УДК 519.216

И. П. Атаманюк, канд. техн. наук
Николаевский государственный аграрный университет
(Украина, 54010, Николаев, ул. Парижской коммуны, 9,
тел. (098) 7971234, e-mail: atamanyuk_igor@mail.ru),
Ю.П. Кондратенко, д-р техн. наук
Черноморский государственный университет им. Петра Могилы
(Украина, 54003, Николаев, ул. 68 десантников, 10,
тел. (0512) 765572, e-mail: y_kondratenko@rambler.ru)

Алгоритм оптимальной нелинейной экстраполяции зашумленной случайной последовательности *

С использованием канонических разложений разработан алгоритм оптимальной нелинейной экстраполяции случайной последовательности при условии, что измерения выполнены с погрешностью.

З використанням канонічних розкладів розроблено алгоритм оптимальної нелінійної екстраполяції випадкової послідовності за умови, що вимірювання виконано з похибкою.

Ключевые слова: случайная последовательность, каноническое разложение, экстраполяция.

Решение многих задач управления связано с необходимостью прогнозирования будущего состояния объекта управления на основе известных данных о его настоящем и прошлом состояниях. Значительное число прикладных задач прогнозирования приходится решать в условиях, когда гарантированная точность результата и минимум вычислений имеют определяющее значение, однако уже известны накопленные статистические данные. К числу таких задач в первую очередь следует отнести задачи межсамолетной навигации, где своевременность и точность прогноза позволяет предотвратить опасное развитие ситуации.

Не менее важна задача организации испытаний сложных технических объектов на надежность, когда использование накопленной информации для прогноза позволяет сократить дорогостоящий процесс испытаний и существенно повысить достоверность его результатов (аналогичные задачи возникают в медицинской диагностике и др.).

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки, молодежи и спорта Украины. Государственный регистрационный номер 0110U001832.

Изложенное определяет правомерность постановки и исследования задачи в рамках дедуктивного направления как задачи экстраполяции некоторой конкретной реализации случайной последовательности за пределы интервала ее наблюдения. Впервые задача экстраполяции в такой постановке решена в работах [1, 2] для стационарных случайных последовательностей. Затем полученное решение было преобразовано в стройную теорию линейной экстраполяции [3]. Однако присущие ему недостатки — ограничение класса исследуемых последовательностей стационарными и вычислительные сложности (так как оно получено в спектральных терминах) — ограничили область его практического применения.

Существенный прорыв в теории линейной экстраполяции представляет собой фильтр Калмана—Бюси [4], позволивший отказаться от требования стационарности и организовать процесс вычислений в наиболее удобной рекуррентной форме. Указанные преимущества обеспечили фильтрам Калмана—Бюси широчайшее практическое применение [3, 5], однако выяснилось, что и этот мощный аппарат имеет определенные ограничения, а именно: в его основе лежит предположение о том, что исследуемая последовательность порождается линейной динамической системой, возбуждаемой белым шумом, т.е. является марковской.

Поскольку реальные последовательности, как правило, обладают значительным последействием, возникла необходимость освободиться и от этих ограничений. Одно из удовлетворяющих этому требованию решений получено в [6] в предположении, что исследуемая случайная последовательность задана своим каноническим разложением [7]. Его универсальность определяется тем, что каноническое разложение существует и точно описывает в исследуемом ряде точек любую случайную последовательность с конечной дисперсией. Однако данное решение является оптимальным только в рамках линейных (корреляционных) связей.

Наиболее общей формулой для решения задач нелинейного прогнозирования является полином Колмогорова—Габора, который позволяет учесть произвольное число измерений случайной последовательности и порядок нелинейности. Однако его практическое использование ограничено в связи с существенными трудностями определения параметров экстраполятора (например, для 12 измерений и четвертого порядка нелинейности необходимо получить 1819 выражений частных производных среднего квадрата погрешности экстраполяции). Таким образом, несмотря на указанное разнообразие решений, потребность в быстродействующих, робастных и максимально точных алгоритмах и устройствах прогноза остается весьма актуальной.

Постановка задачи. Предположим, что в результате предварительных экспериментальных исследований для моментов времени t_i, $i=\overline{1,I}$ (необязательно с постоянным шагом дискретности), получено множество реализаций некоторой случайной последовательности $\{X\}$. На основе данной информации по известным формулам математической статистики определены дискретизированные моментные функции

$$M\,[X^{\xi_l}(i-p_{l-1})\,X^{\xi_{l-1}}(i-p_{l-2})\ldots X^{\xi_2}(i-p_1)\,X^{\xi_1}(i)],$$

$$\sum_{j=1}^{l}\xi_j \le L,\quad p_j=\overline{1,\,i-1},\;\; i=\overline{1,\,I}.$$

Случайная последовательность описывает, например в исследуемом ряде точек t_i, $i=\overline{1,\,I}$, изменение параметра некоторого технического объекта. В процессе эксплуатации контролируемый параметр измеряется с некоторой погрешностью и в результате наблюдается случайная последовательность $\{Z\}$:

$$Z(\omega,t_i)=X(\omega,t_i)+Y(\omega,t_i),\; i=\overline{1,\,I}, \tag{1}$$

где ω — элементарное событие, принадлежащее некоторой области Ω; $Y(\omega,t_i)$ — случайная последовательность погрешностей измерения. Тогда

$$M\,[Y^{\xi_l}(i-p_{l-1})\,Y^{\xi_{l-1}}(i-p_{l-2})\ldots Y^{\xi_2}(i-p_1)\,Y^{\xi_1}(i)],$$

$$\sum_{j=1}^{l}\xi_j \le L,\;\; p_j=\overline{1,\,i-1},\;\; i=\overline{1,\,I}.$$

Положим, что в результате ряда последовательных измерений получены $k<I$ первых значений $Z(\nu)=z(\nu)$, $\nu=\overline{1,\,k}$, конкретной реализации последовательности $\{Z\}$. На основе этой информации и указанных ранее априорных сведений требуется получить оптимальную в среднеквадратическом смысле нелинейную оценку $\hat{X}(i)$, $i=\overline{k+1,\,I}$, будущих значений соответствующей реализации ненаблюдаемой случайной последовательности $\{X\}$.

На класс прогнозируемых последовательностей накладывается только ограничение конечности дисперсии.

Решение. Наиболее универсальное решение задачи нелинейного прогнозирования относительно ограничений, накладываемых на исследуемую случайную последовательность $\{X\}$, получено в [8] при условии, что измерения $z(\nu)$, $\nu=\overline{1,\,k}$, не содержат погрешностей ($z(\nu)=x(\nu)$, $\nu=\overline{1,k}$):

$$m_x^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n,\,\nu)}(b_1\ldots b_{m-1};a_1\ldots a_m,i)=$$

$$
=\begin{cases}
M\,[X^{a_m}(i-b_{m-1})\ldots X^{a_1}(i)],\ v=0,\\
m_x^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n,\,v)}(b_1\ldots b_{m-1};a_1\ldots a_m,v)]+[x^{a_n}(v-\beta_{n-1})\ldots x^{\alpha_1}(v)-\\
-m_x^{(\beta_1^*\ldots\beta_{n-1}^*;\,\alpha_1^*\ldots\alpha_n^*,\,v)}(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\alpha_1\ldots\alpha_n,v)]\,\varphi_{\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(v,i),\\
\text{если } \beta_1^*\ldots\beta_{n-1}^*;\alpha_1^*\ldots\alpha_n^*\neq 0,\\
m_x^{(p_1'^{(n-1)}\ldots p_{n-2}'^{(n-1)};\,\xi_1'^{(n-1)}\ldots\xi_{n-1}'^{(n-1)},\,v)}(b_1\ldots b_{m-1};a_1\ldots a_m,i)+[x^{a_n}(v-\beta_{n-1})\ldots x^{\alpha_1}(v)-\\
-m_x^{(p_1'^{(n-1)}\ldots p_{n-2}'^{(n-1)};\,\xi_1'^{(n-1)}\ldots\xi_{n-1}'^{(n-1)},\,v)}(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\alpha_1\ldots\alpha_n,v)]\,\varphi_{\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(v,i),\\
\text{если } \beta_1^*\ldots\beta_{n-1}^*;\alpha_1^*\ldots\alpha_n^*=0.
\end{cases}\qquad(2)
$$

Выражение

$$
m_x^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n,\,v)}(b_1\ldots b_{m-1};a_1\ldots a_m,i)=
$$

$$
=M\,[X^{a_m}(i-b_{m-1})\ldots X^{a_1}(i)/x^{\xi_1^{(1)}}(1),\ldots,x^{\xi_1^{(1)}}(v),
$$

где $\xi_1^{(1)}=\overline{1,L}$; $x^{\xi_l^{(l)}}(j-p_{l-1}^{(l)})\ldots x^{\xi_1^{(1)}}(j)$, $j=\overline{2,v-1}$, $l=\overline{2,M(j)}$; $x^{\xi_l^{(l)}}(v-p_{l-1}^{(l)})\ldots$ $\ldots x^{\xi_1^{(1)}}(v)$, $l=\overline{2,n-1}$, $p_1^{(l)}=\overline{1,p_1'^{(l)}},\ldots,p_{l-1}^{(l)}=\overline{p_{1-2}^{(l)}+1,p_{l-1}'^{(l)}}$; $\xi_1^{(l)}=\overline{1,\xi_1'^{(l)}},\ldots\,\xi_l^{(l)}=$ $=\overline{1,\xi_l'^{(l)}}$; $x^{\xi_n^{(n)}}(v-p_{n-1}^{(n)})\ldots x^{\xi_1^{(n)}}(v)$, $p_1^{(n)}=\overline{1,p_1^{*(n)}},\ldots,p_{n-1}^{(n)}=\overline{p_{n-2}^{(n)}+1,p_{n-1}^{*(l)}}$; $\xi_1^{(n)}=$ $=\overline{1,\xi_1^{*(n)}},\ldots,\xi_n^{(n)}=\overline{1,\xi_n^{*(n)}}$; $x^{\alpha_n}(v-\beta_{n-1})\ldots x^{\alpha_1}(v)]$ для $\beta_1=p_1'^{(N)},\ldots,\beta_{L-1}=p_{L-1}'^{(L)}$; $\alpha_1=\xi_1'^{(L)},\ldots,\alpha_L=\xi_L'^{(L)}$ и $m=1$, $\alpha_1=1$, является условным математическим ожиданием исследуемой случайной последовательности $\{X\}$ при условии, что в дискретном ряде точек t_j, $j=\overline{1,v}$, случайная последовательность принимает фиксированные значения $X(j)=x(j)$, $j=\overline{1,v}$.

Алгоритм (2) основан на каноническом разложении [9] прогнозируемой последовательности:

$$
X(i)=M\,[X(i)]+\sum_{v=1}^{i}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}V_{\xi_1^{(1)}}(v)\,\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(l)}(v,i)+\sum_{v=2}^{i}\sum_{l=2}^{M(v)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots
$$

$$
\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}V_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(v)\,\varphi_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(l)}(v,i),\ i=\overline{1,I}.\qquad(3)
$$

где

$$M(\nu)=\begin{cases}\nu, \text{ если } \nu<L;\\ L, \text{ если } \nu\ge L;\end{cases}$$

$$p'^{(l)}_j=\begin{cases}0, \quad \text{если } j\ne\overline{1,l-1} \text{ или } l=1;\\ \nu-l+j, \text{ если } j=\overline{1,\,l-1},\, l>1;\end{cases}$$

$$\xi'^{(l)}_\mu=L-l+\mu-\sum_{j=1}^{\mu-1}\xi_j^{(l)},\ \ \mu=\overline{1,l}.$$

Случайные коэффициенты канонического представления (3) определяются соотношениями

$$V_{\alpha_1}(\nu)=X^{\alpha_1}(\nu)-M[X^{\alpha_1}(\nu)]-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}V_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\,\varphi^{(1)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda,\nu)-$$

$$-\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1-1}V_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\,\varphi^{(\alpha_1)}_{\xi_1^{(1)}}(\nu,\nu)-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p'^{(l)}_1}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p'^{(l)}_{l-1}}\ \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi'^{(l)}_1}\ldots$$

$$\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi'^{(l)}_l}V_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\,\varphi^{(\alpha_1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda,\nu),\ \ \nu=\overline{1,I};$$

$$V_{\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n}(\nu)=M\,[X^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\ldots X^{\alpha_1}(\nu)]-$$

$$-M\,[X^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\ldots X^{\alpha_1}(\nu)]-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}V_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\,\varphi^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda,\nu)-$$

$$-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p'^{(l)}_1}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p'^{(l)}_{l-1}}\ \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi'^{(l)}_1}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi'^{(l)}_l}V_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\,\varphi^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda,\nu)-$$

$$-\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p'^{(l)}_1}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p'^{(l)}_{l-1}}\ \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi'^{(l)}_1}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi'^{(l)}_l}V_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu)\,\varphi^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu,\nu)-$$

$$-\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}}\ldots\sum_{p_{n-1}^{(n)}=p_{n-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}}\ \sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}}\ldots\sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}}V_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu)\,\varphi^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu,\nu),\ \nu=\overline{1,I},$$

где

$$p_{\mu}^{*(n)}=\begin{cases}\beta_{\mu}^{*}, & \text{если } \mu=1 \text{ или } p_{\mu-1}^{(n)}=\beta_{\mu-1}^{*},\ \mu=\overline{2,n},\\ v-n+\mu, & \text{если } p_{\mu-1}^{(n)}\neq\beta_{\mu-1}^{*},\ \mu=\overline{2,n};\end{cases}$$

$$\xi_{i}^{*(n)}=\begin{cases}\alpha_{i}^{*}, & \text{если } i=1 \text{ или } \xi_{i-1}^{(n)}=\alpha_{i-1}^{*},\ i=\overline{2,n};\\ N-n+i-\sum_{j=1}^{i-1}\xi_{j}^{(n)}, & \text{если } \xi_{i-1}^{(n)}\neq\alpha_{i-1}^{*},\ i=\overline{2,n}.\end{cases}$$

Значения β_{μ}^{*}, $\mu=\overline{1,n-1}$, и α_{i}^{*}, $i=\overline{1,n}$, являются индексами случайного коэффициента $V_{\beta_1^*\ldots\beta_{n-1}^*;\,\alpha_1^*\ldots\alpha_n^*}(v)$, который предшествует $V_{\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n}(v)$ в каноническом разложении (3) для момента времени t_v:

1) $\beta_{\mu}^{*}=\beta_{\mu}$, $\mu=\overline{1,n-1}$, $\alpha_{i}^{*}=\alpha_{i}$, $i=\overline{1,k-1}$, $\alpha_{k}^{*}=\alpha_{k}-1$, $\alpha_{j}^{*}=L-n+j-\sum_{m=1}^{j-1}\alpha_{m}^{*}$, $j=\overline{k+1}$, если $\alpha_{k}>1$, $\alpha_{j}=1$, $j=\overline{k+1,n}$;

2) $\beta_{\mu}^{*}=\beta_{\mu}$, $\mu=\overline{1,k-1}$, $\beta_{k}^{*}=\beta_{k}-1$, $\beta_{j}^{*}=v-n+j$, $j=\overline{k+1,n-1}$, $\alpha_{i}^{*}=L-n+i-\sum_{m=1}^{j-1}\alpha_{m}^{*}$, $i=\overline{1,n}$, если $\alpha_{i}=1$, $i=\overline{1,n}$, $\beta_{k}>\beta_{k-1}+1$, $\beta_{j}=\beta_{j-1}+1$, $j=\overline{k+1,n-1}$;

3) $\beta_{\mu}^{*}=0$, $\alpha_{i}^{*}=0$, $V_{\beta_1^*\ldots\beta_{n-1}^*;\,\alpha_1^*\ldots\alpha_n^*}(v)=0$, если $\beta_{\mu}=\mu$, $\mu=\overline{1,n-1}$, $\alpha_{i}=1$, $i=\overline{1,n}$.

Выражения для определения дисперсий случайных коэффициентов имеют следующий вид:

$$D_{\alpha_1}(v)=M[X^{2\alpha_1}(v)]-M^2[X^{\alpha_1}(v)]-\sum_{\lambda=1}^{v-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\{\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,v)\}^2-$$

$$-\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1-1}D_{\xi_1^{(1)}}(v)\{\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(v,v)\}^2-\sum_{\lambda=2}^{v-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\{\varphi_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,v)\}^2,\quad v=\overline{1,I};$$

$$D_{\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n}(v)=M[X^{2\alpha_n}(v-\beta_{n-1})\ldots X^{2\alpha_1}(v)]-$$

$$-M^2[X^{\alpha_n}(v-\beta_{n-1})\ldots X^{\alpha_1}(v)]-\sum_{\lambda=1}^{v-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\{\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}(\lambda,v)\}^2-$$

$$-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\dots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\dots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\{\varphi_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n)}(\lambda,\nu)\}^2-$$

$$-\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\dots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\dots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}(\nu)\{\varphi_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n)}(\nu,\nu)\}^2-$$

$$-\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}}\dots\sum_{p_{l-1}^{(n)}=p_{l-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}}\sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}}\dots\sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}}D_{p_1^{(n)}\dots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\dots\xi_n^{(n)}}(\nu)\{\varphi_{p_1^{(n)}\dots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\dots\xi_n^{(n)}}^{(\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n)}(\nu,\nu)\}^2,$$

$$\nu=\overline{1,I}.$$

Координатные функции канонического разложения (3) определяются соотношениями

$$\varphi_{\alpha_1}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\nu,i)=M[X^{\alpha_1}(\nu)X^{a_m}(i-b_{m-1})\dots X^{a_1}(i)]-$$

$$-M[X^{\alpha_1}(\nu)]M[X^{a_m}(i-b_{m-1})\dots X^{a_1}(i)]-$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,\nu)\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\lambda,i)-$$

$$-\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1-1}D_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(\nu,\nu)\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\nu,i)-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\dots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}}^{\xi_1'^{(l)}}\dots$$

$$\dots\sum_{\xi_l^{(l)}}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\varphi_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,\nu)\varphi_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\lambda,\nu),\ \nu=\overline{1,I};$$

$$\varphi_{\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\nu,i)=\frac{1}{D_{\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n}}\{M[X^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\dots$$

$$\dots X^{\alpha_1}(\nu)X^{a_m}(i-b_{m-1})\dots X^{a_1}(i)]-$$

$$-M[X^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\dots X^{\alpha_1}(\nu)]M[X^{a_m}(i-b_{m-1})\dots X^{a_1}(i)]-$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{K}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,\nu)\varphi_{\xi_1^{(1)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\lambda,i)-$$

$$-\sum_{\lambda=2}^{v-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\times$$

$$\times\varphi_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}(\lambda,v)\,\varphi_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(\lambda,i)-\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(v)\,\varphi_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}(v,v)\,\varphi_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(v,i)-$$

$$-\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(n)}=p_{l-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}}\sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}}\ldots\sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}} D_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(v)\times$$

$$\times\varphi_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}(v,v)\,\varphi_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(v,i)\},\ \ v=\overline{I}.$$

Существенным ограничением алгоритма (2) является предположение о том, что измеренные значения $x(\mu)$, $\mu=\overline{1,k}$, известны абсолютно точно. Очевидно, что в реальных ситуациях это предположение никогда не выполняется и возникает задача модификации алгоритма (2) для устранения указанного недостатка.

Введем в рассмотрение «смешанную» случайную последовательность $\{X'\}=\{Z(1), Z(2),\ldots,Z(k), X(k+1),\ldots,X(I)\}$, сочетающую в себе результаты измерений до $i=k$ и данные о последовательности $\{X\}$ при $i=\overline{k+1,I}$. Для этой последовательности нелинейное каноническое разложение имеет вид

$$X'(i)=M[X'(i)]+\sum_{v=1}^{i}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(v)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(1)}(v,i)+\sum_{v=2}^{i}\sum_{l=2}^{M(v)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(v)\,\gamma_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(1)}(v,i),\ \ i=\overline{1,I}. \qquad (4)$$

Коэффициенты разложения (4) определяются из выражений

$$W_{\alpha_1}(v)=Z^{\alpha_1}(v)-M[Z^{\alpha_1}(v)]-\sum_{\lambda=1}^{v-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(1)}(\lambda,v)-$$

$$-\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1-1} W_{\xi_1^{(1)}}(v)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(v,v)\ -\sum_{\lambda=2}^{v-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots \sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\lambda)\, \gamma^{(\alpha_1)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\lambda, \nu), \quad \nu = \overline{1, k};$$

$$W_{\alpha_1}(\nu) = X^{\alpha_1}(\nu) - M[X^{\alpha_1}(\nu)] - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\, \gamma^{(1)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda, \nu) -$$

$$- \sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1 - 1} W_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\, \gamma^{(\alpha_1)}_{\xi_1^{(1)}}(\nu, \nu) - \sum_{\lambda=2}^{\nu-1} \sum_{l=2}^{M(\lambda)} \sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}} \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}} \ldots$$

$$\ldots \sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\lambda)\, \gamma^{(\alpha_1)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\lambda, \nu), \quad \nu = \overline{k+1, I};$$

$$W_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n}(\nu) = M\,[Z^{\alpha_n}(\nu - \beta_{n-1}) \ldots Z^{\alpha_1}(\nu)] - M\,[Z^{\alpha_n}(\nu - \beta_{n-1}) \ldots Z^{\alpha_1}(\nu)] -$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\, \gamma^{(\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda, \nu) -$$

$$- \sum_{\lambda=2}^{\nu-1} \sum_{l=2}^{M(\lambda)} \sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}} \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}} \ldots \sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\lambda)\, \gamma^{(\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\lambda, \nu) -$$

$$- \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}} \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}} \ldots \sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\nu)\, \gamma^{(\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\nu, \nu) -$$

$$- \sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}} \ldots \sum_{p_{n-1}^{(n)}=p_{n-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}} \sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}} \ldots \sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}} W_{p_1^{(n)} \ldots p_{n-1}^{(n)};\, \xi_1^{(n)} \ldots \xi_n^{(n)}}(\nu)\, \gamma^{(\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}_{p_1^{(n)} \ldots p_{n-1}^{(n)};\, \xi_1^{(n)} \ldots \xi_n^{(n)}}(\nu, \nu), \; \nu = \overline{1, k};$$

$$W_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n}(\nu) = M[X^{\alpha_n}(\nu - \beta_{n-1}) \ldots X^{\alpha_1}(\nu)] - M[X^{\alpha_n}(\nu - \beta_{n-1}) \ldots X^{\alpha_1}(\nu)] -$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\, \gamma^{(\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda, \nu) -$$

$$- \sum_{\lambda=2}^{\nu-1} \sum_{l=2}^{M(\lambda)} \sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}} \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}} \ldots \sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\lambda)\, \gamma^{(\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\lambda, \nu) -$$

$$- \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}} \ldots \sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}} \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}} \ldots \sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\nu)\, \gamma^{(\beta_1 \ldots \beta_{n-1};\, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}_{p_1^{(l)} \ldots p_{l-1}^{(l)};\, \xi_1^{(l)} \ldots \xi_l^{(l)}}(\nu, \nu) -$$

$$-\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}}\ldots\sum_{p_{n-1}^{(n)}=p_{n-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}}\sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}}\ldots\sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}}W_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu)\,\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu,\nu),$$

$$\nu=\overline{k+1,I}.$$

Соотношения для определения дисперсий случайных коэффициентов имеют следующий вид:

$$D_{\alpha_1}(\nu)=M[Z^{2\alpha_1}(\nu)]-M^2[Z^{\alpha_1}(\nu)]-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\{\gamma^{(\alpha_1)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda,\nu)\}^2-$$

$$-\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1-1}D_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\{\gamma^{(\alpha_1)}_{\xi_1^{(1)}}(\nu,\nu)\}^2-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\{\gamma^{(\alpha_1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda,\nu)\}^2,\ \ \nu=\overline{1,k};$$

$$D_{\alpha_1}(\nu)=M[X^{2\alpha_1}(\nu)]-M^2[X^{\alpha_1}(\nu)]-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{K}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\{\gamma^{(\alpha_1)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda,\nu)\}^2-$$

$$-\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1-1}D_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\{\gamma^{(\alpha_1)}_{\xi_1^{(1)}}(\nu,\nu)\}^2-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\{\gamma^{(\alpha_1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda,\nu)\}^2,\ \ \nu=\overline{k+1,I};$$

$$D_{\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n}(\nu)=M[Z^{2\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\ldots Z^{2\alpha_1}(\nu)]-M^2[Z^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\ldots$$

$$\ldots Z^{\alpha_1}(\nu)]-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\{\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda,\nu)\}^2-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\{\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda,\nu)\}^2-$$

$$-\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu)\{\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu,\nu)\}^2-$$

$$-\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}}\ldots\sum_{p_{n-1}^{(n)}=p_{n-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}}\sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}}\ldots\sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}}D_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu)\{\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu,\nu)\}^2,$$

$$\nu=\overline{1,k};$$

$$D_{\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n}(\nu)=M[X^{2\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\ldots X^{2\alpha_1}(\nu)]-M^2[X^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\ldots$$

$$\ldots X^{\alpha_1}(\nu)]-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\{\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda,\nu)\}^2-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\{\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda,\nu)\}^2-$$

$$-\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu)\{\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu,\nu)\}^2-$$

$$-\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(n)}=p_{l-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}}\sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}}\ldots\sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}}D_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu)\{\gamma^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu,\nu)\}^2,$$

$$\nu=\overline{k+1,I}.$$

Координатные функции канонического разложения (4) определяются с помощью выражений

$$\gamma^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}_{\alpha_1}(\nu,i)=M\,[Z^{\alpha_1}(\nu)Z^{a_m}(i-b_{m-1})\ldots Z^{a_1}(i)]-$$

$$-M\,[Z^{\alpha_1}(\nu)]\,M\,[Z^{a_m}(i-b_{m-1})\ldots X^{a_1}(i)]-$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\,\gamma^{(\alpha_1)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda,\nu)\,\gamma^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}_{\xi_1^{(1)}}(\lambda,i)-$$

$$-\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1-1}D_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\,\gamma^{(\alpha_1)}_{\xi_1^{(1)}}(\nu,\nu)\,\gamma^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}_{\xi_1^{(1)}}(\nu,i)-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}}^{\xi_l'^{(l)}}D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\,\gamma^{(\alpha_1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda,\nu)\,\gamma^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda,\nu),\ \nu,i\le k;$$

$$\gamma^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}_{\alpha_1}(\nu,i)=M\,[Z^{\alpha_1}(\nu)\,X^{a_m}(i-b_{m-1})\ldots X^{a_1}(i)]-$$

$$-M\,[Z^{\alpha_1}(\nu)]\,M\,[X^{a_m}(i-b_{m-1})\ldots X^{a_1}(i)]-$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,\nu)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\lambda,i)-$$

$$-\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{\alpha_1-1} D_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(\nu,\nu)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\nu,i)-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\dots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}}^{\xi_1'^{(l)}}\dots$$

$$\dots\sum_{\xi_l^{(l)}}^{\xi_l'^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\,\gamma_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,\nu)\,\gamma_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\lambda,\nu),$$

$$\nu\le k,\quad i-b_{m-1}>k;$$

$$\gamma_{\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\nu,i)=$$

$$=\frac{1}{D_{\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n}}\{M[Z^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\dots Z^{\alpha_1}(\nu)\,Z^{a_m}(i-b_{m-1})\dots Z^{a_1}(i)]-$$

$$-M[Z^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\dots Z^{\alpha_1}(\nu)]\,M[Z^{a_m}(i-b_{m-1})\dots Z^{a_1}(i)]-$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,\nu)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\lambda,i)-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\dots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\dots$$

$$\dots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\,\gamma_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n)}(\lambda,\nu)\,\gamma_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\lambda,i)-\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\dots$$

$$\dots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\dots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}(\nu)\,\gamma_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n)}(\nu,\nu)\times$$

$$\times\gamma_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\nu,i)-\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}}\dots\sum_{p_{l-1}^{(n)}=p_{l-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}}\sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}}\dots\sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}} D_{p_1^{(n)}\dots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\dots\xi_n^{(n)}}(\nu)\times$$

$$\times\gamma_{p_1^{(n)}\dots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\dots\xi_n^{(n)}}^{(\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n)}(\nu,\nu)\,\gamma_{p_1^{(n)}\dots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\dots\xi_n^{(n)}}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\nu,i)\},\quad \nu,i\le k;$$

$$\gamma_{\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n}^{(b_1\dots b_{m-1};\,a_1\dots a_m)}(\nu,i)=$$

$$=\frac{1}{D_{\beta_1\dots\beta_{n-1};\,\alpha_1\dots\alpha_n}}\{M[Z^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\dots Z^{\alpha_1}(\nu)\,X^{a_m}(i-b_{m-1})\dots X^{a_1}(i)]-$$

$$-M[Z^{a_n}(\nu-\beta_{n-1})\dots Z^{\alpha_1}(\nu)]\,M[X^{a_m}(i-b_{m-1})\dots X^{a_1}(i)]-$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} D_{\xi_1^{(1)}}(\lambda)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(\alpha_1)}(\lambda,\nu)\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(\lambda,i)-\sum_{\lambda=2}^{\nu-1}\sum_{l=2}^{M(\lambda)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\lambda)\,\gamma_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}(\lambda,\nu)\,\gamma_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(\lambda,i)-\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu)\,\gamma_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}(\nu,\nu)\times$$

$$\times\gamma_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(\nu,i)-\sum_{p_1^{(n)}=1}^{p_1^{*(n)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(n)}=p_{l-2}^{(n)}+1}^{p_{n-1}^{*(n)}}\sum_{\xi_1^{(n)}=1}^{\xi_1^{*(n)}}\ldots$$

$$\ldots\sum_{\xi_n^{(n)}=1}^{\xi_n^{*(n)}} D_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}(\nu)\,\gamma_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}^{(\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n)}(\nu,\nu)\,\gamma_{p_1^{(n)}\ldots p_{n-1}^{(n)};\,\xi_1^{(n)}\ldots\xi_n^{(n)}}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(\nu,i)\},$$

$$\nu\le k,\;\; i-b_{m-1}>k.$$

Каноническое разложение (4) точно описывает значения последовательности $\{X'\}$ в исследуемом ряде точек t_i, $i=\overline{1,I}$, и обеспечивает минимум среднего квадрата приближения в промежутках между ними. В разложении (4) присутствует конечное число убывающих по абсолютному значению элементов, ограниченное числом точек дискретности и старшим порядком нелинейной связи. Поэтому классическая проблема моментов [10] для канонического представления (4) отсутствует. Единственным ограничением разложения (4) является конечность дисперсии случайной последовательности [7], что для реальных физических последовательностей, как правило, выполняется.

Предположим, что в результате измерения известно значение $z(1)$ последовательности $\{X'\}$ в точке t_1 и, следовательно, известны значения коэффициентов $W_{\xi_1^{(1)}}(1)=w_{\xi_1^{(1)}}(1)$ и $\xi_1^{(1)}=\overline{1,L}$. Тогда

$$w_{\xi_1^{(1)}}(1)=z^{\xi_1^{(1)}}(1)-M[Z^{\xi_1^{(1)}}(1)]-\sum_{j=1}^{\xi_1^{(1)}-1}\gamma_j^{(\xi_1^{(1)})}(1,1)\,w_j(1).$$

Подстановка $w_1(1)$ в (4) позволяет получить каноническое разложение апостериорной случайной последовательности $X'(i/z(1))$ в точках t_i, $i=\overline{k+1,I}$:

$$X(i/z(1))=M[X(i)]+(z(1)-M[Z(1)])\,\gamma_1^{(1)}(1,i)+$$

$$+\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(1)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(1)}(1,i)+\sum_{\nu=2}^{i}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(1)}(\nu,i)+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{i}\sum_{l=2}^{M(\nu)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu)\,\gamma^{(1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu,i),$$

$$i=\overline{k+1,I}. \qquad (5)$$

В результате применения к (5) операции математического ожидания получаем оптимальную по критерию минимума среднего квадрата ошибки экстраполяции оценку будущих значений последовательности $\{X\}$ при условии, что для ее определения используется одно значение $z(1)$:

$$m_z^{(1;1)}(1,i)=M\,[X'(i/z(1))]=M\,[X(i)]+(z(1)-M\,[Z(1)])\,\gamma_1^{(1)}(1,i). \qquad (6)$$

Учитывая, что координатные функции $\gamma_{\beta_1\ldots\beta_{n-1};\,\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(\nu,i)$ определяются из условия минимума среднего квадрата ошибки приближения в промежутках между произвольными значениями $Z^{\alpha_n}(\nu-\beta_{n-1})\ldots Z^{\alpha_1}(\nu)$ и $X^{a_m}(i-b_{m-1})\ldots X^{a_1}(i)$, выражение (6) можно обобщить на случай прогнозирования $x^{a_m}(i-b_{m-1})\ldots x^{a_1}(i)$:

$$m_{x/z}^{(1;1)}(b_1\ldots b_{m-1};a_1\ldots a_m,i)=M[X(i)+(z(1)-M[Z(1)]\,\gamma_1^{(b_1\ldots b_{m-1};\,a_1\ldots a_m)}(1,i)\,. \qquad (7)$$

В результате измерения $z(1)$ можно также определить значение $w_2 = = z^2(1)-(z(1)-M\,[Z(1)]\,\gamma_1^{(2)}(1,1)$ в разложении (5):

$$X'(i/z(1),z^2(1))=M\,[X(i)]+(z(1)-M\,[Z(1)])\,\gamma_1^{(1)}(1,i)+$$

$$+[z^2(1)+(z(1)-M\,[Z(1)])\,\gamma_1^{(2)}(1,1)]\,\gamma_1^{(1)}(1,i)+$$

$$+\sum_{\xi_1^{(1)}=3}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(1)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(1)}(1,i)+\sum_{\nu=2}^{i}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L} W_{\xi_1^{(1)}}(\nu)\,\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(1)}(\nu,i)+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{i}\sum_{l=2}^{M(\nu)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\ldots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\ldots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} W_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu)\,\gamma^{(1)}_{p_1^{(l)}\ldots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\ldots\xi_l^{(l)}}(\nu,i),$$

$$i=\overline{k+1,I}.$$

Применив операцию математического ожидания к апостериорной последовательности $X'(i/z(1),z^2(1))$, с учетом выражения (7) получим алгоритм экстраполяции по двум значениям, $z(1),z^2(1)$:

$$m_{x/z}^{(2;1)}(b_1\ldots b_{m-1};a_1\ldots a_m,i)=$$

$$=m_z^{(1;1)}(b_1...b_{m-1};a_1...a_m,i)+(z^2(1)-m_z^{(1;1)}(2,1))\varphi_2^{(b_1...b_{m-1};a_1...a_m)}(1,i).$$

Обобщив найденную закономерность, запишем алгоритм прогноза для произвольного числа известных измерений:

$$m_x^{(\beta_1...\beta_{n-1};\alpha_1...\alpha_n,v)}(b_1...b_{m-1};a_1...a_m,i)=$$

$$=\begin{cases} M[X^{a_m}(i-b_{m-1})...X^{a_1}(i)],v=0, \\ m_z^{(\beta_1...\beta_{n-1};\alpha_1...\alpha_n,v)}(b_1...b_{m-1};a_1...a_m,i)+[z^{\alpha_n}(v-\beta_{n-1})...z^{\alpha_1}(v)- \\ -m_z^{(\beta_1^*...\beta_{n-1}^*;\alpha_1^*...\alpha_n^*,v)}(\beta_1...\beta_{n-1};\alpha_1...\alpha_n,v)]\gamma_{\beta_1...\beta_{n-1};\alpha_1...\alpha_n}^{(b_1...b_{m-1};a_1...a_m)}(v,i), \\ \text{если } \beta_1^*...\beta_{n-1}^*;\alpha_1^*...\alpha_n^*\neq 0, \\ m_z^{(p_1'^{(n-1)}...p_{n-2}'^{(n-1)};\xi_1'^{(n-1)}...\xi_{n-1}'^{(n-1)},v)}(b_1...b_{m-1};a_1...a_m,i)+[z^{\alpha_n}(v-\beta_{n-1})...z^{\alpha_1}(v)- \\ -m_z^{(p_1'^{(n-1)}...p_{n-2}'^{(n-1)};\xi_1'^{(n-1)}...\xi_{n-1}'^{(n-1)},v)}(\beta_1...\beta_{n-1};\alpha_1...\alpha_n,v)]\gamma_{\beta_1...\beta_{n-1};\alpha_1...\alpha_n}^{b_1...b_{m-1};a_1...a_m}(v,i), \\ \text{если } \beta_1^*...\beta_{n-1}^*;\alpha_1^*...\alpha_n^*=0. \end{cases} \quad (8)$$

Выражение

$$m_x^{(\beta_1...\beta_{n-1};\alpha_1...\alpha_n,v)}(b_1...b_{m-1};a_1...a_m,i)=$$
$$=M[X^{a_m}(i-b_{m-1})...X^{a_1}(i)/z^{\xi_1^{(1)}}(1),...,z^{\xi_1^{(1)}}(v),$$

где $\xi_1^{(1)}=\overline{1,N};\ z^{\xi_l^{(l)}}(j-p_{l-1}^{(l)})...z^{\xi_1^{(1)}}(j),\ j=\overline{2,v-1},\ l=\overline{2,M(j)};\ z^{\xi_l^{(l)}}(v-p_{l-1}^{l})...$ $...z^{\xi_1^{(1)}}(v),\ l=\overline{2,n-1};\ p_1^{(l)}=\overline{1,p_1'^{(l)}},...,p_{l-1}^{(l)}=\overline{p_{l-2}^{(l)}+1,p_{l-1}'^{(l)}};\ \xi_1^{(l)}=\overline{1,\xi_1'^{(l)}},...,\xi_l^{(l)}=$ $=\overline{1,\xi_l'^{(l)}};\ z^{\xi_n^{(n)}}(v-p_{n-1}^{(n)})...z^{\xi_1^{(n)}}(v),\ p_1^{(n)}=\overline{1,p_1^{*(n)}},\ ...,p_{n-1}^{(n)}=\overline{p_{n-2}^{(n)}+1,p_{n-1}^{*(l)}};\ \xi_1^{(n)}=$ $=\overline{1,\xi_1^{*(n)}},...,\xi_n^{(n)}=\overline{1,\xi_n^{*(n)}};\ z^{\alpha_n}(v-\beta_{n-1})...z^{\alpha_1}(v)]$ для $\beta_1=p_1'^{(L)},\ ...,\ \beta_{L-1}=p_{L-1}'^{(L)}$; $\alpha_1=\xi_1'^{(L)},\ ...,\ \alpha_L=\xi_L'^{(L)}$ и $m=1$, $a_1=1$, является условным математическим ожиданием исследуемой случайной последовательности $X'(i)=X(i)$, $i=\overline{k+1,I}$, при условии, что в дискретном ряде точек t_j, $j=\overline{1,v}$, $v\le k$, случайная последовательность принимает фиксированные значения $X'(j)=z(j)$, $j=\overline{1,v}$, $v\le k$.

Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (8) в момент времени t_i, $i=\overline{k+1,I}$, для k известных измерений $z(j)$, $j=\overline{1,k}$, и L порядка нелинейности запишем в виде

$$E^{(L,k)}(i)=M[\{X(i)-M[X(i)]\}^2]-\sum_{v=1}^{k}\sum_{\xi_1^{(1)}=1}^{L}D_{\xi_1^{(1)}}(v)\{\gamma_{\xi_1^{(1)}}^{(1)}(v,i)\}^2-$$

$$-\sum_{\nu=2}^{k}\sum_{l=2}^{M(\nu)}\sum_{p_1^{(l)}=1}^{p_1'^{(l)}}\dots\sum_{p_{l-1}^{(l)}=p_{l-2}^{(l)}+1}^{p_{l-1}'^{(l)}}\ \sum_{\xi_1^{(l)}=1}^{\xi_1'^{(l)}}\dots\sum_{\xi_l^{(l)}=1}^{\xi_l'^{(l)}} D_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}(\nu)\{\gamma^{(1)}_{p_1^{(l)}\dots p_{l-1}^{(l)};\,\xi_1^{(l)}\dots\xi_l^{(l)}}(\nu,i)\}^2,$$

$$i=\overline{k+1,I}. \tag{9}$$

При выборе значений k и L можно также анализировать величину относительного выигрыша в точности экстраполяции, последовательно увеличивая значения данных параметров:

$$\delta^{(L+1,\,k)}(i)=\{E^{(L,\,k)}(i)-E^{(L+1,\,k)}(i)\}/\,M\,[\{X\,(i)-M\,[X(i)]\}^2],$$

$$\delta^{(L,\,k+1)}(i)=\{E^{(L,\,k)}(i)-E^{(L,\,k+1)}(i)\}/\,M\,[\{X(i)-M\,[X(i)]\}^2].$$

В случае, когда случайная последовательность $\{X\}$ обладает только парными стохастическими связями $M\,[X^{\xi_2}(i-p_1)\,X^{\xi_1}(i)]$, алгоритм (8) упрощается к виду [11]

$$m_{x/z}^{(\mu,\,l)}(h,i)=\begin{cases} m_{x/z}^{(\mu,\,l-1)}(h,i)+(z^h(\mu)-m_{x/z}^{(\mu,\,l-1)}(l,\mu))\,\beta_{h\mu}^{l}(i),\, l\neq 1,\\ m_{x/z}^{(\mu,\,L-1)}(h,i)+(z^h(\mu)-m_{x/z}^{(\mu-1,\,L-1)}(l,\mu))\,\beta_{h\mu}^{l}(i),\, l=1.\end{cases} \tag{10}$$

Выражение $m_{x/z}^{(\mu,\,l)}(h,i)=M[X^h(i)/\,z^\nu(j),\, j=\overline{1,\mu-1},\, \nu=\overline{1,L};\, z^\nu(\mu),\, \nu=\overline{1,l}\,]$ для $h=1,\ l=L,\ \mu=k$ является несмещенной оптимальной оценкой $m_{x/z}^{(k,\,L)}(1,i)$ будущего значения $x(i),\ i=\overline{k+1,I}$, при условии, что для ее вычисления используются значения $z^\nu(j),\ \nu=\overline{1,L},\ j=\overline{1,k}$. Параметры алгоритма (10) определяем из следующих соотношений:

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)=\frac{1}{D_\lambda(\nu)}\Bigg\{M\,[Z^\lambda(\nu)\,Z^h(i)]-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{L}D_j(\mu)\,\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\,\beta_{h\mu}^{(j)}(i)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\lambda-1}D_j(\nu)\,\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\,\beta_{h\nu}^{(j)}(i)\Bigg\},\ \lambda=\overline{1,h},\ 1\le\nu\le i\le k;$$

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)=\frac{1}{D_\lambda(\nu)}\Bigg\{M\,[Z^\lambda(\nu)\,X^h(i)]-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{L}D_j(\mu)\,\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\,\beta_{h\mu}^{(j)}(i)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\lambda-1}D_j(\nu)\,\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\,\beta_{h\nu}^{(j)}(i)\Bigg\},\ \lambda=\overline{1,h},\ \nu=\overline{1,k},\ i=\overline{k+1};$$

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i)=\frac{1}{D_\lambda(\nu)}\Bigg\{M\,[X^\lambda(\nu)\,X^h(i)]-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{L}D_j(\mu)\,\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\,\beta_{h\mu}^{(j)}(i)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(v)\,\beta_{\lambda v}^{(j)}(v)\,\beta_{hv}^{(j)}(i)\},\ \lambda=\overline{1,h},\ k\le v\le i\le I;$$

$$D_\lambda(v)=M\,[Z^{2\lambda}(v)]-\sum_{\mu=1}^{v-1}\sum_{j=1}^{L} D_j(\mu)\,\{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(v)\}^2-\sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(v)\,\{\beta_{\lambda v}^{(j)}(v)\}^2,\ v=\overline{1,k};$$

$$D_\lambda(v)=M[X^{2\lambda}(v)]-\sum_{\mu=1}^{v-1}\sum_{j=1}^{L} D_j(\mu)\{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(v)\}^2-\sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(v)\{\beta_{\lambda v}^{(j)}(v)\}^2,\ v=\overline{k+1,I}. \tag{11}$$

Алгоритм (10) имеет эквивалентную явную форму записи:

$$m_{x/z}^{(k,\,N)}(1,i)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{v=1}^{L} z^v(j)\,S_{(j-1)N+v}^{(kL)}((i-1)\,L+1),\ \ i=\overline{k+1,I},$$

где

$$S_{(j-1)L+v}^{(\alpha)}(\xi)=\begin{cases} S_{(j-1)L+v}^{(\alpha-1)}(\xi)-S_{(j-1)L+v}^{(\alpha-1)}(\alpha)\,\beta_{\mathrm{mod}_L(\xi),\,j}^{(v)}(i), \alpha-1\le(j-1)L+v;\\ \beta_{\mathrm{mod}_L(\xi),\,j}^{(v)}([\xi/L]+1), \alpha=(j-1)L+v, \{\xi/L\}\ne 0;\\ \beta_{\mathrm{mod}_L(\xi),\,j}^{(v)}([\xi/L]), \alpha=(j-1)L+v, \{\xi/L\}=0.\end{cases}$$

Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (10), (11) определяется выражением:

$$M\,[\{X(i/z^v(j), v=\overline{1,L}, j=\overline{1,k})-m_x^{(k,\,L)}(1,i)\}^2]=M\,[X^2(i)]-$$
$$-\sum_{j=1}^{k}\sum_{v=1}^{L} M\,[(W_j^{(v)})^2](\beta_{1j}^{(v)}(i))^2,\ i=\overline{k+1,I}.$$

Выводы

Таким образом, получен дискретный оптимальный в среднеквадратическом смысле алгоритм нелинейной экстраполяции зашумленной случайной последовательности. Универсальность полученного решения определяется тем, что каноническое разложение существует и точно описывает в точках дискретности любую случайную последовательность с конечной дисперсией. Алгоритм позволяет использовать стохастические связи произвольного порядка нелинейности и произвольное число результатов измерений. Поскольку вычисления параметров экстраполятора имеют рекуррентный характер, его реализация на ЭВМ достаточно проста.

On the basis of canonical decompositions the algorithm of optimum nonlinear extrapolation of a random sequence is obtained on condition that the measurings are carried out with an error.

1. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. — 1941. — Т. 5, № 1. — С. 3—14.
2. *Винер Н.* Экстраполяция, интерполяция и сглаживание стационарных временных последовательностей с инженерными приложениями. — Нью-Йорк : Дж. Вилей, 1949. — 250 с.
3. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М. : Наука, 1980. — 576 с.
4. *Kalman R. E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems// Trans. ASME. Series D. J. Basic Eng. — 1960. — Vol. 82. — P. 35—45.
5. *Справочник* по прикладной статистике. Т. 2.— М. : Финансы и статистика, 1990. — 526 с.
6. *Кудрицкий В. Д.* Фильтрация, экстраполяция и распознавание реализаций случайных функций. — К. : ФАДА, ЛТД, 2001. — 176 с.
7. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение. — М. : Физматгиз, 1962. — 720 с.
8. *Атаманюк И. П.* Алгоритм экстраполяции нелинейного случайного процесса на базе его канонического разложения // Кибернетика и системный анализ. — 2005.— № 2. — С. 131—138.
9. *Атаманюк И. П* Алгоритм реализации нелинейной случайной последовательности на базе ее канонического разложения // Электрон. моделирование. — 2001. — **23**, № 5. — С. 38—46.
10. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 311 с.
11. *Атаманюк И. П.* Алгоритм определения оптимальных параметров полиномиального фильтра-экстраполятора Винера для нестационарных случайных процессов, наблюдаемых с погрешностями // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 2. — С. 154—159.

Поступила 30.05.11;
после доработки 19.03.12

АТАМАНЮК Игорь Петрович, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Николаевского государственного аграрного университета. В 1991 г. окончил Киевское высшее военное авиационное инженерное училище. Область научных исследований — распознавание, фильтрация, экстраполяция случайных процессов, информационные технологии.

КОНДРАТЕНКО Юрий Пантелеевич, д-р техн. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Черноморского государственного университета им. Петра Могилы. В 1976 г. окончил Николаевский кораблестроительный ин-т. Область научных исследований — теория принятия решений, системы автоматического управления, теория нечетких множеств и нечеткая логика.