УДК 618.5.004

Ю. А. Кочкарев, д-р техн. наук, **С. А. Кущ**
Черкасский государственный технологический университет
(Украина, 18006, Черкассы, б-р Шевченко, 460,
тел. (472) 730217, e-mail: kushch@ieee.org)

Родственная реализация логических функций на основе их представления в изоморфной форме

Доказано, что родственная реализация [1] возможна для произвольных логических функций, т.е. является обобщением известных форм представления, и позволяет уменьшать аппаратурные затраты на этапе логического проектирования цифровых устройств.

Доведено, що споріднена реалізація [1] можлива для довільних логічних функцій, тобто є узагальненням відомих форм представлення, і дозволяє зменшувати апаратурні затрати на етапі логічного проектування цифрових пристроїв.

Ключевые слова: Р-форма, формы представления, логические функции, доопределение функций.

Реализация в родственной форме (Р-форме) логических функций (ЛФ), являющихся информационными ядрами цифровых (конечных) автоматов, введена в [1] как обобщение классической реализации ЛФ от n аргументов x_i. Под родственной реализацией (Р-реализацией) (реальной или запланированной) будем подразумевать минимальные формы ЛФ, т.е. результаты минимизации заданных ЛФ:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n). \quad (1)$$

Отличие Р-реализации ЛФ от однозначной классической заключается в том, что реализация для y_i находится на некотором множестве допустимых вариантов, т.е. на множестве «близких» ЛФ [1]:

$$y_i = f_i[X^{(n)}] \vee F_{i1}[X^{(n)}] \vee ... \vee F_{i\rho_1}[X^{(n)}], \quad (2)$$

где y_i — реализуемая ЛФ; $X^{(n)}$ — вектор аргументов ЛФ $[x_1, x_2, ..., x_n]^T$ размерностью n (число входов ЛФ); $f_i[X^{(n)}]$ — номинальная (заданная) ЛФ в исходной или минимальной форме; $F_{i1}[X^{(n)}], F_{i2}, ..., F_{i\rho_1}[X^{(n)}]$ — множество допустимых (близких) вариантов реализации; ρ_i — число возможных близких ЛФ для i-й заданной ЛФ.

Далее будем опускать очевидную зависимость всех элементов (2) от вектора аргументов $X^{(n)}$. Тогда (2) запишем в виде

$$y_i = f_i \vee F_{i1} \vee F_{i2} \vee ... \vee F_{i\rho_1}. \quad (3)$$

В [1] приведены примеры случаев, когда Р-реализация не только допустима, но и может обеспечить некоторое упрощение при реализации ЛФ. Тем не менее, перечень рассмотренных в [1] вариантов достаточно ограничен и создает ошибочное представление относительно узости задач, решаемых с помощью Р-реализации.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. Любая ЛФ может быть реализованна в Р-форме представления (Р-ФП). При этом именно Р-ФП создает дополнительные возможности минимизации, т.е. оптимальной реализации заданной ЛФ.

Доказательство данного утверждения нуждается в четком определении необходимых и достаточных условий близости F_{ik} в (3) к заданной f_i. Допустим, что любая F_{ik} есть, в определенном смысле, моделью заданной f_i, поэтому близость между f_i и F_{ik}, которую обозначим знаком ~, должна отвечать известным аксиомам теории математических моделей [2]:

1) $a \sim a$ (рефлексивность);

2) из $a \sim b$ следует $b \sim a$ (симметрия);

3) из $a \sim b$, $b \sim c$ следует $a \sim c$ (транзитивность).

Указанные условия являются необходимыми. Для определения достаточности дополнительно введем требование, чтобы все f_i и F_{ik} в (3) обеспечивали необходимое качество функционирования устройства, в котором реализована заданная функция y_i. Далее будем полагать, что одни и те же ЛФ, записанные в различных ФП, например в начальной и минимизированной, безусловно, есть близкими, т.е. могут быть включены в (3) в качестве вариантов F_{ik} для заданной ЛФ f_i.

В [3] с помощью ортофункционального Ф-преобразования ЛФ от n аргументов в специальные кусочно-постоянные функции одного аргумента разработана так называемая алгебраическая ФП (АФП) ЛФ, аргументы которой, как и в классической ФП (КФП), являются двоичными, т.е. принимают значения 0 и 1. Операциями в АФП, обеспечивающими ей полноту, т.е. возможность представлять любую двузначную (булеву) ЛФ, есть конъюнкции и операция алгебраического суммирования с положительными, отрицательными или нулевыми весовыми коэффициентами C_i.

Полнота АФП и одновременно изоморфизм между КФП и АФП вытекает из одинаковости правил формирования конъюнкций и изоморфизма между дизъюнкцией (в КФП) и алгебраической суммой (в АФП). Таким образом, если классической ЛФ f_1 соответствует кусочно-постоянная функция $F_1 (f_1 \sim F_1)$, а классической ЛФ f_2 — кусочно-постоянная функция $F_2 (f_2 \sim F_2)$, то операции дизъюнкции $f_1 \vee f_2$ соответствует алгебраическая сумма,

$$(f_1 \vee f_2) \sim (F_1 + F_2 - F_1 F_2),$$

и наоборот,

$$(C_1 F_1 + C_2 F_2 + C_3 F_1 F_2) \sim (f_1 \vee f_2)$$

при выборе коэффициентов $C_1 = C_2 = 1, C_3 = -1.$

В дальнейшем множество перспективных ФП ЛФ для реализации цифровых автоматов было расширено в результате использования ФП, состоящей из операций конъюнкции и суммы по mod2. В отечественной литературе эта ФП названа алгеброй Жегалкина, а в зарубежной — полиномами Рида—Мюллера (РМФП) [4]. Исходя из одинаковости двоичных аргументов x_i и правил формирования конъюнкций в КФП и РМФП, изоморфизм между этими ФП вытекает из следующих выражений при $f_1 \sim F_2$ и $f_2 \sim F_2$:

$$(f_1 \vee f_2) \sim F_1 \oplus F_2 \oplus F_1 F_2, F_1 \oplus F_2 \sim f_1 \overline{f_2} \vee \overline{f_1} f_2.$$

Следовательно, ЛФ в трех базовых формах — КФП, АФП и РМФП — согласно (2) являются близкими и могут быть представленны в виде

$$y_i = f_{ik} \vee F_{iA} \vee F_{iP},$$

где f_{ik} — заданная ЛФ в КФП; F_{iA}— та же ЛФ в АФП; F_{iP} — та же ЛФ в РМФП.

Таким образом, доказано, что любая ЛФ может быть реализованна в Р-форме.

Рассмотрим практическую целесообразность Р-реализации ЛФ. Определим количественную оценку выигрыша в показателях сложности реализации, которые могут быть получены при использовании наиболее простой из трех рассмотренных близких ФП. В качестве показателей сложности реализации ЛФ целесообразно использовать следующие величины:

S_{ad} — число слагаемых в записи ЛФ, определяющей число входов в той части программируемой логической матрицы, в которой формируются дизъюнкции;

S_S — габаритная площадь полуматрицы формирования конъюнкций программируемой логической матрицы;

S_L — число букв в минимизированной дизъюнктивной нормальной форме ЛФ [4].

Результаты анализа минимальных форм ЛФ [4] в диапазоне $n = [2 \dots 4]$ свидетельствуют о том, что в значительной части практических случаев

Таблица 1

x_i	Удельный вес ЛФ, оптимальных в различных ФП, %								
	S_S			S_L			S_{ad}		
	КФП	АФП	РМФП	КФП	АФП	РМФП	КФП	АФП	РМФП
2	12,5	87,5	100	87,5	87,5	75	100	87,5	100
3	19,5	75,4	81	35	55	48	86	50	62
4	1,9	60,9	67,8	36	48	40	93	10	23

Таблица 2

Множество ЛФ	Соотношение оптимальных ФП ЛФ в множествах					
	S_S		S_{ad}		S_L	
	АФП/КФП	РМФП/КФП	АФП/КФП	РМФП/КФП	АФП/КФП	РМФП/КФП
L (2)	7	8	0, 875	1	1	0, 857
L (3)	3,87	4,15	0,58	0,72	1,57	1,37
L (4)	30,5	34	0,11	0,25	1,33	1,11

альтернативные ФП, к которым относятся АФП и РМФП, имеют значительное преимущество по сравнению с КФП, что особенно существенно проявляется для показателей S_S.

Числовые значения, определяющие фактическое преимущество альтернативных ФП, приведены в табл. 1, из которой видно, что использование оптимальной Р-реализации ЛФ на основе изоморфизма между близкими ФП может обеспечить значительное уменьшение аппаратурных затрат по сравнению с реализацией ЛФ на основе только одной КФП.

Данные, приведенные в табл. 2, свидетельствуют о том, что Р-реализация на основе изоморфизма ФП ЛФ обеспечивает среднюю (по полному множеству L (n)) экономию затрат, вычисляемую для АФП по формуле

$$E = \frac{S_{SA}}{S_{SK}} 100\,\%, \tag{4}$$

для РМФП по формуле

$$E = \frac{S_{SRM}}{S_{SK}} 100\,\%, \tag{5}$$

где S_{SA} — суммарное значение S_S для полного множества АФП; S_{SRM} — суммарное значение S_S для полного множества РМФП; S_{SK} — суммарное значение S_S для полного множества КФП. Использовав формулы (4), (5), получаем примеры наиболее эффективного использования Р-реализации:

в РМФП S_S = 55 % для L (2);

в АФП S_S = 48,90 % для L (3);

в РМФП S_S = 64,45 % для L (4).

Выводы

1. Любая ЛФ может быть реализована в Р-форме (3).
2. Использование в Р-реализации альтернативных форм представления ЛФ обеспечивает существенное уменьшение аппаратурных затрат при реализации ЛФ.

This work is an extension of [1] and presents a proof that the «cognate-realization» is possible for arbitrary logical functions, and it is generalization of the currently known forms of representation, which allows one to reduce the hardware expenses at the stage the logical design of digital devices.

1. *Кочкарев Ю. А., Кущ С. А.* Представление и реализация логических функций в родственной форме//Электрон. моделирование.— Киев.— 2011.—**33**, №6.— С. 78—80.
2. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике для инженеров и научных работников. — М. : Наука, 1974. — 832 с.
3. *Кочкарев Ю. А.* Теория, техническая реализация и использование ортогонального уплотнения информации в вычислительных устройствах: Автореф. дис. … д-ра техн. наук// ТРТИ им. В.Д. Калмыкова. — Таганрог, 1983.
4. *Кочкарев Ю. А., Казаринова Н. Л., Пантелеева Н. Н., Шакун С. А.* Каталог-справочник «Классические и альтернативные минимальные формы логических функций». — Черкассы : Черкасский ин-т управления, 1999. — 195 с.

Поступила 06.03.12

КОЧКАРЕВ Юрий Александрович, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой компьютерных систем, профессор кафедры информатики и информационной безопасности Черкасского государственного технологического университета. В 1959 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — усовершенствование структуры цифровых узлов и блоков на основе альтернативных форм представления логических функций; технические программные средства защиты материальной и интеллектуальной собственности предприятий.

КУЩ Сергей Александрович, ассистент кафедры информатики и информационной безопасности Черкасского государственного технологического университета, который окончил в 2008 г. Область научных исследований — разработка цифровых блоков и улучшение их параметров с помощью альтернативных форм представления логических функций.