моделей магнитного поля ТО цилиндрической формы в работе анализируются известные и предлагаются новые простейшие модели намагниченности на основе цилиндрических гармоник.

Принятые допущения. В работе рассматриваются модели остаточной и индуктивной намагниченности продольно намагниченных цилиндрических ферромагнитных стержней, построенные на основе цилиндрических гармоник нулевого порядка с аксиальной симметрией.

Для цилиндра с однородной остаточной намагниченностью вдоль оси модель основана на использовании суммарного поля магнитных диполей, равномерно распределенных по всему объему цилиндра и ориентированных в продольном направлении.

Для построения модели цилиндрического источника магнитного поля, остаточная намагниченность которого задана аналитической функцией координат, использовано представление для конкретного пространственного распределения магнитных диполей внутри объема цилиндра. В основу модели индуктивно намагниченного цилиндра положено уравнение Пуассона-Томсона с постоянной магнитной восприимчивостью, характерной для линейного участка кривой намагничивания большинства ферромагнетиков. В рассматриваемых случаях для перехода от функциональной зависимости намагниченности цилиндра к цилиндрическим гармоникам магнитного поля использовано представление обратного расстояния в цилиндрической системе координат в виде интеграла, содержащего цилиндрические функции.

Модель равномерно распределенных диполей.

Будем рассматривать поле, создаваемое равномерно намагниченным вдоль аксиальной оси цилиндром с высотой h и радиусом R . Для модели однородной остаточной намагниченности магнитный момент $d\vec{m}$ элемента объема dV с вектором намагниченности $\vec{M}$ запишем в виде

$$d\vec{m} = \vec{M}dV, \qquad \vec{M} = \text{const}. \tag{1}$$

При этом скалярный магнитный потенциал цилиндра и является суперпозицией потенциалов диполей U_∂

$$U = \int_V dU_\partial. \tag{2}$$

Распределение диполей полагается непрерывным по всему объему V цилиндра.

Известно [6], что потенциал элементарного объема dV представляется через магнитный момент (ММ), его координаты $\vec{\rho}'$ и координаты точки наблюдения $\vec{\rho}$ следующим образом:

$$\partial U_\partial = d\vec{m}(4\pi)^{-1}\,\text{grad}\left(\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}'\right|\right)^{-1}. \tag{3}$$

Выражение $\left(\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}'\right|\right)^{-1}$ можно представить виде [2]

$$\frac{1}{\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}'\right|} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2-\delta_n^0\right)\cos n\left(\varphi-\varphi'\right)\times\left(\int\limits_0^\infty K_n\left(\lambda r\right)I_n\left(\lambda r'\right)\cos\lambda\left(z-z'\right)d\lambda\right), & r' \le r, \\ \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2-\delta_n^0\right)\cos n\left(\varphi-\varphi'\right)\times\left(\int\limits_0^\infty K_n\left(\lambda r'\right)I_n\left(\lambda r\right)\cos\lambda\left(z-z'\right)d\lambda\right), & r' > r, \end{cases} \tag{4}$$

где $r,\ \varphi,\ z$ – координаты точки в цилиндрической системе координат, $K_n(\lambda r)$, $I_n(\lambda r)$ – модифицированные функции Бесселя, δ_n^0 – символ Кронекера.

Учитывая, что каждый элементарный объем имеет единственную составляющую ММ по z, получим следующее выражение для потенциала:

$$\partial U_\partial = \begin{cases} \dfrac{dm_z}{2\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2-\delta_n^0\right)\cos n\left(\varphi-\varphi'\right)\left(\int\limits_0^\infty \lambda K_n\left(\lambda r\right)I_n\left(\lambda r'\right)\sin\lambda\left(z-z'\right)d\lambda\right), & r' \le r, \\ \dfrac{dm_z}{2\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2-\delta_n^0\right)\cos n\left(\varphi-\varphi'\right)\left(\int\limits_0^\infty \lambda K_n\left(\lambda r'\right)I_n\left(\lambda r\right)\sin\lambda\left(z-z'\right)d\lambda\right), & r' > r. \end{cases} \tag{5}$$

Интегрируя выражение (5) по объему цилиндра, получим представление магнитного потенциала однородно намагниченного цилиндра

$$U = \begin{cases} \dfrac{M}{2\pi^2}\int\limits_0^R\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2-\delta_n^0\right)\cos n\left(\varphi-\varphi'\right)\left(\int\limits_0^\infty \lambda K_n\left(\lambda r\right)I_n\left(\lambda r'\right)\sin\lambda\left(z-z'\right)d\lambda\right)r'd\varphi'dz'dr', & r' \le r, \\ \dfrac{M}{2\pi^2}\int\limits_0^R\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2-\delta_n^0\right)\cos n\left(\varphi-\varphi'\right)\left(\int\limits_0^\infty \lambda K_n\left(\lambda r'\right)I_n\left(\lambda r\right)\sin\lambda\left(z-z'\right)d\lambda\right)r'd\varphi'dz'dr', & r' > r. \end{cases} \tag{6}$$

В результате приходим к окончательному выражению для потенциала

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{2M}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\dfrac{1}{\lambda^2} - \dfrac{R}{\lambda} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r)\right) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \sin\lambda z d\lambda, \quad r \le R, \\ U_2 = \dfrac{2MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{1}{\lambda} I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \sin\lambda z d\lambda, \qquad r > R. \end{cases} \tag{7}$$

Компоненты напряженности магнитного поля связаны со скалярным потенциалом следующим образом:

$$\vec{H} = -gradU. \tag{8}$$

Отсюда найдем представления для напряженности магнитного поля, создаваемого однородно намагниченным цилиндром.

Поле внутри цилиндра ($|z| \le h/2,\ r \le R$):

$$\begin{cases} H_{1r} = \dfrac{2MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \sin\lambda z d\lambda, \\ H_{1z} = -M + \dfrac{2MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \cos\lambda z d\lambda. \end{cases} \tag{9}$$

Поле вне цилиндра ($|z| \ge h/2,\ r \le R$):

$$\begin{cases} H_{1r} = \dfrac{2MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \sin\lambda z d\lambda, \\ H_{1z} = \dfrac{2MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \cos\lambda z d\lambda. \end{cases} \tag{10}$$

При $r > R$

$$\begin{cases} H_{2r} = \dfrac{2MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(\lambda R) K_1(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \sin\lambda z d\lambda, \\ H_{2z} = -\dfrac{2MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \cos\lambda z d\lambda. \end{cases} \tag{11}$$

Легко видеть, что (10), (11) эквивалентны выражениям для внешнего магнитного поля однослойного бесконечно тонкого соленоида, рассматриваемого в [1]. Отличие решения для внутренней области заключается в дополнительном слагаемом, определяемым намагниченностью M цилиндра.

В свою очередь, выражения для вектора магнитной индукции однородно намагниченного цилиндра и бесконечно тонкого соленоида полностью совпадают:

$$r < R \ - \quad \begin{cases} B_{1r} = \dfrac{2\mu_0 MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \sin\lambda z d\lambda, \\ B_{1z} = \dfrac{2\mu_0 MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \cos\lambda z d\lambda. \end{cases} \tag{12}$$

$$r > R \ - \quad \begin{cases} B_{2r} = \dfrac{2\mu_0 MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(\lambda R) K_1(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \sin\lambda z d\lambda, \\ B_{2z} = -\dfrac{2\mu_0 MR}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \sin\lambda \dfrac{h}{2} \cos\lambda z d\lambda. \end{cases} \tag{13}$$

Если для представления обратного расстояния использовать соотношение [2]

$$\frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \delta_n^0\right) \cos n(\varphi - \varphi') \times \left(\int_0^\infty J_n(\lambda r) J_n(\lambda r') e^{-\lambda|z - z'|} d\lambda \right), \tag{14}$$

где $J_n(\lambda r)$ − функция Бесселя первого рода, то выражение (7) для потенциала однородно намагниченного цилиндра можно представить в виде

$$U = \frac{MR}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda R) J_0(\lambda r)\left(e^{-\lambda\left|\frac{h}{2}-z\right|} - e^{-\lambda\left|\frac{h}{2}+z\right|} \right) d\lambda. \tag{15}$$

Магнитное поле цилиндра, намагниченность которого задана аналитической функцией. Используя выражения (2), (3) для расчета потенциала цилиндра, намагниченность которого задана произвольной достаточно гладкой аналитической функцией, (15) представим в виде

$$U = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \vec{M}(\rho')\mathrm{grad}\left(\frac{1}{|\rho-\rho'|}\right) dV'. \tag{16}$$

Представления (4), (14) для обратного расстояния позволяют выбрать вид решения конкретной задачи. В качестве примера получим выражения для потенциала цилиндра радиуса R, высоты h, намагниченность которого является линейной функцией от z

$$M = 2M_0 h^{-1}\cdot z', \tag{17}$$

где M_0 – значение намагниченности на верхнем торце. Тогда из выражений (3) и (4) получим

$$U = \frac{2J_0}{\pi h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^R \lambda I_0(\lambda r) K_0(\lambda r')\sin\lambda(z-z')\cdot z'\cdot r'dr'dz' . \tag{18}$$

В результате интегрирования

$$\begin{aligned} U_1(r,z) &= \frac{4M_0}{\pi h}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{R}{\lambda}K_1(\lambda R) I_0(\lambda r)\right)\left(\frac{h}{2}\cos\lambda\frac{h}{2} - \frac{1}{\lambda}\sin\lambda\frac{h}{2}\right)\cos\lambda z d\lambda, \quad r \le R,\\ U_2(r,z) &= \frac{4M_0 R}{\pi h}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda R) K_0(\lambda r)\left(\frac{h}{2}\cos\lambda\frac{h}{2} - \frac{1}{\lambda}\sin\lambda\frac{h}{2}\right)\cos\lambda z d\lambda, \quad r > R. \end{aligned} \tag{19}$$

Окончательно, на основании (8) легко перейти к напряженности магнитного поля.

Магнитное поле индуктивно намагниченного цилиндра. Пусть цилиндр высотой h и радиусом R помещен в однородное внешнее поле напряженностью H_0, направленное вдоль оси цилиндра. Рассмотрим случай, когда магнитная восприимчивость материала цилиндра κ постоянна. Введем цилиндрическую систему координат с центром, расположенным на оси цилиндра и на одинаковом расстоянии от его оснований.

Согласно уравнению Пуассона-Томсона, связывающему намагниченность с внешним полем и геометрией объекта, имеем

$$\vec{M}(r',z') = \kappa\left(\vec{H}_0(r',z') - \frac{1}{4\pi} grad\int_S \vec{M}_n(s)\cdot\frac{1}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}d\vec{S}\right), \tag{20}$$

причем интегрирование ведется по всей поверхности S цилиндра.

Используя потенциал намагниченности U_M, выражение (20) может быть записано в виде

$$U_M = \kappa(U_0 + U_p), \tag{21}$$

$$U_p = \frac{1}{4\pi}\int_S \vec{M}_n(s)\cdot\frac{1}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}d\vec{S}, \qquad U_0 = H_0\cdot z . \tag{22}$$

Причем на основании (14)

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{4\pi}\int_S \vec{M}_n(s)\cdot\frac{1}{\rho}d\vec{S} = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(R\int_{-h/2}^{h/2} M_r\cdot J_0(\lambda R) J_0(\lambda r) e^{-\lambda|z-z'|}dz' + 2\int_0^R M_z\cdot J_0(\lambda r) J_0(\lambda r') e^{-\lambda\frac{h}{2}}\sinh(\lambda z) r'dr'\right) d\lambda . \end{aligned} \tag{23}$$

Для нахождения явного выражения для потенциала U_M представим его в виде

$$U_M = \int_0^\infty A(\eta) I_0(\eta r)\sin(\eta z)d\eta + Cz, \tag{24}$$

где $A(\eta)$ подлежит определению.

Учитывая, что намагниченность связана с потенциалом U_M соотношением

$$\vec{M} = \frac{\partial U_M}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial U_M}{\partial z}\vec{e}_z, \tag{25}$$

запишем компоненты намагниченности в виде

$$\begin{cases} M_r = \int_0^\infty \eta A(\eta) I_1(\eta r)\sin(\eta z)d\eta \\ M_z = \int_0^\infty \eta A(\eta) I_0(\eta r)\cos(\eta z)d\eta + C. \end{cases} \tag{26}$$

Используя представления для компонент намагниченности из (23) и вычисляя внутренние интегралы в (26) по координатам, найдем выражение для $A(\eta)$

$$A(\eta) = \frac{\dfrac{2k^2 H_0 R}{\pi\eta(k+1)} K_1(\eta R)\sin\left(\eta \dfrac{h}{2}\right)}{1 + kR\eta W}, \tag{27}$$

где $$W = I_0(\eta R)\cos\eta\frac{h}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda J_1(\lambda R)e^{-\lambda\frac{h}{2}}}{\eta^2+\lambda^2}\frac{J_0(\lambda r)\sinh(\lambda z)}{I_0(\eta r)\sin\eta z}d\lambda +$$

$$+K_0(\eta R)I_1(\eta R) - I_1(\eta R)\sin\eta\frac{h}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda R)e^{-\lambda\frac{h}{2}}}{\eta^2+\lambda^2}\frac{J_0(\lambda r)\sinh(\lambda z)}{I_0(\eta r)\sin\eta z}d\lambda$$

и $$C = (k+1)\ k^{-1}H_0\ . \tag{28}$$

Выражение (27) в отличие от $A(\eta)$ в (21) содержит в знаменателе зависимость от координат. Для центральной точки выражение (27) выглядит следующим образом:

$$A_{0,0}(\eta) = \frac{2k^2 H_0 R}{\pi\eta(k+1)} K_1(\eta R)\sin\left(\eta\frac{h}{2}\right)\left(1 + kRW_{0,0}\right)^{-1},$$

где $$W_{0,0} = \eta K_0(\eta R)I_1(\eta R) + I_0(\eta R)\cos\eta\frac{h}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_1(\lambda R)}{\eta^2+\lambda^2}e^{-\lambda\frac{h}{2}}d\lambda - I_1(\eta R)\sin\eta\frac{h}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_0(\lambda R)}{\eta^2+\lambda^2}e^{-\lambda\frac{h}{2}}d\lambda. \tag{29}$$

Путем преобразований можно перейти к частным случаям диска (R>>h) и длинного стержня (R<<h)

$$R >> h, \qquad A_{0,0} = \frac{k^2 H_0 R h}{\pi(k+1)^2}K_1(\eta R), \tag{30}$$

$$R << h, \qquad A_{0,0} = \frac{2k^2 H_0 \sin(\eta h/2)}{\pi\eta^2(k+1)\left[1 + 2kR^2h^{-2}\cos(\eta h/2)\right]}. \tag{31}$$

Расчет магнитного поля цилиндра конечной длины может быть приближенно выполнен с использованием (30). При этом погрешность вычисления менее 3%, даже для случая h/R=1/2.

Применение выражения (31) для вычисления поля, создаваемого длинным цилиндром, ограничено равенством нулю знаменателя, что эквивалентно соотношению $h/R < \sqrt{2k}$.

Для вычисления вектора магнитной индукции внутри цилиндра необходимо учитывать соотношение $\vec{B} = \mu_0(k+1)k^{-1}\vec{M}$.

Выводы. Полученные соотношения, связывающие остаточную индукцию (намагниченность), магнитный момент и пространственное распределение магнитного поля постоянных магнитов цилиндрической формы, могут быть использованы при расчете характеристик конкретных устройств, а также при решении сопутствующих задач по магнитной совместимости с источниками поля в виде намагниченных цилиндров.

Предлагаемое описание магнитного поля цилиндрических стержней с неоднородным распределением намагниченности может быть использовано при создании эталонных источников мультиполей для настройки магнитных измерительных систем.

1. *Гетьман А.В., Константинов А.В.* Аналитическое представление магнитного поля соленоида с помощью цилиндрических гармоник // Електротехніка і Електромеханіка. – 2010. – №5. – С. 43−45.

2. *Грей Э., Мэтьюз Г.Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – М.: ИЛ, 1953. – 372 с.

3. *Коваленко А.П.* Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975. – 248 с.

4. *Краснов И.П.* Расчетные методы судового магнетизма и электротехники. – Л.: Судостроение, 1986. – 216 с.

5. *Holmes J.J.* Theoretical development of laboratory techniques for magnetic measurement of large objects // IEEE Transactions on Magnetics. – 2001. – Vol.37. − № 5. – Pp. 3790−3797.

6. *Smythe W.* Static and Dynamic Electricity. – Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p.

УДК 621.317.4

ЦИЛІНДРИЧНІ ГАРМОНІКИ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ПОЗДОВЖНЬО НАМАГНІЧЕНОГО ЦИЛІНДРА

А.В.Гетьман, канд.техн.наук, **О.В.Константінов**
Науково-технічний центр магнетизму технічних об'єктів НАН України,
вул. Індустріальна, 19, Харків, 61106, Україна.

Розглянуто застосування циліндричного гармонічного аналізу для аналітичного опису залишкової та індуктивної намагніченості, а також магнітного поля поздовжньо намагніченого циліндра. Досліджуються особливості представлення зовнішнього та внутрішнього магнітного полів на основі циліндричних гармонік для однорідно намагніченого циліндра та для випадку неоднорідного розподілу намагніченості, заданої аналітичною функцією. Розглядається зовнішнє магнітне поле індуктивно намагніченого циліндра, яке може бути представлено аналогічно випадку із залишковою намагніченістю. Бібл. 6.

Ключові слова: *магнітне поле, залишкова намагніченість, індуктивна намагніченість, циліндричні гармоніки.*

CYLINDRICAL HARMONICS OF MAGNETIC FIELD OF LINEAR MAGNETIZED CYLINDER

A.V.Getman, A.V.Konstantinov,
Science and Technology Center of Magnetism of Technical Objects National Academy of Sciences of Ukraine,
19 Industrialnaia st., PO Box 72, Kharkov, 61106, Ukraine.

There was the applying of cylindrical harmonics analysis for analytical description of relic and inductively magnetization, and also magnetic field of linear magnetized cylinder observed. One considers properties of representation for outer and inner magnetic field on basis of cylindrical harmonics for the case of homogeneously magnetized cylinder and the case of the cylinder, which magnetizing is set as analytical function. There is outer magnetic field of inductively magnetized cylinder, which could be represented similarly to the case of relic magnetization a basis of the cylindrical harmonics. References 6.

Key words*:* magnetic field, relic magnetization, inductively magnetization, cylindrical harmonics.

1. *Getman A.V., Konstantinov A.V.* Analitical representation of magnetic field of solenoid by means of cylindrical harmonics // Elektrotekhnika i Elektromekhanika. – 2010. – №5. – Pp. 43–45. (Rus)

2. *Gray A., Mathews G.B*. Bessel functions and their applications to physics. – Moskva: Inostrannaia Literatura, 1953. – 372 p. (Rus)

3. *Kovalenko A.P.* Magnetic systems of spaceship control. – Moskva: Mashinostroenie, 1975. – 248 p. (Rus)

4. *Krasnov I.P.* Calculating methods of ship's magnetism and electrotechnics. – Leningrad: Sudostroenie, 1986. – 216 p. (Rus)

5. *Holmes J.J.* Theoretical development of laboratory techniques for magnetic measurement of large objects // IEEE Transactions on Magnetics. – 2001. – Vol.37. – № 5. – Pp. 3790–3797.

6. *Smythe W.* Static and Dynamic Electricity. – ISBN: 0891169172, Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p.

Надійшла 05.04.2012
Received 05.04.2012