УДК 519.512

А. Г. Гаджиев, чл.-кор. НАН Азербайджана
Ин-т кибернетики НАН Азербайджана
(Азербайджан, AZ1141, Баку, ул.Ф. Агаева, 9,
тел. (99412) 4393869, e-mail: asaf@baku-az.net),
А. Б. Касумов, канд. техн. наук
Азербайджанский технический университет
(Азербайджан, AZ1073, Баку, просп. Г. Джавида, 25,
тел. (99412) 4383201, e-mail: adil.gasimov@mail.ru)

Исследование нестационарных характеристик однолинейной системы массового обслуживания и распределения времени пребывания системы в фиксированном множестве состояний

Рассмотрена однолинейная система массового обслуживания, на вход которой поступает поток марковского типа, зависящий от числа требований, находящихся в системе. Получено преобразование Лапласа — Стилтьеса распределения времени пребывания системы в фиксированном множестве состояний.

Розглянуто однолінійну систему масового обслуговування, на вхід якої надходить потік марковського типу, залежний від числа запитів, що знаходяться в системі. Отримано перетворення Лапласа — Стілтьєса розподілу часу перебування системи у фіксованій множині станів.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: однолинейная система, скорость обслуживания, марковский процесс, двойное преобразование Лапласа.

Исследование нестационарных характеристик различных систем массового обслуживания представляет как научный, так и практический интерес. Сложные технологические процессы, математические модели сложных систем массового обслуживания имеют нестационарную природу. Нестационарность таких систем создает трудности для исследователей и обусловливает необходимость построения новых математических моделей и методов исследования. Ранее трудности при аналитическом исследовании указанных систем были сопряжены с численными расчетами для получения преобразования Лапласа — Стилтьеса. Однако широкое использование компьютеров позволяет получить численные значения различных параметров системы с помощью преобразования Лапласа — Стилтьеса, эффективно исследовать такие системы и принимать необходимые решения.

В настоящее время имеется обширная литература по исследованию стационарных процессов [1—4], описывающих поведение различных систем массового обслуживания, однако нестационарные системы массового обслуживания исследованы недостаточно [5—7].

В работах [8—10] исследованы системы с нестационарной интенсивностью входящего потока в условиях малой загрузки. Однако увеличение загрузки системы существенно усложняет вычисление характеристик, что приводит к необходимости разработки новых подходов и методов исследований. В [11, 12] исследовано нестационарное распределение длины очереди в системах M/M/∞ и G1/G/1, когда входящий поток зависит от состояния системы. Необходимо заметить, что методы, предложенные в указанных работах, не позволяют рассчитать другие нестационарные характеристики систем, например время пребывания в фиксированном состоянии, что является актуальной проблемой для практических приложений.

Постановка задачи. На вход однолинейной системы массового обслуживания поступает поток марковского типа с параметром λ_i, где i число требований в системе в момент времени t, т.е. вероятность поступления требования в интервале времени $(t, t+\Delta t)$, где Δt мало, равна $\lambda_i \Delta t + 0(\Delta t)$. Предположим, что скорость обслуживания требования α_i зависит от значения i. Время обслуживания требования равно η_i, если число требований в системе равно i. Положим, что случайная величина η_i имеет функцию распределения $H_i(x)$ с математическим ожиданием τ_i. Назовем длиной очереди число требований в системе и будем полагать, что в очередь входит и обслуживающееся требование. Обозначим через $v(t)$ длину очереди (число требовний) в момент t.

Найдем преобразование Лапласа — Стилтьеса распределения длины очереди в момент времени t:

$$P_k(t) = P\{v(t) = k\}.$$

Следуя [6], обозначим через A подмножество состояний процесса $v(t)$ (0, 1, 2, ..., n) и через ζ_{n+1} — интервал времени от $t=0$ до момента t_1, когда впервые $v(t_1) = n+1$, при условии, что в момент $t=0$ $v(0) \in A$. Обозначим через $\psi_{n+1}(t)$ функцию распределения ζ_{n+1}.

Пусть

$$\varphi_i^{(1)}(x,t) = P\{v(t) = i, \zeta(t) < x, v(t) \neq n+1, 0 \leq \tau \leq t\},$$

$$P_0^{(1)}(t) = P\{v(t) = 0,\ v(t) \neq n+1,\ 0 < \tau < t\},$$

$$\psi_{n+1}(t) = P\{v(t) = n+1, 0 \leq v(\tau) < n+1, 0 < \tau < t_1, v(t) = n+1,\ t_1 \leq \tau < t\}.$$

Учитывая, что состояние $n+1$ является поглощающим, для $\varphi_i^{(1)}(x,t)$ и $\psi_{n+1}(t)$ получаем дифференциальные уравнения в частных производных

$$\frac{\partial P_0^{(1)}(t)}{\partial t}=-\lambda_0 P_0^{(1)}(t)+\alpha_1\frac{\partial\varphi_1^{(1)}(0,t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\varphi_1^{(1)}(x,t)}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial\varphi_1^{(1)}(x,t)}{\partial x}=$$

$$=-\lambda_1\varphi_1^{(1)}(x,t)-\alpha_1\frac{\partial\varphi_1^{(1)}(0,t)}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\varphi_2^{(1)}(0,t)}{\partial x}H_1(x)+\lambda_0 P_0^{(1)}(t)H_1(x),$$

$$\frac{\partial\varphi_i^{(1)}(x,t)}{\partial t}\alpha_i\frac{\partial\varphi_i^{(1)}(x,t)}{\partial x}= \tag{1}$$

$$=-\lambda_i\varphi_i^{(1)}(x,t)-\alpha_i\frac{\partial\varphi_i^{(1)}(0,t)}{\partial x}+\alpha_{i+1}\frac{\partial\varphi_{i+1}^{(1)}(0,t)}{\partial x}H_i(x)+\lambda_{i-1}\varphi_{i-1}^{(1)}(x,t),$$

$$2\le i\le n-1,$$

$$\frac{\partial\varphi_n^{(1)}(x,t)}{\partial t}-\alpha_n\frac{\partial\varphi_n^{(1)}(x,t)}{\partial x}=-\lambda_n\varphi_n^{(1)}(x,t)-\alpha_n\frac{\partial\varphi_n^{(1)}(0,t)}{\partial x}+\alpha_{n-1}\varphi_{n-1}^{(1)}(x,t),$$

$$\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial t}=\lambda_n\varphi_n^{(1)}(\infty,t)$$

с начальными условиями $\varphi_i^{(1)}(x,0)=\varphi_i^{(0)}(x), P_i^{(0)}=\varphi_i^{(0)}(\infty), i=1,\dots,n, P_0^{(1)}(0)=$ $=P_0^{(0)}$. При этом

$$\sum_{i=0}^{n}P_i^{(0)}=1.$$

Теорема. Для преобразования Лапласа—Стилтьеса $\tilde\psi_{n+1}(u)$ функции распределения $\psi_{n+1}(t)$ времени до первого пересечения процессом $v(t)$ фиксированного уровня $n+1$ справедлива формула

$$\tilde\psi_{n+1}(u)=\lambda_n\frac{uB_n(u)\sum_{j=0}^{n-1}A_j(u)+A_n(u)\left(1-u\sum_{j=1}^{n-1}B_j(u)\right)}{u\sum_{j=0}^{n}A_j(u)+\lambda_n A_n(u)}, \tag{2}$$

где

$$A_i(u)=\alpha_{i0}(u)+\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{j_1=1}^{i-1}\dots\sum_{j_k=1}^{k-1}\alpha_{j_k0}(u)\alpha_{ij_1}(u)\alpha_{j_1j_2}(n)\dots\alpha_{j_{k-1}j_k}(u);$$

$$B_i(u)=c_i(u)+\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{j_1=1}^{i-1}\ldots\sum_{j_k=1}^{k-1}c_{j_k}(u)\alpha_{ij_1}(u)\alpha_{j_1j_2}(n)\ldots\alpha_{j_{k-1}j_k}(u);$$

$A_0(u)\equiv 1, B_0(u)\equiv 0, C_j(u)$ и $\alpha_{ij}(u)$ определяются по формулам (8) из работы [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив к (1) двойное преобразование Лапласа, получим

$$(u+\lambda_0)\widetilde{P}_0^{(1)}(u)=\alpha_1\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1^{(1)}(0,u)}{\partial x}+P_0^{(0)}, \tag{3}$$

$$(u-\alpha_1 s+\lambda_1)\widetilde{\varphi}_1(s,u)=$$

$$=-\alpha_1\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1^{(1)}(0,u)}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\widetilde{\varphi}_2^{(1)}(0,u)}{\partial x}\widetilde{h}_1(s)+\lambda_0\widetilde{P}_0^{(1)}(u)\widetilde{h}_1(s)+\widetilde{\varphi}_1^{(0)}(s), \tag{4}$$

$$(u-\alpha_i s+\lambda_i)\widetilde{\varphi}_i(s,u)=$$

$$=-\alpha_i\frac{\partial\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(0,u)}{\partial x}+\alpha_{i+1}\frac{\partial\widetilde{\varphi}_{i+1}^{(1)}(0,u)}{\partial x}\widetilde{h}_i(s)+\lambda_{i-1}\widetilde{\varphi}_{i-1}^{(1)}(s,u)+\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(s),$$

$$2\le i\le u-1, \tag{5}$$

$$(u-\alpha_n s+\lambda_n)\widetilde{\varphi}_n(s,u)=-\alpha_n\frac{\partial\widetilde{\varphi}_n^{(1)}(0,u)}{\partial x}+\alpha_{n-1}\widetilde{\varphi}_{i-1}^{(1)}(s,u)+\widetilde{\varphi}_n^{(0)}(1), \tag{6}$$

$$\widetilde{\varphi}_{n+1}(u)=\lambda_n\widetilde{P}_n^{(1)}(u). \tag{7}$$

Суммируя уравнения (3)—(7), при $s\to 0$ получаем

$$u\sum_{i=0}^{n}\widetilde{P}_i^{(1)}(u)+\widetilde{\psi}_{n+1}(u)=1.$$

Из уравнения (6) при $s\to 0$ находим

$$(u+\lambda_n)\widetilde{P}_n^{(1)}(u)=-\alpha_n\frac{\partial\varphi_n^{(1)}(0,u)}{\partial x}+\lambda_{n-1}\widetilde{P}_{n-1}^{(1)}(u)+P_n^{(0)}. \tag{8}$$

При $s=\dfrac{u+\lambda_n}{\alpha_n}$ из (8) следует

$$\alpha_n\frac{\partial\widetilde{\varphi}_n^{(1)}(0,u)}{\partial x}=\lambda_{n-1}\widetilde{\varphi}_{n-1}\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n},u\right)+\widetilde{\varphi}_n^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right),$$

откуда вытекает

$$(u+\lambda_n)\widetilde{P}_n^{(1)}(n)=\lambda_{n-1}\widetilde{P}_{n-1}^{(1)}(u)+P_n^{(0)}-\lambda_{n-1}\widetilde{\varphi}_{n-1}^{(1)}\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n},u\right)-\widetilde{\varphi}_n^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right). \quad (9)$$

Следует заметить, что уравнения (3)—(7) при $i\le n-1$ совпадают с уравнениями (6)—(8) из работы [1]. Поэтому

$$\psi_{n+1}(u)=\lambda_n\widetilde{P}_n^{(1)}(u)=$$

$$\frac{\lambda_n}{u+\lambda_n}\left[-\widetilde{P}_0^{(1)}(u)\sum_{j=0}^{n-1}A_j(u)\left(u\left(1-\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)\right)-\alpha_{nj}(u)(u+\lambda_n)\,\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)\right)+\right.$$

$$+P_n^{(0)}-\widetilde{\varphi}_n^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)-\sum_{j=0}^{n-1}B_j(u)\left(u\left(1-\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_{nj}(u)(u+\lambda_n)\,\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)\right)+C_n(u)(u+\lambda_n)\,\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)-b_{nn}(u)\right]. \quad (10)$$

Подставив выражения для $\widetilde{P}_i^{(1)}(u)$ и $\lambda_{n-1}\widetilde{\varphi}_{n-1}^{(1)}\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)$, аналогичные (2)—(7), в (8) и (9), получим следующую формулу:

$$P_0^{(1)}(u)=[1-P_n^{(0)}+\widetilde{\varphi}_n^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}B_j(u)\left(u\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)+\alpha_{nj}(u)(u+\lambda_n)\,\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)\right)-$$

$$\left.-C_n(u)(u+\lambda_n)\,\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)+b_{nn}(u)\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{n-1}A_j(u)\left(u\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)+\alpha_{nj}(u)(u+\lambda_n)\,\widetilde{h}_n\left(\frac{u+\lambda_n}{\alpha_n}\right)\right)\right].$$

Согласно формуле (16) из работы [1]

$$B_n(u)=C_n(u)+\sum_{j=1}^{n-1}B_j(u)\alpha_{nj}(u),\quad A_n(u)=\alpha_{n0}(u)+\sum_{j=1}^{n-1}A_j(u)\alpha_{nj}(u).$$

Подставляя в формулу (16) из [1] значение $b_{nn}(u)$, получаем

$$P_0^{(1)}(u) = \frac{1 - u\sum_{j=1}^{n} B_j(u) - \lambda_n B_n(u)}{u\sum_{j=0}^{n} A_j(u) + \lambda_n A_n(u)}. \qquad (11)$$

Подставив (11) в (10), приходим к формуле (2).

Рассмотрим частный случай, имеющий теоретический и практический интерес.

Задача 1. Пусть $n=1$. Тогда

$$\tilde{\psi}_2(u) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+u}\left[\lambda_0\left(1-\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)+u\left(P_1^{(0)}-\tilde{\varphi}_1^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)\right]\times$$
$$\times\left[u+\lambda_0-\lambda_0\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right]^{-1}. \qquad (12)$$

В этом случае $\lambda_1=\lambda_0=\lambda_1$, $\alpha_1=1$, $H_1(x)=1-e^{-\mu x}$, $P_0^{(0)}=1$.

Задача 2. Пусть $n=2$. Тогда

$$\tilde{\psi}_3(u) = \frac{\lambda_2}{u+\lambda_2}\left[\left(1-\frac{u\left((P_0^{(0)}+P_1^{(0)})\,\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)-P_0^{(0)}-\tilde{\varphi}_1^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{(u+\lambda_1)\,\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)}\right.\right.\times$$
$$\times\left(\frac{\lambda_1(u+\lambda_0)\left(1-\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{(u+\lambda_1)}+\frac{\lambda_1\alpha_2(u+\lambda_0)\left(\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_2}{\alpha_2}\right)\right)}{(u-(\alpha_2-\alpha_1)+\lambda_1\alpha_2-\alpha_1\lambda_2)}\right)+$$
$$+u\,\frac{\lambda_0+u+(\lambda_1-\lambda_0)\,\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)}{(u+\lambda_1)}\left(P_2^{(0)}-\tilde{\varphi}_2^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_2}{\alpha_2}\right)\right)+$$
$$+\frac{(P_0^{(0)}+P_1^{(0)})\,\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)-P_0^{(0)}-\tilde{\varphi}_1^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)}{(u+\lambda_1)\,\tilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)}\times$$

$$\times\left(\lambda_1-(u+\lambda_1)\,\tilde h_1\left(\frac{u+\lambda_2}{\alpha_2}\right)\frac{\lambda_1\alpha_2}{u(\alpha_2-\alpha_1)+\lambda_1\alpha_2-\alpha_1\lambda_2}\right)+P_1^{(0)}\tilde h_1\left(\frac{u+\lambda_2}{\alpha_2}\right)-$$

$$-\tilde\varphi_1^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_2}{\alpha_2}\right)-P_0^{(0)}\left(1-\tilde h_1\left(\frac{u+\lambda_2}{\alpha_2}\right)\right)\frac{\lambda_1\lambda_2}{u(\alpha_2-\alpha_1)+\lambda_1\alpha_2-\alpha_1\lambda_2}\Bigg)\Bigg]\times$$

$$\times\,u+\lambda_0\left(1-\tilde h_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)+\frac{\lambda_1\alpha_2(u+\lambda_0)}{u(\alpha_2-\alpha_1)+\lambda_1\alpha_2-\lambda_2\alpha_1}\left(\tilde h_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\tilde h_1\left(\frac{u+\lambda_2}{\alpha_2}\right)\right)\Bigg]^{-1}. \tag{13}$$

В случае $P_0^{(0)}=1, \alpha_1=\alpha_2=1$

$$\tilde\psi_3(u)=\frac{\lambda_2}{u+\lambda_2}\left[\frac{u(1-\tilde h_1(u+\lambda_1))}{u+\lambda_1}\,\frac{(\lambda_1(u+\lambda_0)(1-\tilde h_1(u+\lambda_1)))}{(u+\lambda_1)\tilde h_1(u+\lambda_1)}+\right.$$

$$+\frac{\lambda_1(u+\lambda_0)}{\lambda_1-\lambda_0}\left(1-\frac{\tilde h_1(u+\lambda_2)}{\tilde h_1(u+\lambda_1)}\right)-\frac{u(u+\lambda_0+(\lambda_1-\lambda_0)\,\tilde h_1(u+\lambda_1))}{u+\lambda_1}\times$$

$$\left.\times\frac{\lambda_1(1-\tilde h_1(u+\lambda_1))}{(u+\lambda_1)\,\tilde h_1(u+\lambda_1)}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(1-\frac{\tilde h_1(u+\lambda_2)}{\tilde h_1(u+\lambda_1)}\right)\right]\times$$

$$\times\left[u+\lambda_0(1-\tilde h_1(u+\lambda_1))+\frac{\lambda_1(u+\lambda_0)}{\lambda_1-\lambda_2}(\tilde h_1(u+\lambda_1)-\tilde h_1(u+\lambda_2))\right]^{-1}.$$

При решении многих практических задач требуется определить вероятность $P(t)$ того, что в стационарном режиме процесс $v(t)$ за время t не выйдет за уровень n. Легко заметить, что

$$\int_0^\infty e^{-ut}P(t)\,dt=\frac{1}{u}\sum_{i=0}^{n}P_i(1-\tilde\psi_{n+1}(u)),$$

где P_i определяется по формулам из работы [4]. По формуле (8) определяем $\tilde\varphi_i(u)$ и $\tilde\psi_{n+1}(u)$,

$$P_i^{(0)}=\frac{P_i}{\sum\limits_{i=0}^{n}P_i},\quad \tilde\varphi_i^{(0)}(u)=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}P_i}\tilde\varphi_i(u)\,.$$

Дифференцируя (13) по u в точке $u=0$, находим формулу для математического ожидания времени пребывания системы в множестве A:

$$M\xi_{n+1}=-\widetilde{\psi}^{1}_{n+1}(0)=\frac{1}{\lambda_n}\left[1+\lambda_n\sum_{j=1}^{n-1}B_j(0)+\frac{\sum_{j=0}^{n-1}A_j(0)}{A_n(0)}(1-\lambda_n B_n(0))\right]. \qquad (14)$$

В [3] показано, что для системы G1/M/1 $P\left\{\frac{\xi_{n+1}}{M\xi_{n+1}}<t\right\}\to 1-e^{-t}$ при $n\to\infty$. Необходимо найти условия, при которых подобное предельное поведение $\xi_{n+1}/M\xi_{n+1}$ справедливо и для рассматриваемой системы. Действительно, функция $\widetilde{\psi}_{n+1}(u)$ легко преобразуется к виду

$$\widetilde{\psi}_{n+1}(u)=\frac{1}{1+\frac{u}{\lambda_n}\frac{1+\lambda_n\sum_{j=1}^{n}B_j(u)+z_{n-1}(u)(1-\lambda_n B_n(u))}{1-u\sum_{j=1}^{n-1}B_j(u)+u\,z_{n-1}(u)B_n(u)}}, \qquad (15)$$

где $z(u)=\frac{1}{A_n(u)}\sum_{j=0}^{n-1}A_j(u)$. Для нормированной случайной величины $\xi_{n+1}/M\xi_{n+1}$

$$Me^{u\xi_{n+1}/M\xi_{n+1}}=\psi_{n+1}\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1+\lambda_n\sum_{j=1}^{n-1}B_j\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)+z_{n-1}\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)\left(1-\lambda_n B_n\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)\right)}{1+\lambda_n\sum_{j=1}^{n-1}B_j(0)+z_{n-1}(0)(1-\lambda_n B_n(0))\left(1-uc\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)\right)}},$$

где

$$C\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)=\frac{z_{n-1}\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)B_n\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)-\sum_{j=1}^{n-1}B_j\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)}{1+\lambda_n\sum_{j=1}^{n-1}B_j(0)+z_{n-1}(0)(1-\lambda_n B_n(0))}.$$

Следовательно, если найти такие условия на $A_j(u)$ и $B_j(u)$, при которых отношение

$$\frac{1+\lambda_n\sum_{j=1}^{n-1}B_j\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)+z_{n+1}\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)\left(1-\lambda_n B_n\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)\right)}{1+\lambda_n\sum_{j=1}^{n-1}B_j(0)+z_{n-1}(0)(1-\lambda_n B_n(0))\left(1-uc\left(\frac{u}{M\xi_{n+1}}\right)\right)}$$

стремится к единице ($n\to\infty$), то при этих условиях значение $Me^{-\frac{u\xi_{n+1}}{M\xi_{n+1}}}$ будет стремиться к $1/(1+u)$.

Рассмотрим среднее время пребывания $v(t)$ в подмножестве состояний A на одном цикле регенерации. Цикл регенерации образуют моменты времени $t_1,\ldots,t_n$ такие, что $v(t_i-0)=n+1$, $v(t_i+0)=n$, т.е. моменты, после которых в системе остается n требований. Легко видеть, что эти моменты времени образуют процесс восстановления. Будем предполагать выполненным условие существования стационарного эргодического распределения процесса $v(t)$. В данном случае моменты перехода системы в состояние A образуют процесс восстановления. Следовательно, среднее время пребывания в состоянии A на одном цикле регенерации составляет

$$\tau_A=M\xi_{n+1}=\frac{\sum_{i=0}^{n}P_i}{\lambda_n P_n}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\widetilde{P}_i}{\widetilde{P}_n},$$

где $P_i=\widetilde{P}_i P_0$. Этот результат также вытекает из формулы (14), так как начальные условия в этом случае имеют вид $P_i^{(0)}=0$, $0\le i\le n-1$, $P_n^{(0)}= =1\varphi_n^{(0)}(x)=H_n(z)$. При начальных условиях $B_1(0)=\ldots=B_n(0)=0$ формула (9) после некоторых преобразований может быть получена из (15), так как $\widetilde{P}_i=A_i(0)$.

Выводы

Предложенные методы позволяют определить преобразование Лапласа — Стилтьеса времени пребывания системы в фиксированном множестве в зависимости от числа требований, находящихся в системе. Полученные рекуррентные соотношения имеют теоретический и практический интерес и могут быть использованы для расчета многих нестационарных характеристик системы.

A single-line queueing system is considered, with Markov type input flow, depending on the number of customers in the system. The Laplace-Stieltjes transformation of distribution of time of staying in the fixed set of states has been obtained.

1. *Ивницкий В. А.* Асимптотическое исследование стационарного распределения вероятностей состояний одного класса однолинейных систем обслуживания (без памяти)// Проблемы передачи информации. — 1969. — **5**, вып. 3. — С. 8—105.
2. *Шумская А. А.* Оценка стационарной вероятности потери в системе массового обслуживания в рекуррентных потоках требований //Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 2. — С. 133—345.
3. *Обжерок Ю. Е., Песчанский А. И.* Стационарные характеристики однолинейной системы с одним местом для ожидания// Там же. — 2006. — № 5. — С. 51—62.
4. *Зарядов И. С.* Стационарные характеристики обслуживания в системе G/M/n/r с обобщенным обслуживанием// Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. Математика. Информатика. Физика. — 2008. — № 2. — С. 3—9.
5. *Касумов А. Б.* Исследование однолинейной системы массового обслуживания с ненадежным обслуживающим прибором с параметрами, зависящими от ее состояния // Вестник Бакинского ун-та. Серия физ.-мат.наук. — 2000. — № 3. — С. 120—126.
6. *Касумов А. Б.* Исследование нестационарных характеристик длины очереди однолинейной системы массового обслуживания, зависящих от числа требований // Электрон. моделирование. — 2010. — **32.** — № 3. — С. 33—41.
7. *Ивницкий В. А., Касумов А. Б.* Нестационарные математические ожидания числа «нетерпеливых» требований в узлах замкнутых марковских сетей массового обслуживания с возможностью обхода: Тез. 9 Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике и Регионального макросимпозиума «Насущные задачи прикладной математики». — Ставрополь —Кисловодск, 1—8 мая, 2008// Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2008. — **15,** № 6. — С. 1083—1084.
8. *He Ning-ka, Yu Zheng, Hu Da-xuan.* Transient Distribution of the Length of Queuing Model with Input and Service Depending on the System State. Acta Scientiarum Naturalium Universita Sunyatseni. Scientiarum Naturalium. — 2004. — **43**, № 1. — С. 21—24.
9. *Son Yong Sim, Jo Tong Sop Subak.* Reliability Analysis of Cold Standby System with Built-in-test// Mathematica. — 2001. — №3. — С.48—49.
10. *Баштова Е. Е.* Режим малой загрузки для системы обслуживания со случайной нестационарной интенсивностью//Математические заметки. — 2006. — **80**, № 3. — С. 339—349.
11. *Al Seedy Rogab Omirah, Al-Ibraheem Fawriah.* New Transient Solution for the M/M/∞ Queue with Various Arrival and Departure Rate//J. of Applied Mathematics and Computing. — 2003. — **135**, № 2-3. — С. 425—428.
12. *Wang Yimin Limin.* Transient Distribution of the Length and Waiting Time of GI/G1 Queuing System//Mathematical Theory and Applications. — 2003. — **23**, № 3. — С. 43—45.

Поступила 02.03.12;
после доработки 07.06.12

ГАДЖИЕВ Асаф Гаджи оглы, чл.-кор. НАН Азербайджана, зав. лабораторией Ин-та кибернетики НАН Азербайджана. В 1973 г. окончил Московский госуниверситет им. М. В. Ломоносова. Область научных исследований — теория вероятности и математическая статистика (теория случайных процессов, теория массового обслуживания).

КАСУМОВ Адиль Беюк оглы, канд. техн. наук, доцент Азербайджанского технического университета. В 1968 г. окончил Азербайджанский госуниверситет. Область научных исследований — теория массового обслуживания, математические методы в теории надежности.