КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Ю.А. ГЛАДКАЯ, Е.С. ПОДЛАСОВ, Д.А. ХАРРИСОН

О РЕШЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Описан метод определения комплексных собственных значений несамосопряженной краевой задачи Штурма – Лиувилля. Рассмотрена характеристическая функция, квадраты нулей которой совпадают с искомыми собственными значениями. Предложен метод поиска нулей характеристической функции, приведены мажорантные оценки точности.

Введение. Исследование математических моделей теории колебаний и волн, теории упругости, квантовой механики и других приводит к необходимости решения соответствующих краевых задач Штурма – Лиувилля [1]. Особый интерес представляют несамосопряженные спектральные задачи, связанные, в частности, с описанием волновых процессов при наличии затухания. При этом заметным недостатком использования классических сеточных методов является ухудшение точности определения собственных значений с ростом их номера. Кроме того, оценки точности разностных методов, как правило, имеют порядковый характер, тогда как при решении многих прикладных задач желательно иметь оценки мажорантного типа. Поэтому актуальной является разработка и усовершенствование альтернативных методов решения спектральных задач Штурма – Лиувилля. В данной работе предложен метод, базирующийся на исследовании некоторой характеристической функции, квадраты нулей которой совпадают с искомыми собственными значениями.

Постановка задачи. Рассмотрим спектральную задачу с комплексным несамосопряженным оператором

$$\varphi''(x + q(x) = \xi^2\varphi(x), 0 < x < L, \qquad (1)$$

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi''(L) + \alpha\ \varphi(L) = 0, \qquad (2)$$

где штрих означает дифференцирование по x, $q(x)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая комплекснозначная функция;

ξ, α – комплексные параметры. Кроме того, предполагается, что $\mathrm{Re}\, q(x) > 0$, $\mathrm{Im}\, q(x) \geq 0$; $\mathrm{Re}\,\alpha \geq 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha \leq 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha + |\mathrm{Im}\,\alpha| \neq 0$.

Задачу сформулируем следующим образом: необходимо определить все значения $\xi \in G$, где G – заданная замкнутая ограниченная область на комплексной плоскости, при которых краевая задача (1), (2) имеет нетривиальное решение.

Характеристическая функция и ее аппроксимация. Для решения спектральной задачи (1), (2) рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\varphi''(x,\xi) + (q(x) - \xi^2)\varphi(x,\xi) = 0,\ 0 < x \leq L, \tag{3}$$

$$\varphi(0,\xi) = 0,\ \varphi'(0,\xi) = 1 \tag{4}$$

и определим характеристическую функцию $\Phi(\xi) = \varphi'(L,\xi) + \alpha\varphi(L,\xi)$, где $\varphi(x,\xi)$ – решение задачи Коши (3), (4). Известно [1], что при указанных условиях характеристическая функция является целой функцией комплексного аргумента ξ, а ее нули по определению совпадают с корнями собственных значений задачи (1), (2).

Стратегия поиска нулей $\Phi(\xi)$ базируется на аппроксимации $\Phi(\xi)$ по совокупности ее значений в некотором конечном множестве точек с использованием информации о характеристиках роста $\Phi(\xi)$ на бесконечности. Нули $\Phi(\xi)$ при этом приближаются нулями аппроксимирующей функции.

В работе [2] показано, что характеристическую функцию можно представить как

$$\Phi(\xi) = \mathrm{ch}(\xi L) + S(\xi), \tag{5}$$

причем для $S(\xi)$ справедлива оценка вида

$$|S(\xi)| \leq A(\xi)\mathrm{e}^{L\,\mathrm{Re}\,\xi}, \tag{6}$$

где

$$A(\xi) = \frac{M\,L}{1+|\xi|\,L}\int_0^L |q(s)|\exp\left(\frac{Ms}{1+|\xi|\,s}\int_0^s |q(s_1)|\,ds_1\right)ds, \tag{7}$$

M – некоторая константа, $0 < M \leq 2$. Таким образом, $S(\xi)$ является целой функцией экспоненциального типа [3], интегрируемой с квадратом по действительной оси, ее можно представить в виде ряда [4]:

$$S(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} S(\xi_{(j)})\sin c[i(\xi + \xi_{(j)})L], \tag{8}$$

где $\sin c(z) = \sin(z)/z$, $\xi_{(j)} = i\pi j/L$, $i = \sqrt{-1}$. Следовательно, $\Phi(\xi)$ можно представить в виде $\Phi(\xi) = \Phi_N(\xi) + R_N(\xi)$, где

$$\Phi_N(\xi) = \mathrm{ch}(\xi L) + S_N(\xi), \tag{9}$$

$$S_N(\xi) = \sum_{j=-N}^{N} S(\xi_{(j)}) \sin c[i(\xi + \xi_{(j)})L], \tag{10}$$

а $R_N(\xi)$ – остаток ряда (8) для $|j| > N$.

Поскольку $\Phi_N(\xi)$ при $N \to \infty$ равномерно сходится к $\Phi(\xi)$ в любой ограниченной замкнутой области на комплексной плоскости, то, согласно теореме Гурвица [5], нули $\Phi(\xi)$ (а следовательно, и искомые собственные значения задачи (1), (2)) приближаются нулями $\Phi_N(\xi)$. Далее рассмотрим процедуру нахождения нулей аппроксимационной функции $\Phi_N(\xi)$.

Определение нулей аппроксимационной функции. Без ограничения общности будем считать область G замкнутым квадратом на комплексной плоскости. Тогда для определения нулей удобно воспользоваться методом бисекции [6], состоящем в последовательном разбиении квадрата на меньшие квадраты с последующим исключением из рассмотрения тех из них, которые не содержат нулей $\Phi_N(\xi)$. При этом для использования метода необходимо иметь критерий, позволяющий сделать вывод, содержит ли данный квадрат D на комплексной плоскости нули $\Phi_N(\xi)$ и, если да, то сколько.

Так как функция $\sin c(z)$ – целая, то из (10) следует, что $\Phi_N(\xi)$ также целая, и, следовательно, для нее справедлив принцип аргумента. Согласно этому принципу, количество n_D нулей $\Phi_N(\xi)$ в заданном квадрате D определяется формулой

$$n_D = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \operatorname{Arg}(\Phi_N(\xi)),$$

где $\Delta_{\partial D} \operatorname{Arg}(\Phi_N(\xi))$ – изменение аргумента $\Phi_N(\xi)$ при проходе вдоль границы ∂D квадрата D в положительном направлении. Отметим, что если ξ изменяется от ξ_1 к ξ_2 вдоль прямолинейного отрезка $[\xi_1, \xi_2] = \xi_1 + \sigma(\xi_2 - \xi_1)$, $0 \le \sigma \le 1$, и изменение аргумента $\Phi_N(\xi)$ при этом удовлетворяет условию $|\Delta_{[\xi_1,\xi_2]} \operatorname{Arg}(\Phi_N(\xi))| \le \pi$, то

$$\Delta_{[\xi_1,\xi_2]} \operatorname{Arg}(\Phi_N(\xi)) = \operatorname{Arg}(\Phi_N(\xi_2) / \Phi_N(\xi_1)).$$

Таким образом, если граница ∂D квадрата D представлена в виде совокупности прямолинейных отрезков

$$\partial D = \bigcup_{k=2}^{m} [\xi_{k-1}, \xi_k],\ \xi_1 = \xi_m ,$$

причем

$$|\,\Delta_{[\xi_{k-1},\xi_k]} \operatorname{Arg}(\Phi_N(\xi))\,| \le \pi, \quad k = 2,...,m , \tag{11}$$

то количество нулей может быть определено как

$$n_D = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^{m} \operatorname{Arg}(\Phi_N(\xi_k) / \Phi_N(\xi_{k-1})) .$$

Если для некоторого отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ условие (11) не выполнено, следует разделить его пополам и рассматривать отдельно отрезки $[\xi_{k-1}, \xi_{k-1} + h_k / 2]$ и $[\xi_{k-1} + h_k / 2, \xi_k]$, $h_k = \xi_k - \xi_{k-1}$. Если (11) не выполняется и для этих отрезков, их также следует разделить пополам до тех пор, пока условие (11) не будет выполнено.

Достаточное условие для выполнения (11) определяется теоремой [7].

Теорема 1. Пусть $l(\xi)$ – линейная комплексная функция, а $P(\xi) = \Phi_N(\xi) - l(\xi)$. Тогда, если $\min\limits_{\xi\in[\xi_{k-1},\, \xi_k]} |\,l(\xi)\,| > \max\limits_{\xi\in[\xi_{k-1},\, \xi_k]} |\,P(\xi)\,|$, то для отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ выполняется условие (11).

В качестве $l(\xi)$ целесообразно выбрать линейную аппроксимацию $\Phi_N(\xi)$ на $[\xi_{k-1}, \xi_k]$:

$$l(\xi) = \Phi_N(\xi_{k-1}) + (\xi - \xi_{k-1}) \frac{\Phi_N(\xi_k) - \Phi_N(\xi_{k-1})}{\xi_k - \xi_{k-1}} .$$

Согласно формуле оценки погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

$$\max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\,P(\xi)\,| = |\,\Phi''_N(\xi_{k-1} + \sigma(\xi_k - \xi_{k-1}))(\xi - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_k) / 2\,| ,$$

где σ – некоторое действительное число, $0 \le \sigma \le 1$ и, таким образом,

$$\max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\,P(\xi)\,| \le |\,(\xi - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_k) / 2\,| \cdot \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\,\Phi''_N(\xi)\,| .$$

На основании (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\,\Phi''_N(\xi)\,| \le L^2 \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\,\operatorname{ch}(\xi L)\,| + \\ + L^2 \sum_{j=-N}^{N} S(\xi_{(j)}) \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\,\sin c''[i(\xi + \xi_{(j)})L]\,|, \end{aligned} \tag{12}$$

причем $\max\limits_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\,\operatorname{ch}(\xi L)\,| \le \exp\left(L \max(|\operatorname{Re} \xi_{k-1}\,|,\ |\operatorname{Re} \xi\,|)\right)$.

Для оценки слагаемых в (12), следует оценить функцию $|\sin c''(z)|$. Раскладывая выражение для $\sin c''(z)$ в ряд Лорана и группируя члены с одинаковыми степенями z, легко показать, что

$$\max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\sin c''[i(\xi+\xi_{(j)})L]| \le \mathrm{ch}(\max(|\xi_{k-1}|,\ |\xi_k|)). \tag{13}$$

С другой стороны, выражая действительную и мнимую части $\mathrm{sinc}''(z)$ через $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$, после громоздких, но несложных алгебраических преобразований, можно показать, что

$$\max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} |\sin c''[i(\xi+\xi_{(j)})L]| \le \frac{L^2}{\left(x_{\min}^2+y_{\min}^2\right)^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{2}Q\left(x_{\max},y_{\max}\right)}, \tag{14}$$

где

$$Q(x_{\max},y_{\max}) = (4+x_{\max}^4+y_{\max}^4+2x_{\max}^2(y_{\max}^2+4))+(4+8y_{\max}^2+(x_{\max}^2+y_{\max}^2)^2)\cdot$$
$$\cdot\mathrm{ch}(2y_{\max})+4x_{\max}(x_{\max}^2+y_{\max}^2+2)+4y_{\max}(x_{\max}^2+y_{\max}^2+2)\mathrm{sh}(2y_{\max}),$$

$$x_{\min}=\begin{cases}\min(|\mathrm{Re}(\mu_{k-1})|,|\mathrm{Re}(\mu_k)|), \text{ при } \mathrm{Re}(\mu_{k-1})\mathrm{Re}(\mu_k)\ge 0,\\ 0, \text{ при } \mathrm{Re}(\mu_{k-1})\mathrm{Re}(\mu_k)<0,\end{cases}$$

$$y_{\min}=\begin{cases}\min(|\mathrm{Im}(\mu_{k-1})|,|\mathrm{Im}(\mu_k)|), \text{при } \mathrm{Im}(\mu_{k-1})\mathrm{Im}(\mu_k)\ge 0,\\ 0, \text{ при } \mathrm{Im}(\mu_{k-1})\mathrm{Im}(\mu_k)<0,\end{cases}$$

$$y_{\max}=\max(|\mathrm{Im}(\mu_{k-1})|,\mathrm{Im}(\mu_k)),$$

$$\mu_{k-1}=i(\xi_{k-1}-\xi_{(j)})L,\ \mu_k=i(\xi_k-\xi_{(j)})L.$$

При этом оценку (13) целесообразно использовать, если все точки отрезка $[\mu_{k-1},\mu_k]$ лежат поблизости 0, например, в единичном круге. Если же $\max(|\mu_{k-1}|,|\mu_k|)>>1$, то оценка (13) является завышенной, и целесообразно использовать (14).

Оценки (13) и (14) позволяют с помощью (12) проверить выполнение условий теоремы 1 и, следовательно, произвести необходимое разбиение границы ∂D квадрата D на отрезки для определения количества n_D нулей аппроксимационной функции $\Phi_N(\xi)$ внутри D. Дальнейшее разбиение квадрата D следует производить до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность определения собственного значения.

Оценка точности метода. Для определения точности описанного метода необходимо дать ответ на два вопроса: 1) с какой точностью δ функция $\Phi_N(\xi)$ аппроксимирует $\Phi(\xi)$; 2) как величина δ влияет на точность аппроксимации нулей $\Phi(\xi)$ нулями $\Phi_N(\xi)$? Учитывая, что решение задачи Коши $\varphi(x,\xi)$ и $\mathrm{ch}(\xi L)$ являются четными функциями от ξ, получаем из (8) после алгебраических преобразований и на основании неравенства Коши – Буняковского мажорантную оценку для $\delta = \max\limits_{\xi\in G} |R_N(\xi)|$:

$$\delta \le \frac{2}{L}\max_{\xi\in G}|\xi|\cdot\max_{\xi\in G}|\mathrm{sh}(\xi L)|\cdot\max_{\xi\in G}\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{|\xi^2-\xi_{(j)}^2|^2}}\cdot\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}|S(\xi_{(j)})|^2}\ .$$

При этом первые три множителя могут быть легко оценены, исходя из геометрии области G, а четвертый – с помощью формул (6) и (7).

Для оценки точности аппроксимации нулей $\Phi(\xi)$ нулями $\Phi_N(\xi)$ можно на основании результатов [8] сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $U_R = \{\xi : |\xi| < R\}$ – открытый круг радиуса R, $G \subset U_R$, $\Phi_{\max} = \sup\limits_{\xi\in U_R}|\Phi(\xi)|$, и для некоторой точки $\xi_1 \in U_R$, такой, что $|\xi_1| = Rp = R\mathrm{e}^{-\nu}$, имеет место условие $|\Phi(\xi_1)| \le \delta = |\Phi(0)|\,\mathrm{e}^{-K\gamma}$, где $\gamma = -\ln(\Phi_{\max}/|\Phi(0)|)/\ln(p)$. Тогда, если при этом $K \ge 7$, то $\Phi(\xi)$ имеет нуль ξ_0 в окрестности ξ_1, причем

$$|\xi_0 - \xi_1| \le R\{12(\nu + K)\mathrm{e}^{2-\nu-K}\}(1-p)\,.$$

Оценка для $\Phi_{\max}$ при этом может быть получена на основании (5)–(7).

Заключение. Предложенный метод является эффективным средством для решения широкого класса спектральных задач Штурма – Лиувилля с комплексным несамосопряженным оператором. Использование аппроксимации характеристической функции позволяет, вычисляя значение характеристической функции в относительно небольшом числе точек, определять собственные значения с необходимой точностью.

Ю.В. Гладка, Є.С. Подласов, Д.А. Харрісон

ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСАМОСПРЯЖЕНОЇ ЗАДАЧІ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ
МЕТОДОМ АПРОКСИМАЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Описано метод визначення комплексних власних значень несамоспряженої крайової задачі Штурма – Ліувілля. Розглянуто характеристичну функцію, квадрати нулів якої співпадають з шуканими власними значеннями. Запропоновано метод пошуку нулів характеристичної функції, наведено мажорантні оцінки точності.

Yu.A. Gladka, I.S. Podlasov, D.A. Harrison

ON SOLVING NON-SELF-CONJUGATE STURM – LIOUVILLE
PROMLEM BY THE METHOD OF CHARACTERISTIC FUNCTION APPROXIMATION

The method for determining complex eigenvalues of non-self-conjugate Sturm – Liouville problem is described. The case when the characteristic function squares of zeros are equal to the sought-for eigenvalues is investigated. The method of the characteristic function squares of zeros locating is proposed, the majorant-type error estimates are considered.

1. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
2. *Boumenir A.* Sampling and eigenvalues of non-self-adjoint Sturm – Liouville problems // SIAM J. Sci. Comput. – 2001. – Vol. 23, N 1. – P. 219–229.
3. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. *Lyubarskii Yu, Madych W.R.* Interpolation of functions from generalized Paley – Wiener spaces // J. Approx. Theory. – 2005. – Vol. 133. – P. 251–268.
5. *Титчмарш Э.* Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 463 с.
6. *Yakoubsohn J.-C.* Numerical analysis of a bisection-exclusion method to find zeros of univariate analytic functions // J. Complexity. – 2005. – Vol. 21. – P. 652–690.
7. *Ying X., Katz I.N.* A reliable argument principle algorithm to find the number of zeros of an analytic function in a bounded domain // Numer. Math. – 1988. – Vol. 53. – P. 143–63.
8. *Rosenbloom P.C.* Perturbation of the zeros of analytic functions. I // J. Approx. Theory. – 1969. – N 2. – P. 111–126.

Получено 02.12.2008

Об авторах:

Гладкая Юлия Анатольевна,
кандидат физико-математических наук,
доцент Киевского национального торгово-экономического университета,

Подласов Евгений Сергеевич,
кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник
Международного научно-учебного центра НАН Украины и МОН Украины,

Харрисон Дина Анатольевна,
соискатель Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.