КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Математическое моделирование

УДК 519.6

В.С. ДЕЙНЕКА, Н.А. ВЕЩУНОВА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИН

Рассмотрены тестовые задачи одновременной идентификации градиентными методами с использованием явных выражений градиентов функционалов-невязок нескольких теплофизических характеристик нестационарной теплопроводности для пластины. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

Введение. В работах [1, 2] на основе теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [3, 4] предложена технология построения явных выражений градиентов J'_{u_n} функционалов-невязок для идентификации различных параметров многокомпонентных распределенных систем градиентными методами [5]. Данная работа является продолжением работ [6, 7] касательно применения этой технологии для практической идентификации теплофизических характеристик пластины. Представлены результаты новых вычислительных экспериментов.

1. Восстановление коэффициента объемной теплоемкости

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, ($\Omega = (0, l)$), определено параболическое уравнение

$$C\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial y}{\partial x}\right) + \tilde{f}\,, \qquad (1)$$

описывающее распределение температуры $y = y(x,t)$ ($t \in (0, T)$) по толщине пластины ($x \in [0, l]$).

На концах отрезка $[0, l]$ ($\Omega = (0, l)$) заданы краевые условия Неймана:

$$-\lambda \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \beta_1,\ \lambda \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \beta_2\,. \qquad (2)$$

При $t = 0$ задано начальное условие:

$$y(x,0) = y_0(x),\ x \in \bar{\Omega}\,. \qquad (3)$$

Следуя [5] примем: $l = 0.003$ *м*, $\mathrm{T} = 20$ *с*, $\lambda = 0.721\ \dfrac{кВт}{м\,К}$, $y_0 \equiv 0$, $C = 2{,}06 \cdot 10^6\ \dfrac{кВт\ с}{м^3\,К}$, $\tilde{f} \equiv 0$,

$$\beta_1 \equiv 0,\ \beta_2 = \beta_2(t) = \begin{cases} 50t,\ \dfrac{кВт}{м^2} & \text{при } t \in [0,10], \\ -50t + 1000,\ \dfrac{кВт}{м^2} & \text{при } t \in [10,\ 20]. \end{cases} \tag{3'}$$

Функция $y = y(x,t) \in \mathrm{H}$, которая $\forall w(x) \in \mathrm{H}_0$ удовлетворяет равенствам:

$$\left(C\frac{\partial y}{\partial t}, w \right) + a\left(y, w\right) = l(w),\ t \in (0,\mathrm{T}), \tag{4}$$

$$y\,\big|_{t=0} = y_0\ ,\ x \in \Omega, \tag{5}$$

называется обобщенным решением задачи (1)–(3), где $\left(\varphi, \psi\right) = \int\limits_0^l \varphi\psi dx$,

$$a\left(y, w\right) = \int\limits_0^l \lambda \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dx,\ l\left(w\right) = \beta_1 w(0) + \beta_2 w(l),\ \mathrm{H}_0 = W_2^1(0,l),$$

$$\mathrm{H} = \left\{ v(x,t) \in W_2^1(0,l):\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2(0,l)\ \forall t \in (0,\mathrm{T}] \right\}.$$

Предполагаем, что в задаче (1)–(5) коэффициент объемной теплоемкости C является неизвестным. При этом в двух ($N = 2$) точках d_i известно решение задачи (4), (5) ($d_1 = 0.0005$ *м*, $d_2 = 0.001$ *м*), заданное равенствами:

$$y(d_i, t) = f_i(t),\ \ i = \overline{1, N},\ t \in (0,\mathrm{T}). \tag{6}$$

Равенства (6) построены на основе приближенного численного решения задачи (4), (5), полученного с помощью использования квадратичных по пространственной переменной функций метода конечных элементов (МКЭ) с шагом дискретизации отрезка $[0,l]$ $h = 0.0001$ и шагом $\tau = 0.2$ дискретизации отрезка $[0,\mathrm{T}]$ схемы Кранка – Николсона [7]. Функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^{\mathrm{T}} \left(y(u; d_i, t) - f_i \right)^2 dt, \tag{7}$$

где $y = y(u) = y(u; x, t)$ – решение задачи (4), (5) при фиксированном $C = u \in U = (0, +\infty)$.

Задача (3), (4), (7) идентификации коэффициента объемной теплоемкости $C = 2.06 \cdot 10^6 \frac{кВт\ с}{м^3\ К}$ по известному решению (6) решена методом минимальных ошибок (ММО) [5]:

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \ n = 0,1,\ldots,n^*, \tag{8}$$

$$p_n = J'_{u_n}, \ \beta_n = \frac{\|l_n\|^2}{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}. \tag{9}$$

Здесь $u_{n+1} = C_{n+1}$ – $n+1$-е приближение восстанавливаемого коэффициента C; n – количество итераций; $l_n = \left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^{T}\left(y(u;\, d_i, t) - f_i\right)^2 dt\right)^{1/2}$ – невязка; $\delta\% = \left|\frac{C - C_n}{C}\right| \cdot 100\%$ – относительная погрешность, остальные обозначения приняты следуя [1, 5]. Для $N = 2$ при $C_0 \in [10, 3.5E6]$ невязка $|l_n| \le 1.1E{-}10$, $16 \le n \le 46$, $\delta \le 1.6E - 4\%$. При $C_0 = 4E6$ – $\delta = 43.5\%$, $l_n = 2.2$, $n = 1$, для $C_0 \in [10, 4E6]$ – $|l_n| \le 1.31E{-}10$, $10 \le n \le 44$, $\delta \le 2.6E - 4\%$. При определении параметра β_n использованы формулы трапеций численного интегрирования.

Следуя [1, 2], сопряженная задача состоит в нахождении функции $\psi(x,t) \in H_d$, которая $\forall w(x) \in \mathrm{H}_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$-\left(u_n \frac{\partial \psi}{\partial t}, w\right) + a(\psi, w) = \sum_{i=1}^{N}\left(y(u_n;\, d_i, t) - f_i\right) w(d_i), \ t \in (0, \mathrm{T}), \tag{10}$$

$$\psi\big|_{t=\mathrm{T}} = 0, \tag{11}$$

где градиент J'_{u_n} функционала-невязки (7) имеет вид:

$$J'_{u_n} \approx \tilde{\Psi}, \ \tilde{\psi} = -\int_0^{\mathrm{T}}\int_0^{l} \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi\, dx\, dt, \ \left\|J'_{u_n}\right\| \approx \left|\tilde{\Psi}\right|.$$

2. Восстановление коэффициентов объемной теплоекости и теплопроводности одновременно

Предполагаем, что в задаче (4), (5) являются неизвестными коэффициенты C, λ ($u = (u_1, u_2), u_1 = C, u_2 = \lambda, u \in U = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$). При каждом $u \in U$ вместо (4), (5) имеем задачу: найти функцию $y = y(u) = y(u; x, t) \in \mathrm{H}$, удовлетворяющую равенствам

$$\left(u_1 \frac{\partial u}{\partial t}, w\right) + a\left(u; y, w\right) = l(w), \quad \forall w \in \mathrm{H}_0, t \in (0, \mathrm{T}), \tag{12}$$

$$y\big|_{t=0} = y_0, \ x \in \Omega, \tag{13}$$

где $a\left(u; y, w\right) = \int\limits_0^l u_2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx$, $l(w) = \beta_1 w(0) + \beta_2 w(l)$.

Задача (12), (13), (7) решена с помощью ММО при $N = 2$, $d_1 = 0.0005\,м$, $d_2 = 0.001\,м$. Начальные приближения $u_{10} = C_0 \in [2 \cdot 10^6, 2.1 \cdot 10^6]$, $u_{20} = \lambda_0 \in [0.1, 1.5]$. Здесь $\left|l_n\right| \le 1.21$ и $0.4\% \le \delta_1 \le 2.9\%$, $0.6\% \le \delta_2 \le 74.3\%$, $n \le 5$. При невязке $\left\|l_n\right\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_0^{\mathrm{T}} \left(y(u_n;\ d_i, t) - f_i(t) \right)^2 dt \right)^{1/2} < 4.2 \cdot 10^{-5}$ получили $\delta_1 \le 0.6\,\%$, $\delta_2 \le 4.6\,\%$ – относительные погрешности восстанавливаемых коэффициентов C, λ, соответственно, $n \le 5$.

Для этой задачи $J'_{u_n} \approx \tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi} = \left\{ \tilde{\Psi}_i \right\}_{i=1}^{2}$, $\tilde{\Psi}_1 = -\int\limits_0^{\mathrm{T}} \int\limits_0^l \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi dx dt$,

$$\tilde{\Psi}_2 = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \int\limits_0^l \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx dt, \ \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \sum_{i=1}^{2} \tilde{\Psi}_i^2 .$$

В задачах (4), (5), (7); (12), (13), (7) для решения прямых и соответствующих сопряженных задач использованы квадратичные полиномы МКЭ по пространственной переменной ($h = 0.0001\,м$), а задачи Коши решены с помощью схемы Кранка – Николсона при $\tau = 0.2\,с$. В этих задачах, как уже отмечалось, функции $f_i(t)$ получены с помощью приближенных решений задачи (4), (5) при известных исходных данных.

Задача (12), (13), (7) также решена с помощью метода сопряженных градиентов (МСГ) в предположении $l = \mathrm{T} = 1$, $\beta_1 = -2(t+1)$, $\beta_2 = 2(t+1)$; $C = 1, \lambda = 2$ – неизвестны, $\tilde{f} = x$ – функция правой части уравнения (1), $y = x(t+1) + 1$, $y_0 = x + 1$, $h = 0.1$, $\tau = 0.1$, $N = 2$, $d_1 = 0.4$, $d_2 = 0.8$.

При различных начальных значениях $u_{10} = C_0 \in [0.5, 2]$, $u_{20} = \lambda_0 \in$ $\in [0.4, 3.1]$ $1.8\mathrm{E}{-7} \le \left|l_n\right| \le 0.53$, $0.05\% \le \delta_1 \le 4.6\mathrm{E}3\%$, $0.05\% \le \delta_2 \le 2.6\mathrm{E}3\%$. Заметим, что при $\left|l_n\right| < 9.7 \cdot 10^{-5}$ относительные погрешности $\delta_1 \le 4.2\%$, $\delta_2 \le 2.3\%$, а при $\left|\ l_n\ \right| < 1.85 \cdot 10^{-7}$ – $\delta_1 \le 0.06\%$. В табл. 1 приведены значения невязки l_n при различных значениях C_0, λ_0.

ТАБЛИЦА 1

λ_0 \ C_0	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
0,4	0,521307	0,433265	0,277126	0,143152	0,002072	2,96E–07	0,000146	0,000253
0,7	0,281284	1,30E–05	1,60E–06	5,80E–06	1,78E–05	5,36E–05	0,000123	0,000226
1	0,053684	1,93E–07	4,74E–07	1,63E–06	1,10E–05	4,62E–05	0,000109	0,000218
1,3	1,44E–06	1,93E–06	1,26E–06	4,41E–07	2,24E–06	3,24E–05	8,40E–05	0,000123
1,6	7,34E–06	7,57E–06	7,53E–06	5,93E–06	0,01122	3,15E–07	2,89E–07	2,84E–07
1,9	2,64E–06	1,04E–05	5,29E–05	0,001159	0,0077	0,000313	9,72E–05	2,70E–05
2,2	3,17E–05	2,36E–05	0,000216	0,004645	1,85E–07	8,54E–05	0,00014	3,18E–05
2,5	0,006695	0,006543	0,006772	9,78E–07	0,025851	6,11E–05	2,15E–05	0,000234
2,8	0,014235	0,014132	0,014659	0,023734	0,038285	0,004211	0,017783	0,080158
3,1	0,022483	0,022424	0,023381	0,034709	0,050779	0,066912	0,081785	0,095119

3. Восстановление термических сопротивлений

3.1. Задача идентификации

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ $\left(\Omega = \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i,\ \Omega_1 = (0,0.5),\ \Omega_2 = (0.5,1.5),\right.$ $\left.\Omega_3 = (1.5,2), T = 1\right)$ определено уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial y}{\partial x}\right) + \tilde{f}\,. \tag{14}$$

На концах отрезка [0, 2] заданы краевые условия Неймана:

$$-\lambda \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta_1,\ \lambda \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=2} = \beta_2,\ t \in (0,1), \tag{15}$$

где $\beta_1 = -20,\ \beta_2 = 20,\ \lambda\big|_{\Omega_i} = 2,\ \tilde{f}\big|_{\Omega_{iT}} = 1,\ \Omega_{iT} = \Omega_i \times (0,T), i = \overline{1,3}$.

При $t = 0$ – начальное условие:

$$y\mid_{t=0} = y_0(x),\ x \in \bigcup_{i=1}^{3} \overline{\Omega}_i\ , \tag{16}$$

где $y_0 \mid_{\Omega_i} = 10x + \alpha_i,\ i = \overline{1,3},\ \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 6,\ \alpha_3 = 8$.

В точках $\xi_1 = 0.5,\ \xi_2 = 1.5$ имеем условия сопряжения:

$$\left.\left\{\lambda \frac{\partial y}{\partial x}\right\}\right|_{x=\xi_i} = r_i[y],\ i = 1,2,\ r_1 = 5,\ r_2 = 10\,. \tag{17}$$

Предполагаем, что в задаче (14)–(17) с классическим решением $y = y(x,t)$, $y\,|_{\Omega_{i\mathrm{T}}} = 10x + t + \alpha_i$, $i = \overline{1,3}$ параметры r_1, r_2 – неизвестны. В некоторых точках $d_i \in \Omega$, $i = \overline{1,N}$, известно решение задачи (14)–(17):

$$y(d_i,t) = f_i,\ i = \overline{1,N}\,. \tag{18}$$

При каждом $u = (u_1,u_2) \in U = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$, обобщенным решением задачи (14)–(17) называется функция $y = y(u) = y(u;x,t) \in W(0,\mathrm{T})$, которая $\forall w\,(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, w\right) + a\left(u; y, w\right) = l(w),\ t \in (0,\mathrm{T}), \tag{19}$$

$$y\,|_{\,t=0} = y_0(x),\ x \in \bigcup_{i=1}^{3} \bar{\Omega}_i\,, \tag{20}$$

где $W(0,\mathrm{T}) = \left\{ v(x,t) \in L^2(0,\mathrm{T};V) : \dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,\mathrm{T};L_2(\Omega)) \right\}$, $V = \left\{ v(x,t) : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\right.$ $\left. i = \overline{1,3},\ \ t \in (0,\mathrm{T}) \right\}$, $V_0 = \left\{ v(x) : v|_{\Omega_i} = W_2^1(\Omega_i), i = \overline{1,3} \right\}$, $r_1 = u_1$, $r_2 = u_2$,

$$a(u;y,w) = \int_0^l \lambda \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx + \sum_{i=1}^{2} u_i\,[y]\big|_{x=\xi_i}\,[w]\big|_{x=\xi_i}\,,\ l(w) = (\tilde{f}, w) + \beta_1 w\,(0) + \beta_2 w\quad (l)\,.$$

Следуя [1] сопряженная задача имеет вид:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0\,,\ x \in \tilde{\Omega}_{j\mathrm{T}},\ j = \overline{1,N_1}\,,$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=0,l} = 0,\ t \in (0,\mathrm{T})\,, \tag{21}$$

$$\left.\left\{\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}\right\}^{\pm}\right|_{x=\xi_i} = u_{in}\,[\psi]\big|_{x=\xi_i}\,,\ i = 1,2,$$

$$[\psi]\big|_{d_{i\mathrm{T}}} = 0,\ \left[\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}\right]\bigg|_{d_{i\mathrm{T}}} = -\left(y(u_n) - f_i\right)\big|_{d_{i\mathrm{T}}}\,,\ i = \overline{1,N}\,,$$

$$\psi\,|_{\,t=\mathrm{T}} = 0,\ x \in \bar{\Omega}\,,$$

где N_1 – количество интервалов, образованных делением интервала $(0,l)$ точками $\xi_1, \xi_2, d_1, \ldots, d_N$, $d_{i\mathrm{T}} = d_i \times (0,\mathrm{T})$, $i = \overline{1,N}$, $u_n = (u_{1n}, u_{2n})$ – n-е приближение решения $u \in U$ задачи (19), (20), (7). Соответствующая ей обобщенная задача состоит в нахождении функции $\psi(x,t) \in W_d(0,\mathrm{T})$, которая $\forall w(x) \in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам:

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},w\right)+a\left(u_n;\psi,w\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(y(u_n)-f_i\right)w(x)\big|_{d_i}, \qquad (22)$$

$$\psi\big|_{t=\mathrm{T}}=0,\ x\in\bar{\Omega}, \qquad (23)$$

где $W_d(0,\mathrm{T})=\left\{v(x,t)\in L^2(0,\mathrm{T};V_d):\frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(0,\mathrm{T};L_2(\Omega))\right\}$, $V_d=\{v(x,t):v|_{\tilde{\Omega}_i}\in$ $\in W_2^1(\tilde{\Omega}_i),\quad i=\overline{1,N_1},\quad t\in(0,\mathrm{T})\}$, $V_{d_0}=\left\{v(x):v|_{\tilde{\Omega}_i}=W_2^1(\tilde{\Omega}_i),i=\overline{1,N_1}\right\}$.

Следуя [1–4, 8] имеем

$$\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle\approx-\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{2}\Delta u_{in}\left[y(u_n)\right]\big|_{x=\xi_i}\left[\psi\right]\big|_{x=\xi_i}dt\,. \qquad (24)$$

3.2. Идентификация постоянных коэффициентов

В предположении постоянства коэффициентов термического сопротивления ($u\in U=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$) на основании (24) получаем

$$J'_{u_n}\approx\tilde{\psi}\,, \qquad (25)$$

где $\tilde{\psi}=\left(\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2\right)$, $\tilde{\psi}_i=-\int_0^{\mathrm{T}}\left[y(u_n)\right]\big|_{x=\xi_i}\left[\psi\right]\big|_{x=\xi_i}dt,\ i=1,2,$ $\left\|J'_{u_n}\right\|^2\approx\sum_{i=1}^{2}\tilde{\psi}_i^2$.

В этом случае задача (19), (20), (7) решена с помощью МСГ [5], где направление спуска p_n и коэффициент β_n итерационного процесса (8) определяются выражениями:

$$p_n=J'_{u_n}+\gamma_n p_{n-1},\ \gamma_0=0,\ \gamma_n=\frac{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}{\left\|J'_{u_{n-1}}\right\|^2},\ \beta_n=\frac{\left(J'_{u_n},p_n\right)}{\left\|Ap_n\right\|^2}, \qquad (26)$$

где $Au_n=\left\{y(u_n;d_i,t)\right\}_{i=1}^{N}$, $Ap_n=\left\{y(p_n;d_i,t)\right\}_{i=1}^{N}$.

Расчеты проведены при $N=3$, $d_1=0.3$, $d_2=1.3$, $d_3=1.8$ и различных начальных значениях u_0, где $u_{10}\in[3.2,7.2]$, $h_1=0.4, u_{20}\in[5,13.8]$, $h_2=0.4$, $2.2\mathrm{E}{-6}\le l_n\le 2.36,\ 3\le n\le 9593$. При $\left|l_n\right|>0.2\quad n\le 199$. Наименьшее значение l_n достигается при $u_{20}=10.2$, $u_{10}\in[5.2,7.2]$, где и наблюдаются наилучшие приближения решения $u\in U$: $0.5\,\%\le\delta_1\le 0.7\,\%$, $5.4\mathrm{E}{-3}\,\%\le\delta_1\le 0.7\,\%$, $0.1\%\le\delta_2\le 1.3\,\%$. При $u_{10}=6.4$, $u_{20}=10.2$, $n=9593$ получены минимальные значения $l_n=2.2\mathrm{E}-6$, $\delta_1=5.4\mathrm{E}{-3}\%$, $\delta_2=0.11\%$.

Замечание 1. При $r_{10}\in[5.2,\,7.2]$, $r_{20}\in[9.8,\,11.4]$ невязка $l_n<1.7\mathrm{E}{-2}$, $5.4\mathrm{E}{-3}\%<\ \delta_1<4.7\,\%$, $0.1\%<\delta_2<4.57\,\%$, $1202\le n\le 9593$.

3.3. Идентификация коэффициентов термического сопротивления в предположении зависимости второго от времени

3.3.1. Второй коэффициент принадлежит $C_+(0,\mathrm{T})$

В предположении $r_1 = \mathrm{const}$, $r_2 = r_2(t)$ на основании (24) имеем

$$\tilde{\psi} = \left(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2(t)\right),\ \ \tilde{\psi}_1 = -\int_0^{\mathrm{T}} \left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_1} \left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_1} dt,\ \ \tilde{\psi}_2 = -\left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_2} \left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_2},$$

$$\left\|J'_{u_n}\right\|^2 \approx \tilde{\psi}_1^2 + \int_0^{\mathrm{T}} \tilde{\psi}_2^2 dt.$$

Задача (19), (20), (7) решена с помощью ММО и МСГ при $r_{10} = 8, N = 3, d_1 = 0.3, d_2 = 1.3, d_3 = 1.8.$ Результаты вычислений приведены в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2

	ММО				МСГ			
u_{20}	n	$\delta_1\%$	$\delta_2\%$	l_n	n	$\delta_1\%$	$\delta_2\%$	l_n
5	10	7.83	41	0.04	1	60	50	2.12
9.5	22	0.91	7.8	8E–3	588	4.13	11.2	0.015
10.5	155	0.2	3.71	2.7E–4	1954	0.5	4.58	2.3E–3
11	5171	6.5E–4	4.96	4.2E–5	1842	1.7	10	0.01
12	3002	3E–3	14.4	1.7E–4	1210	3.4	20	0.04
15	1364	0.3	33	1.5E–3	1043	6.4	50	0.2

При $u_{20} = 11$ по методу ММО значения $u_{2n}(t_j), t_j = j\tau, \tau = 0.1, j = \overline{1,8}$, достаточно близки к $r_2 = 10$, при этом они чередуются: <10 или >10, при $t = 0.9$ $\delta_2 = 7.3\%$, что обусловлено условием (23). Это говорит о том, что дополнительное варьирование параметра u_{20} позволит уменьшить значение l_n и, заодно, уточнить искомое решение $u \in U$.

Замечание 2. При $u_{20} = 10.5$ по МСГ $2.0\% < \delta_2 < 4.98\%$,

$l_n = 0.0023$, $n = 1955$, а по ММО – $0.3\% < \delta_2 < 3.71\%$, $l_n = 0.0003$, $n = 156$.

3.3.2. Параметрическое представление второго коэффициента

Значительно лучшие приближения получены в предположении $r_1 = \mathrm{const}$, $r_2 = a + bt$ (a, b – неизвестные), $U = R_+ \times (R \times R)$. На основании (24) имеем

$$\tilde{\psi} = \left(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2\right),\ \ \tilde{\psi}_2 = \left(\tilde{\psi}_2^1, \tilde{\psi}_2^2\right),$$

где $\tilde{\psi}_1 = -\int_0^{\mathrm{T}} \left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_1} \left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_1} dt,\ \ \tilde{\psi}_2^1 = -\int_0^{\mathrm{T}} \left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_2} \left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_2} dt,$

$$\tilde{\psi}_2^2 = -\int_0^{\mathrm{T}} t\left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_2}\left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_2} dt\,,\ i=1,2\,,\ \left\|J'_{u_n}\right\|^2 \approx \left(\tilde{\psi}_1\right)^2 + \sum_{i=1}^{2}\left(\tilde{\psi}_2^i\right)^2 .$$

Расчеты проведены ММО при $u_{10}=8$, $N=3$. Точки d_i и u_{10} определены в п. 3.3.1, $a_0=8$. При $b_0\in[-5,1]$, $h=1$, во всех случаях: $\delta_1\in[1.2\mathrm{E}-3\%, 0.77\%]$, $\|l_n\|<2.9\mathrm{E}-4$, $\delta_2\le 2.5\%$. При $b_1=-1$: $n=1454$, $\delta_1=1.2\mathrm{E}-3$, $\delta_2\le 3.4\mathrm{E}-2\%$, $l_n = 5{,}4\mathrm{E}-8$.

3.3.3. Параметрическое восстановление коэффициентов r_1, r_2

Параметры r_1, r_2 восстанавливаются в виде: $r_1=a_1+b_1t, r_2=a_2+b_2t$, где a_i, b_i – неизвестные ($i=1,2$), $U=(R\times R)\times(R\times R)$. На основании (24) имеем $\tilde{\psi}=\left(\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2\right)$,

$$\tilde{\psi}_i=\left(\tilde{\psi}_i^1,\tilde{\psi}_i^2\right),\ \tilde{\psi}_1^1=-\int_0^{\mathrm{T}}\left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_1}\left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_1}dt,\ \tilde{\psi}_1^2=-\int_0^{\mathrm{T}}t\left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_1}\left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_1}dt\,,$$

$$\tilde{\psi}_2^1=-\int_0^{\mathrm{T}}\left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_2}\left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_2}dt\,, \tag{27}$$

$$\tilde{\psi}_2^2=-\int_0^{\mathrm{T}}t\left[y(u_n)\right]\Big|_{x=\xi_2}\left[\psi\right]\Big|_{x=\xi_2}dt\,,\ \left\|J'_{u_n}\right\|^2\approx\sum_{i,j=1}^{2}\left(\tilde{\psi}_i^j\right)^2 .$$

Задача (19), (20), (7) решена ММО с учетом (27) в предположениях: $N=3$, $d_1=0.3$, $d_2=1.3$, $d_3=1.8$, $b_1=b_2=0$, $a_1\in[3,7]$, $h_1=1$, $a_2\in[6,12]$, $h_2=1$. Во всех случаях $l_n<0.21$. При $l_n=5.9\mathrm{E}-4\,(a_{10}=4.5, a_{20}=9, n=4)$ получено $0.97\%<\delta_1<1.32\%$, $0.16\%<\delta_2<2.85\%$, при $l_n=3.5\mathrm{E}-3\,(a_{10}=6.5, a_{20}=12, n=5)$ – $1.6\%<\delta_1<2.39\%$, $0.28\%<\delta_2<6.2\%$, при $l_n<0.011$ – $0.5\%<\delta_1$, $\delta_2<7.5\%$.

Заключение. С помощью предложенной в работах [1, 2], основанной на теории оптимального управления [3, 4] технологии идентификации различных параметров многокомпонентных распределенных систем градиентными методами О.М. Алифанова, решены задачи идентификации теплофизических характеристик пластины, а также одновременной идентификации коэффициентов термических сопротивлений прослоек, включая параметрический подход их восстановления. Приведены результаты вычислений.

В.С. Дейнека, Н.А. Вєщунова

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИН

Розглянуто тестові задачі одночасної ідентифікації градієнтними методами з використанням явних виразів градієнтів функціоналів-нев’язок декількох характеристик (коефіцієнтів об’ємної теплоємності, теплопровідності та коефіцієнтів температуропровідності) нестаціонарної теплопровідності для пластини. Наведено результати обчислювальних експериментів.

V.S. Deineka, N.A. Vieshchunova

IDENTIFICATION OF THERMALPHYSIC PARAMETERS FOR A PLATE

Test inverse problems of non-stationary thermal conductivity for a plate are considered. The results of numerical experiments are presented.

1. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение коэффициентных обратных задач теплопроводности для составной пластины // Проблемы управления и информатики. – 2007. –№ 3. – С. 21–48.
2. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 5. – С. 33–28.
3. *Sergienko I.V., Deineka V.S.* Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. – 400 p.
4. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
5. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
6. *Дейнека В.С., Вещунова Н.А.* Численное решение задач идентификации параметров параболических многокомпонентных систем // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 22–33.
7. *Дейнека В.С., Вещунова Н.А.* Численное решение обратных задач нестационарной теплопроводности для пластины // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С. 32–43.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

Получено 15.01.2009

Об авторах:

Дейнека Василий Степанович,
доктор физико-математических наук, профессор,
академик НАН Украины, заведующий отделом Института кибернетики
имени В.М. Глушкова НАН Украины,
e-mail vdeineka@ukr.net

Вещунова Наталия Анатольевна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail nvieshchunova@ukr.net