
УДК 519.6

Д.А. Верлань, аспирант
Киевский национальный университет им. Т. Шевченко
(Украина, 03127, Киев, просп. Академика Глушкова, 4д,
тел. (+38) 0632779797, dmitriverlan@gmail.com)

Градиентный алгоритм билинейной аппроксимации ядер при решении интегральных уравнений Фредгольма II рода

Рассмотрены базовый и градиентный итерационно-вариационные алгоритмы аппроксимации функций двух переменных в виде билинейного ряда и их применение для решения интегральных уравнений Фредгольма II рода методом вырожденных ядер.

Розглянуто базовий і градієнтний ітераційно-варіаційні алгоритми апроксимації функцій двох змінних у вигляді білінійного ряду та їх застосування для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду методом вироджених ядер.

Ключевые слова: аппроксимация, алгоритм, вырожденное ядро, интегральное уравнение.

Одним из актуальных направлений развития численных методов и алгоритмов решения интегральных уравнений является их ориентирование на эффективную компьютерную реализацию. В значительной мере это относится к уравнениям Фредгольма, численное решение которых требует учета такой особенности как наличие постоянных пределов интегрирования (в отличие от уравнений типа Вольтерры). При решении задач динамики такие пределы интегрирования определяют временной интервал, на котором выполняется поиск решения и исключается возможность получения решения по принципу «шаг за шагом». Известным аналогом такого интегрального уравнения являются обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые условия которых приводят к такой же особенности при сравнении с задачей Коши.

Преодолеть возникающие трудности позволяет использование метода вырожденных (разделяющихся) ядер, который в настоящее время еще не получил широкого применения. Этот метод дает возможность построить экономные вычислительные схемы для получения результатов, но его

© Д.А. Верлань, 2013

применение связано с ограничениями, обусловленными конкретным видом ядра, т.е. ядро должно быть вырожденным, представленным в виде определенной комбинации функций одной переменной, что довольно редко встречается на практике. В связи с этим компьютерно реализованный вариант метода вырожденных ядер должен содержать эффективный численный алгоритм аппроксимации ядер как функций двух переменных.

Используемые в вычислительной математике методы аппроксимации функций двух переменных [1] основаны, как правило, на аналитических методах разложения исходной функции в конечные ряды или состоят в предварительном выборе системы линейно независимых координатных функций с последующим оптимизационным определением соответствующих коэффициентов влияния. Полученный набор координатных функций пригоден для аппроксимации широкого класса функций двух переменных. Для различных задач аппроксимации может изменяться только их количество. При этом результатом аппроксимации являются зависимости, которые могут содержать значительное число слагаемых, что часто значительно усложняет вычислительные процессы компьютерного моделирования.

Существенный интерес представляют алгоритмы аппроксимации функций двух переменных, позволяющие численно формировать координатные функции, форма которых свойственна лишь данной конкретной задаче аппроксимации и обеспечивает незначительное их количество. Для любой другой аппроксимируемой функции набор координатных функций также будет другим. Рассмотрим следующие варианты алгоритмов, реализующих данный подход.

Базовый итерационно-вариационный алгоритм [2]. Будем рассматривать задачу приближения функции двух переменных в следующем виде. Пусть задана интегрируемая в квадрате $[a \leq x, s \leq b]$ функция $K(x, s)$. Необходимо аппроксимировать ее билинейной суммой

$$K(x, s) \cong \sum_{i=1}^l \alpha_i(x) \beta_i(s) \quad (1)$$

при условии минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \int_a^b \int_a^b \left[K(x, s) - \sum_{i=1}^l \alpha_i(x) \beta_i(s) \right]^2 dx ds \rightarrow \min. \quad (2)$$

Процесс аппроксимации состоит в следующем. Последовательно находим слагаемые суммы (1). Первое слагаемое, $\alpha_1(x) \beta_1(s)$, формируется

так: задаем начальное приближение $\beta_1^{(0)}(s)$ функции $\beta_1(s)$ и находим начальное приближение $\alpha_1^{(0)}(s)$ для $\alpha_1(x)$:

$$\alpha_1^{(0)}(s) = \frac{\int_a^b K_1(x, s) \beta_1^{(0)}(s) ds}{\int_a^b (\beta_1^{(0)}(s))^2 ds}, \quad (3)$$

где $K_1(x, s) = K(x, s)$. Затем определяем

$$\beta_1^{(1)}(s) = \frac{\int_a^b K_1(x, s) \alpha_1^{(0)}(x) dx}{\int_a^b (\alpha_1^{(0)}(x))^2 dx}. \quad (4)$$

Наиболее точное приближение $\alpha_1^j(x) \beta_1^j(s)$ к $K_1(x, s)$ определяем итерационно из выражений

$$\alpha_i^{(j)}(x) = \frac{\int_a^b K_i(x, s) \beta_i^{(j)}(s) ds}{\int_a^b (\beta_i^{(j)}(s))^2 ds}, \quad (5)$$

$$\beta_i^{(j)}(s) = \frac{\int_a^b K_i(x, s) \alpha_i^{(j)}(x) dx}{\int_a^b (\alpha_i^{(j)}(x))^2 dx}, \quad (6)$$

где i — номер слагаемого суммы; j — номер шага итерации. Итерационный процесс (5), (6) продолжается до выполнения условий

$$\begin{aligned} \|\alpha_i^{(j)}(x) - \alpha_i^{(j-1)}(x)\| &\leq \varepsilon, \\ \|\beta_i^{(j)}(s) - \beta_i^{(j-1)}(s)\| &\leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (7)$$

где ε — показатель заданной точности вычисления функций $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(s)$. Затем такую же процедуру выполняем для аппроксимации функций

$$K_{i+1}(x, s) = K_i(x, s) - \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad (8)$$

используя выражения (5) и (6) до выполнения условий (7). Весь итерационно-вариационный процесс (3)—(8) продолжается до выполнения условия

$$\left\| K(x, s) - \sum_{i=1}^l \alpha_i(x) \beta_i(s) \right\| \leq \varepsilon_{\text{appr}}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_{\text{appr}}$ — заданный показатель точности аппроксимации. Таким образом, получаем выражение (1), с необходимой точностью аппроксимирующее исходную функцию $K(x, s)$.

Градиентный алгоритм. Для ускорения процесса аппроксимации гладких функций $K(x, s)$ [3] целесообразно вместо традиционного критерия оптимальности приближения (2) рассмотреть функционал, учитывающий скорости изменения (градиенты) функции $K(x, s)$ по переменным x и s . В этом случае критерий оптимальности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_g = & \int_a^b \int_a^b \left[K(x, s) - \sum_{i=1}^l \alpha_i(x) \beta_i(s) \right]^2 dx ds + \\ & + n \int_a^b \int_a^b \left[K'_x(x, s) - \sum_{i=1}^l \alpha'_i(x) \beta_i(s) \right]^2 dx ds + \\ & + m \int_a^b \int_a^b \left[K'_s(x, s) - \sum_{i=1}^l \alpha_i(x) \beta'_i(s) \right]^2 dx ds \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (10)$$

где n и m — весовые коэффициенты при слагаемых, учитывающих первую производную соответственно по x и s . Значения n и m выбираем (определяем) либо на основе априорных данных о функции $K(x, s)$, либо в процессе последующих вычислительных экспериментов.

Приравнивание к нулю левой части функционала (9) (идеальный случай аппроксимации) позволяет получить в результате эквивалентных преобразований определяющее выражение для нахождения искомых значений $\alpha_i(x)$ в виде дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \alpha_i''(x) n \int_a^b \beta_i(s) ds - \alpha_i(x) (m \int_a^b \beta_i'(s) ds + \int_a^b \beta_i(s)' ds) = \\ = \int_a^b (K(x, s) + m K'_x(x, s) + n K''_{xx}(x, s)) ds \end{aligned} \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$\alpha'(a) = \frac{\int_a^b K'_x(a, s) ds}{\int_a^b \beta_i(s) ds}, \quad \alpha'(b) = \frac{\int_a^b K'_s(b, s) ds}{\int_a^b \beta_i(s) ds} \quad (12)$$

и аналогичного уравнения для $\beta_i(s)$,

$$\begin{aligned} \beta_i''(s) m \int_a^b \alpha_i(x) ds - \beta_i(s) \left(m \int_a^b \alpha_i'(x) dx + \int_a^b \alpha_i(x) dx \right) = \\ = \int_a^b (K(x, s) + nK'_s(x, s) + mK''_{ss} dx), \end{aligned} \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$\beta_i'(a) = \frac{\int_a^b K'_x(a, s) ds}{\int_a^b \beta_i(s) ds}, \quad \beta_i'(ab) = \frac{\int_a^b K'_s(b, s) ds}{\int_a^b \beta_i(s) ds}. \quad (14)$$

Решение уравнений (11) и (13) приводит к получению искомым функций $\alpha_i^{(j)}(x)$ и $\beta_i^{(j)}(s)$, а использование выражений (7)—(9) позволяет получить искомое приближение. При этом необходимо учитывать, что данная процедура требует многократного выполнения операции дифференцирования. При численных расчетах это может привести к большим погрешностям, а в некоторых случаях и к невозможности получения результата с необходимой точностью.

Для упрощения расчетных формул и повышения устойчивости вычислений можно пренебречь выражениями $\alpha_i''(x) n \int_a^b \beta_i(s) ds$, $nK''_{xx}(x, s)$ в (11) и $\beta_i''(s) m \int_a^b \alpha_i(x) ds$, $mK''_{ss}(x, s)$ в (13), что вполне оправдано при небольших значениях n и m . Тогда из (11) и (13) получаем расчетные выражения в явном виде для $i = 0, l$:

$$\alpha_i^{(j)}(x) = \frac{\int_a^b K_i(x, s) \beta_i^{(j)}(s) + m K_x'(x, s) \beta_i^{(j)'}(s) ds}{\int_a^b (\beta_i^{(j)}(s) + \beta_i^{(j)'}(s))^2 ds}, \quad (15)$$

$$\beta_i^{(j)}(s) = \frac{\int_a^b K_i(x, s) \alpha_i^{(j)}(x) + n K_s'(x, s) \alpha_i^{(j)'}(x) dx}{\int_a^b (\alpha_i^{(j)}(x) + \alpha_i^{(j)'}(x))^2 dx}. \quad (16)$$

Полученные выражения (15) и (16) не только более удобны для вычислений, но и при замене ими выражений (5) и (6) в базовом алгоритме завершают построение нового алгоритма, позволяющего ускорить вычислительный процесс и уменьшить число слагаемых аппроксимирующего ряда.

Рассмотрим пример применения приведенных алгоритмов для решения тестовой задачи аппроксимации осциллирующей функции $K(x, s) = \sin(xs)$ (рис. 1, см. вклейку) в квадрате $[0 \leq x, s \leq \pi]$ с точностью $\varepsilon_{\text{apr}} = 0,1^{-5}$, $\varepsilon = 0,1^{-4}$ и шагом $h = 0,01$. Для выполнения вычислительных экспериментов используется среда MATLAB с разработанными модулями, реализующими алгоритмы аппроксимации.

Посредством базового алгоритма получен аппроксимирующий ряд из восьми слагаемых за 90,8 с. С помощью градиентного алгоритма получен ряд из семи слагаемых за 24,5 с при $n = m = 0,05$. Данные результаты свидетельствуют о работоспособности алгоритмов и подтверждают ожидаемые свойства градиентного алгоритма. Графики функций погрешности базового и градиентного алгоритмов приведены на рис. 2 (см. вклейку).

Решение уравнения Фредгольма II рода. Рассмотрим метод вырожденных ядер [4] применительно к решению линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s) y(s) ds. \quad (17)$$

Если ядро имеет вид (1), то уравнение (17) принимает вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^l \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds. \quad (18)$$

Если положить

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds, \quad d_{ij} = \int_a^b \alpha_j(x) \beta_i(s) ds, \quad f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds,$$

то можно сформировать алгебраическую систему относительно неизвестных c_i :

$$c_i - \sum_{j=1}^l d_{ij} c_j = f_i,$$

или более подробно

$$\begin{pmatrix} (1-d_{11})c_1 & \cdots & -d_{1l}c_l = f_1, \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{l1}c_1 & \cdots & (1-d_{ll})c_l = f_l. \end{pmatrix} \quad (19)$$

При найденных значениях c_i из системы (19) решение уравнения (18) можно получить в виде выражения

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^l c_i \alpha_i(x),$$

которое удобно использовать как в качестве аналитического представления, так и при выполнении вычислений.

Применение метода вырожденных ядер с использованием приведенных выше алгоритмов аппроксимации ядра можно рассмотреть на примере решения уравнения

$$y(x) = e^{-\pi} \left(\frac{\sin \pi x + x \cos \pi x}{1+x^2} \right) + e^{-x} - \frac{x}{1+x^2} + \int_0^{\pi} \sin xs y(s) ds \quad (20)$$

(точное решение e^{-x}), предварительно аппроксимировав функцию $K(x,s) = \sin xs$. В таблице приведены результаты решения уравнения (20) тремя методами с шагом $h = 0,01$ на отрезке $[0, \pi]$.

Метод	Время, затраченное на решение, с	Максимальная абсолютная ошибка
Квадратурный метод трапеций	0,0482	0,0011
Вырожденных ядер с базовой аппроксимацией	0,0117	0,00072967
Вырожденных ядер с градиентной аппроксимацией	0,0021	0,00072916

Выводы

Применение численных алгоритмов аппроксимации ядер интегральных уравнений как функций двух переменных позволяет повысить эффективность и расширить области применения метода вырожденных ядер. Применение градиентного принципа к формированию функционала точностной оптимизации приближения функции билинейным рядом приводит к построению алгоритма аппроксимации с гибким учетом свойств исходной функции и возможностью ускорения вычислительного процесса, а также минимизации числа координатных функций, набор которых относится лишь к конкретной аппроксимируемой функции. Программы, реализующие рассмотренные алгоритмы приближения, могут быть включены в существующие типовые средства компьютерного моделирования. Для решения задач, требующих высокой скорости вычислений при решении интегральных уравнений (обработка сигналов, управление, диагностика и др.) этап аппроксимации ядра должен быть предварительным, что не противоречит существующим технологиям разработки средств обработки сигналов в соответствующих технических системах.

The article investigates the basic and gradient iteration-variational algorithms to approximate the function of two variables in a form of a bilinear series, as well as their application to the solution of the Fredholm integral equations of the second kind by the method of degenerate kernels.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. — М. : Физматгиз, 1962. — 640 с.
2. Верлань Д.А. Ітераційні алгоритми апроксимації функції двох змінних//Зб. «Математичне та комп'ютерне моделювання». Сер. Технічні науки. Вип. 2. — Кам'янець-Подільськ: Кам'янець-Подільський національний ун-т ім. Івана Огієнка, 2009. — С. 24—32.
3. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. — М. : изд-во МГУ, 1974. — 374 с.
4. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. — М. : «Факториал Пресс», 2000. — 384 с.

Поступила 15.11.12

ВЕРЛАНЬ Дмитрий Анатольевич, аспирант Киевского национального университета им. Т. Шевченко, который окончил в 2011 г. Область научных исследований — аппроксимация функций и решение интегральных уравнений.

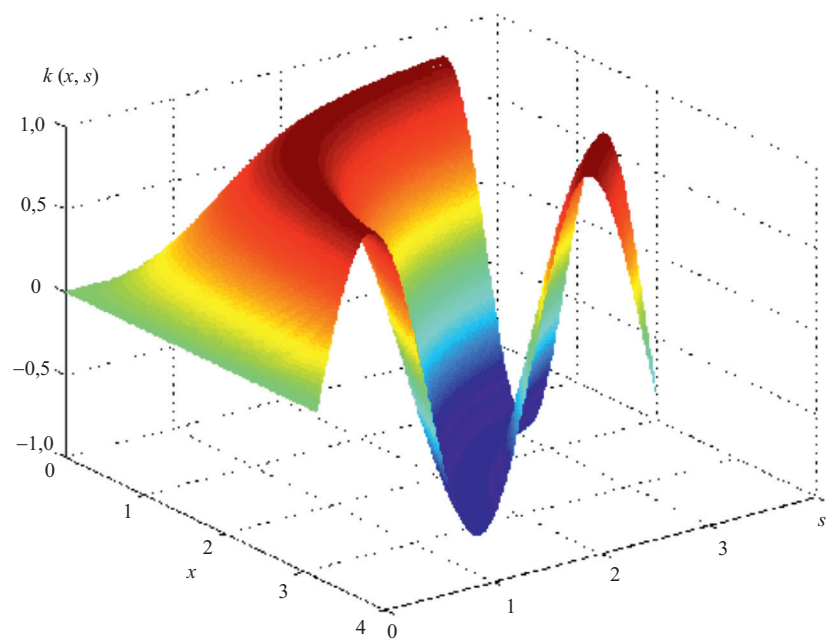


Рис. 1. Аппроксимируемая функция $\sin(xs)$

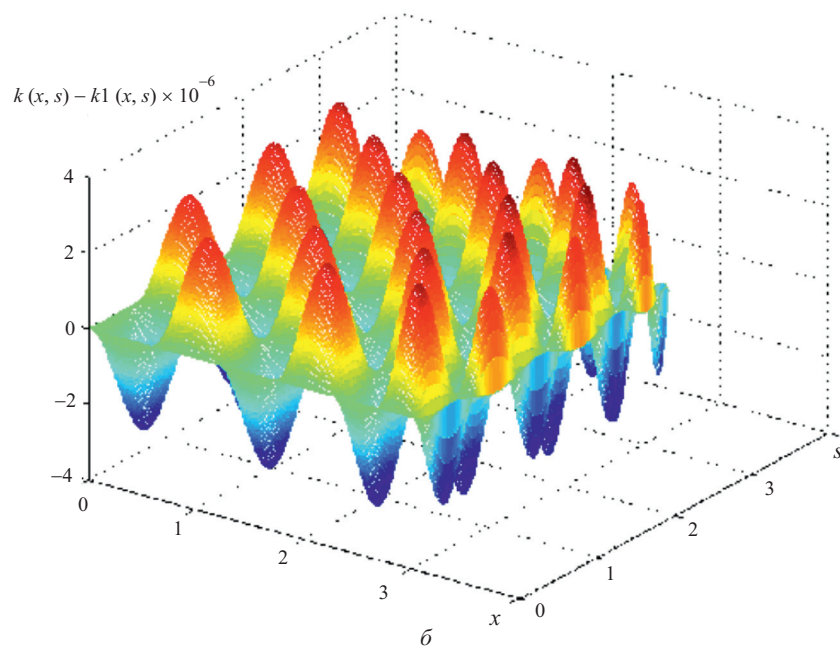
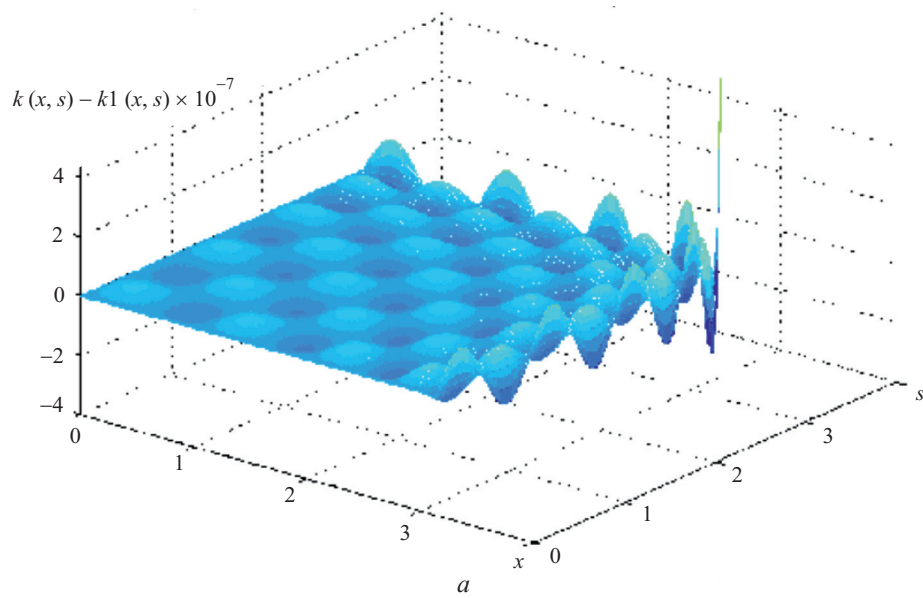


Рис. 2. Функция погрешности аппроксимации для базового (а) и градиентного (б) алгоритмов