УДК 519.21

А. В. Макаричев, канд. физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61078, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел. (057)7073737, e-mail: amakarichev@mail.ru)

Асимптотическое распределение времени с момента отказа до выхода из множеств неисправных состояний циклических соединений в комплексы сложных восстанавливаемых систем

Найдено асимптотическое распределение времени до выхода комплексов сложных восстанавливаемых систем из множеств неисправных состояний с момента их отказа при условии, что их число возрастает обратно пропорционально интенсивности отказов элементов сложных систем так, что суммарная нагрузка на систему обслуживания ограничена сверху величиной меньше единицы, с дисциплиной обслуживания требований в порядке их поступления.

Знайдено асимптотичний розподіл часу несправності комплексів складних відновлювальних систем з моменту їхньої відмови за умовою, що їхнє число зростає обернено пропорційно інтенсивності відмовлень елементів складних систем так, що сумарне навантаження на систему обслуговування обмежене зверху величиною менше одиниці, у порядку надходження від них потреб.

Ключевые слова: комплексы сложных восстанавливаемых систем, временной резерв, множество неисправных состояний.

Рассмотрим комплекс N, в котором работают N однотипных сложных восстанавливаемых систем, состоящих из n элементов. Каждый элемент с течением времени может отказать. В момент его отказа в одной из сложных систем возникает требование на обслуживание, которое немедленно поступает в ремонтный орган (РО), представляющий собой пару $P=(C, d)$, где C — структура, d — дисциплина обслуживания. Ремонтный орган осуществляет восстановление (ремонт или замену новым, идентичным исходному). Восстановленный элемент занимает свое место в сложной системе, в которой произошел отказ, а требование на обслуживание немедленно покидает РО.

Процесс обслуживания неисправных элементов комплекса N в момент времени t и j-й сложной системы опишем следующими формулами:

$$x(t)=(x^1(t), x^2(t), ..., x^N(t)), \quad x^j(t)=(x_1^j(t), ..., x_n^j(t)),$$

где $x_i^{j-}(t)+x_i^{j+}(t)=x_i^j$ — длина требования, т.е. время его обслуживания со скоростью, равной единице; $x_i^{j-}(t)$ — выработанная длина требования; $x_i^{j+}(t)$ — остаточная длина требования на обслуживание i-го элемента j-й сложной системы комплекса, $i=1, 2, ..., n,$ $j=1, 2, ..., N$; $x_i^j(t) = 0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы исправен; $x_i^j(t)= =(x_i^{j-}(t), x_i^{j+}(t))$, если этот элемент неисправен.

Состояние комплекса в момент времени t описывается совокупностью $v(t)=(e^1(t), e^2(t), ..., e^N(t))$ из N двоичных векторов, каждый из которых определяет состояние соответствующей сложной системы комплекса

$$e^j(t)=(e_1^j(t), e_2^j(t), ..., e_n^j(t)), \quad j=1, 2, ..., N.$$

Здесь $e_i^j(t)=0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы комплекса находится в исправном состоянии; $e_i^j(t)=1$, если в момент времени t он находится в неисправном состоянии, $i=1, 2, ..., n,$ $j=1, 2, ..., N$.

Предположим, что поток отказов элементов, возникающий в каждой сложной системе, является марковским, т.е. удовлетворяет двум условиям.

1. Если в произвольный момент времени t j-я сложная система находится в состоянии e^j, то вероятность отказа на промежутке времени $(t, t+h]$ исправного i-го элемента j-й сложной системы комплекса при $h \to 0$ составляет $\lambda_i(e^j)\, N^{-1}h+o(h)$.

2. В каком бы из состояний $e^j(t)$ ни находилась j-я сложная система комплекса в произвольный момент времени t, вероятность отказа двух и более элементов этой системы на промежутке времени $(t, t+h]$ равна $o(h)$ при $h \to 0$.

Если состояния двух различных сложных систем, k-й и l-й, совпадают, т.е. $e^k = e^l$, то интенсивности отказов соответствующих элементов в этих системах одинаковы: для любого i для всех $1 \le k < l \le N$ будет $\lambda_i(e^k)\, N^{-1} = =\lambda_i(e^l)\, N^{-1}$.

Пусть $\lambda N^{-1} = \max\limits_{e^j} \lambda(e^j)\, N^{-1}$, где $\lambda(e^j)\, N^{-1} = \sum\limits_{i:\, e_i^j=0} \lambda_i(e^j)\, N^{-1}$, т.е. $\lambda(e^j)\, N^{-1}$ — суммарная интенсивность (интенсивность отказа хотя бы одного из исправных элементов j-й сложной системы комплекса, находящейся в состоянии e^j), $j=1, 2, ..., N$. Длины требований (различных элементов или различных отказов одного и того же элемента) есть независимые положительные случайные величины.

Обозначим $G_i(x)$ функцию распределения длины требования по обслуживанию i-го элемента j-й сложной системы комплекса, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1, 2, \ldots, N$. Ее n-й момент обозначим $m_n^{(i)} = \int\limits_{x>0} x^n dG_i(x)$. Пусть $G_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(0)}{\lambda(0)} G_i(x)$ — функция распределения длины первого возникшего в j-й сложной системе требования на периоде регенерации; $m_n^{(0)} = \int\limits_{x>0} x^n dG_0(x)$— ее n-й момент; $\rho_0 = \lambda(0) m_1^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(0) m_1^{(0)}$ — начальная нагрузка на РО требований на обслуживание элементов сложных систем комплекса N. Обозначим $G(x) = \min\limits_{i=1,\ldots,n} G_i(x)$ функцию распределения случайной величины, мажорирующей по вероятности длины всех требований из j-й сложной системы, а ее n-й момент — $m_n = \int\limits_{x>0} x^n dG(x)$ и $\rho = \lambda m_1$, $j=1, 2, \ldots, N$.

Отказы элементов некоторой сложной системы на периоде регенерации комплекса могут привести всю сложную систему к отказу. Множество $E^j = \{e^j\}$ всевозможных состояний j-й сложной системы делится на два непустые непересекающиеся подмножества исправных E_+^j и неисправных E_-^j состояний j-й сложной системы комплекса, $j=1, 2, \ldots, N$. Предположим также, что $E_+^1 = E_+^2 = \ldots = E_+^N$.

Пусть $\| e^j \| = \sum_{i=1}^{n} e_i^j$ — число неисправных элементов в j-й сложной системе и $\min\limits_{e^j \in E_-^j} \| e^j \| = s \geq 1$, $j=1,2,\ldots,N$. Если число неисправных элементов в комплексе не превосходит $s-1$, то эта система исправна. Отказ комплекса наступает, если в течение случайного времени ξ в комплексе окажутся неисправными k сложных систем с номерами $\mathrm{mod}_N(l+1), \ldots, \mathrm{mod}_N(l+k)$, $0 \leq l \leq N-1$. Это связано с наличием в комплексе временного резерва.

Предположим, что $sk > 1$. Множество $E = \{v\}$ всевозможных состояний комплекса состоит из двух непустых непересекающихся подмножеств исправных E_+ и возможных неисправных E_- состояний комплекса. Отказавшие элементы обслуживаются в РО в порядке поступления (согласно дисциплине d_1 из класса консервативных дисциплин). Пусть $H(u) = P(\xi \leq u)$.

Последовательность проходимых случайным процессом $v(t)$ состояний комплекса от начала периода регенерации до момента его первого отказа на этом периоде образует путь $\pi = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, $v_l \in E_+$ при $l < r$ и $v_r \in E_-$.

Путь π назовем l_1, l_2, ..., l_k-слабомонотонным минимальным ($l_1 = \mathrm{mod}_N\,(l+1)$, ..., $l_k = \mathrm{mod}_N\,(l+k)$, $0 \le l \le N-1$), если первый отказ комплекса на периоде регенерации наступил в результате отказа l_1, l_2, ..., l_k-й сложной системы, в момент отказа в каждой из этих k сложных систем были неисправны ровно s элементов и больше отказов элементов до этого момента в этих сложных системах не было. Множество таких путей обозначим $\Pi_c^{l_1 l_2 \ldots l_k}$. Путь π назовем k-слабомонотонным минимальным, если для некоторых $l_1, l_2, ..., l_k$ этот путь является $l_1, l_2, ..., l_k$-слабомонотонным минимальным. Класс k-слабомонотонных минимальных путей обозначим $\Pi_c(k)$.

Переход случайного процесса $v(t)$, показывающего состояние комплекса в момент времени t, после отказа комплекса из множества неисправных состояний E_- в множество исправных состояний комплекса E_+ назовем его восстановлением. Время от i-го восстановления комплекса до $(i+1)$-го отказа комплекса обозначим τ_i^+, а время от i-го отказа комплекса до его i-го восстановления обозначим τ_i^-.

Отказ комплекса на периоде регенерации назовем обычным, если он произошел по слабомонотонному минимальному пути в результате отказа k сложных систем этого комплекса в течение времени ξ и на этом периоде регенерации в каждой из этих k сложных систем отказали и были восстановлены ровно по s элементов в каждой системе и больше отказов элементов в этих сложных системах не было, а в остальных $(N-k)$ сложных системах комплекса на этом периоде регенерации отказали и были восстановлены не более, чем по одному элементу в каждой из этих $(N-k)$ сложных систем комплекса.

Введем случайные события:

A — на периоде регенерации произошел отказ комплекса;

U — на периоде регенерации произошел обычный отказ комплекса;

$U^{l_1 l_2 \ldots l_k}$ — на периоде регенерации произошел обычный отказ комплекса в результате отказа l_1, l_2, ..., l_k-й его сложных систем в течение времени ξ.

Пусть $q_0^{l_1 l_2 \ldots l_k}(x) = P\{U^{l_1 l_2 \ldots l_k}, \tau^- > x\}$ — вероятность того, что на периоде регенерации в результате отказа $l_1, l_2, ..., l_k$-й сложных систем в течение времени ξ произойдет обычный отказ комплекса и время пребывания комплекса в множестве неисправных состояний будет больше, чем x.

Предположим, что обычный отказ комплекса произошел по 1, 2, ..., k-слабомонотонному минимальному пути π. Рассмотрим, как изменяется состояние i-й сложной системы на этом пути, $i = 1, 2, ..., k$. Пусть $0, e_1^i, e_2^i, ..., e_s^i$ — последовательность состояний i-й системы до момента ее отказа. Эта последовательность образует монотонный минимальный путь π_i, по которому i-я сложная система из состояния {0} приходит к отказу и $\lambda(\pi_i) = =\lambda_{l_1}(0)\lambda_{l_2}(e_1^i)\ldots\lambda_{l_s}(e_{s-1}^i)>0$, $i=1,\ldots,k$, где $i_1, i_2, \ldots, i_s$ — номера, последовательно отказавших элементов i-й сложной системы на пути π_i. Множество монотонных минимальных путей, по которым i-я сложная система может отказать, как и ранее, обозначим Π_0^i.

Пусть $B^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(U, x_1, x_2, \ldots, x_{sk}, \xi, x) = P(U, \varsigma > x_1, v^{j_1}(x_1) > x_{sk} - x_1 + +\xi + x)$ — условная вероятность того, что к моменту времени x_1 не закончится период регенерации, отказавший в момент времени x_1 элемент j_1 не завершит свое обслуживание к моменту времени $x_{sk} + \xi + x$ и в момент времени $x_{sk} + \xi$ произойдет обычный отказ комплекса при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в моменты $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{sk} (0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{sk})$ последовательно отказали элементы $j_1, j_2, \ldots, j_{sk}$ из первых k сложных систем.

Обозначим $q_0^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x)$ вероятность того, что обычный отказ комплекса на периоде регенерации произойдет по таким 1, 2, ..., k-слабомонотонным минимальным путям, что отказ i-й сложной системы произойдет по монотонному минимальному пути π_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, а перестановка $j_1, j_2, \ldots, j_{sk}$ определяет порядок отказов элементов из первых k сложных систем и время пребывания комплекса в неисправном состоянии будет больше, чем x.

Пусть e' получается из вектора e выделением первых k компонент, т.е. e' определяет состояние первых k сложных систем. Набор $j_1, j_2, \ldots, j_{sk}$ определяет последовательность состояний $0', e_1', e_2', \ldots, e_{sk}'$, которые проходит подкомплекс из первых k сложных систем до отказа всего комплекса по 1, 2, ..., k-слабомонотонному минимальному пути. Обозначим

$$\lambda(e') N^{-1} = \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e^r) N^{-1}$$

суммарную интенсивность отказов элементов из первых k сложных систем, находящихся в состоянии e'.

Пусть $\Delta = \{(x_1, \ldots, x_{sk}) : 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{sk}\}$ и

$$J_N(U, j_1, j_2, \ldots, j_{sk}, x) =$$
$$= E \int_{\Delta} \ldots \int \exp(-aN^{-1}) B^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(U, x_1, x_2, \ldots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk},$$

где $a = \lambda(0') x_1 + \lambda(e_1')(x_2 - x_1) + \ldots + \lambda(e_{sk-1}')(x_{sk} - x_{sk-1})$.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$q_0^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно введенным обозначениям по формуле полной вероятности

$$q_0^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(\pi_1, \dots, \pi_k, x) =$$

$$= E\int_{\Delta} \dots \int \lambda_{j_1}(0') N^{-1} \exp[-\lambda(0') N^{-1} x_1] \lambda_{j_2}(e_1') N^{-1} \exp[-\lambda(e_1') N^{-1}(x_2 - x_1)] \dots$$

$$\dots \lambda_{j_{sk}}(e'_{sk-1}) N^{-1} \exp[-\lambda(e'_{sk-1}) N^{-1}(x_{sk} - x_{sk-1})] \times$$

$$\times B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 dx_2 \dots dx_{sk} = \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} J_N(U, j_1, \dots, j_{sk}, x),$$

что и требовалось. Лемма 1 доказана.

Пусть $B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(x_1, x_2, \dots, x_{sk}) = P\{\varsigma > x_1, v^{j_1}(x_1) > x_{sk} - x_1\}$ — условная вероятность того, что к моменту времени x_1 не закончится период регенерации, отказавший в момент времени x_1 элемент j_1 не завершит свое обслуживание к моменту времени x_{sk} при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в моменты $x_1, x_2, \dots, x_{sk}$ $(0 < x_1 < x_2 < \dots$ $\dots < x_{sk})$ последовательно отказали элементы $j_1, j_2, \dots, j_{sk}$ из первых k сложных систем.

Пусть $B_\lambda(x_1, x_{sk}) = P\{\varsigma_\lambda > x_1, v_\lambda(x_1) > x_{sk} - x_1\}$ — условная вероятность того, что в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ период регенерации не закончится до момента времени x_1 и требование, возникшее в момент времени x_1, не завершит свое обслуживание в РО к моменту времени x_{sk} при условии, что этот период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в момент времени x_1 возникло требование в РО комплекса ($v(x_1)$ — время пребывания в РО возникшего требования в момент времени x_1 от начала периода регенерации).

Лемма 2. Для любых $\xi \ge 0$ и $x \ge 0$ справедливо неравенство

$$B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(U, x_1, x_2, \dots, x_{sk}, \xi, x) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения

$$B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(U, x_1, x_2, \dots, x_{sk}, \xi, x) \le B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(x_1, x_2, \dots, x_{sk}).$$

Из леммы 2 [1] следует

$$B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(x_1, x_2, \dots, x_{sk}) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}).$$

Из двух последних неравенств и транзитивности отношения порядка следует утверждение леммы 2. Она доказана.

Обозначим $T_\lambda = \dfrac{1}{\lambda(0)} + \dfrac{m_1}{(1-\rho)}$ математическое ожидание длины периода регенерации комплекса $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ [2]. Обозначим v_λ стационарное время пребывания требования в РО этого комплекса при дисциплине обслуживания d_1.

Лемма 3. Пусть $\rho < 1$ и $m_{sk} < \infty$. Тогда

$$\int\limits_{0<x_1<x_2<\ldots<x_{sk}} \ldots \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk} = \frac{E[v_\lambda]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_\lambda < \infty .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем в рассматриваемом кратном интеграле замену переменных: $t_1 = x_{ks} - x_1$, $t_2 = x_{ks-1} - x_1$, ..., $t_{ks-1} = x_2 - x_1$, $t = x_1$. После этой замены искомый интеграл получим в виде

$$\int\limits_{t_1>t_2>\ldots>t_{sk-1}>0,} \ldots \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt dt_1 \ldots dt_{sk-1} =$$

$$= \int\limits_{t_1>\ldots>t_{sk-1}>0} \ldots \int dt_1 \ldots dt_{sk-1} \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt. \qquad (1)$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [3, 4] следует, что

$$\int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt = P\{v_\lambda > t_1\} T_\lambda. \qquad (2)$$

Согласно равенствам (1), (2) в принятых обозначениях искомый интеграл имеет вид

$$\int\limits_{t_1>t_2>\ldots>t_{sk-1}} \ldots \int P\{v_\lambda > t_1\}\, dt_1 \ldots dt_{sk-1} T_\lambda = \int\limits_{t_1>0} \frac{[t_1]^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_\lambda > t_1\}\, dt_1 T_\lambda =$$

$$= \frac{E[v_\lambda]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_\lambda < \infty,$$

так как существует конечный момент $m_{sk} < \infty$ и $\rho < 1$. Лемма 3 доказана.

Введем обозначения:

$$\Delta(z) = \{(x_1, \ldots, x_{sk}) : 0 < x_1 < \ldots < x_{sk} < z\},$$

$$|\Delta(z)| = \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int dx_1 \ldots dx_{sk} = \frac{z^{sk}}{(sk)!}.$$

Лемма 4. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$E \int_{\Delta} \ldots \int B^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}} (U, x_1, x_2, \ldots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk} - J_N (U, j_1, \ldots, j_{sk}, x) \to 0$$

равномерно по $x \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$E \int_{\Delta} \ldots \int B^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}} (U, x_1, x_2, \ldots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk} - J_N (U, j_1, \ldots, j_{sk}, x) =$$

$$= E \int_{\Delta} \ldots \int [1 - \exp(-aN^{-1})] B^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}} (U, x_1, x_2, \ldots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk}.$$

Выберем любое число $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. Из леммы 3 следует, что для выбранного $\varepsilon > 0$ существует $z = z(\varepsilon)$ такое, что для любого $z \geq z(\varepsilon)$

$$\int_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_{\lambda} (x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Из неравенства $1 - \exp(-aN^{-1}) < 1$ и леммы 2 для любых $\xi \geq 0$ и $x \geq 0$ справедливы неравенства

$$[1 - \exp(-aN^{-1})] B^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}} (U, x_1, x_2, \ldots, x_{sk}, \xi, x) <$$
$$< B^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}} (U, x_1, x_2, \ldots, x_{sk}, \xi, x) \leq B_{\lambda} (x_1, x_{sk}). \tag{4}$$

Из (3), (4) и монотонности интеграла для любого $x \geq 0$ следует неравенство

$$E \int_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int [1 - \exp(-aN^{-1})] B^{j_1 \ldots j_{sk}} (U, x_1, \ldots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

По определению $a \leq \lambda x_{sk} < \lambda z$. Для выбранного $z \geq z(\varepsilon)$ существует такое $N = N(z(\varepsilon))$, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$

$$0 \leq 1 - \exp(-aN^{-1}) < 1 - \exp(-\lambda z N^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2 |\Delta(z)|}.$$

Отсюда и неравенства $0 \leq B^{j_1 \ldots j_{sk}} (U, x_1, \ldots, x_{sk}, \xi, x) \leq 1$ следует, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$ при любом $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$E \int_{\Delta(z)} \ldots \int [1 - \exp(-aN^{-1})] B^{j_1 \ldots j_{sk}} (U, x_1, \ldots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$ и любого $x \ge 0$ справедливо неравенство

$$E\int_{\Delta} ...\int [1-\exp(-aN^{-1})]\, B^{j_1 ... j_{sk}}(U, x_1, ..., x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 ... dx_{sk} < \varepsilon\,.$$

Лемма 4 доказана.

Пусть

$$\lambda_- = \lambda\left(1-\frac{k}{N}\right),\ \lambda(0)_- = \lambda(0)\left(1-\frac{k}{N}\right);$$

$B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x) = P(\varsigma_0^- > x_1, v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi + x)$, $B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x) = P(\varsigma_0 > x_1, v_0^{j}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi + x)$ — соответственно условные вероятности того, что, начавшись в момент времени $x = 0$, период регенерации в комплексах $\mathrm{N}_{\lambda(0)_-, G_0}$ и $\mathrm{N}_{\lambda(0), G_0}$ не закончится к моменту времени x_1 и возникшее в момент времени x_1 в РО требование, тип которого совпадает с номером элемента j_1, обозначаемого через j, не завершит свое обслуживание в РО до момента времени $x_{sk} + \xi + x$ при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в момент времени x_1 в РО возникло требование с номером j элемента j_1 $(0 < x_1 < x_{sk})$; $v_0^{j-}(x_1)$ и $v_0^{j}(x_1)$ — времена пребывания требования j-го типа, поступившего в момент x_1 в РО комплексов соответственно $\mathrm{N}_{\lambda(0)_-, G_0}$ и $\mathrm{N}_{\lambda(0), G_0}$.

Лемма 5. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$\left| E\int_{\Delta} ...\int B^{j_1 ... j_{sk}}(U,\ x_1, ..., x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 ... dx_{sk} - \right.$$

$$\left. - E\int_{\Delta} ...\int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 ... dx_{sk} \right| \to 0\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon > 0$. Из леммы 3 следует, что существует такое положительное число $z = z(\varepsilon)$, что для любого $z \ge z(\varepsilon)$

$$\int_{\Delta \setminus \Delta(z)} ...\int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 ... dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{5}\,. \qquad (7)$$

Из леммы 2 следует, что для любых $\xi \ge 0$ и $x \ge 0$ справедливы неравенства

$$B^{j_1 ... j_{sk}}(U, x_1, ..., x_{sk}, \xi, x) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}),\ B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}). \qquad (8)$$

Из (7), (8) и монотонности интеграла следует, что для любого $x>0$

$$E\int_{\Delta\setminus\Delta(z)}\ldots\int B^{j_1\ldots j_{sk}}(U, x_1, \ldots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{5},$$

$$E\int_{\Delta\setminus\Delta(z)}\ldots\int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{9}$$

Согласно аксиоме непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l = l(\varepsilon)$, что для любого $l \geq l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_{\lambda_-}(z) > l) < \frac{\varepsilon}{5|\Delta(z)|},$$

где $\Pi_{\lambda_-}(z)$ — число событий пуассоновского потока с параметром λ_-, возникшим на отрезке $[0, z]$.

Пусть R_l^- — случайное событие, состоящее в том, что первые l требований пуассоновского потока с параметром λ_- все будут из различных систем. Согласно лемме 2 [2] для выбранного ε существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для любого $N \geq N(\varepsilon)$

$$P(R_l^-) > 1 - \frac{\varepsilon}{5|\Delta(z)|}.$$

Пусть $A = \{\Pi_{\lambda_-}(z) \leq l\}\, R^l$, $\Pi_- = \{\Pi_{\lambda_-}(z) \leq l\}$, а $I(A)$ — индикатор случайного события A. Очевидно,

$$\begin{aligned} B^{j_1\ldots j_{sk}}(U, x_1, \ldots, x_{sk}, \xi, x) &= P(U, \varsigma > x_1, v^j(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi + x) = \\ &= P(U, \varsigma I(\Pi_-) > x_1,\ v^j(x_1)\, I(\Pi_-) > x_{sk} - x_1 + \xi + x) + \\ &+ P(U, \varsigma I(\overline{\Pi}_-) > x_1,\ v^j(x_1)\, I(\overline{\Pi}_-) > x_{sk} - x_1 + \xi + x). \end{aligned} \tag{10}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi, x) &= P(\varsigma_0^- > x_1, v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi + x) = \\ &= P(\varsigma_0^-\, I(A) > x_1, v_0^{j-}(x_1)\, I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi + x) + \\ &+ P(\varsigma_0^-\, I(\overline{A}) > x_1,\ v_0^{j-}(x_1)\, I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi + x). \end{aligned} \tag{11}$$

Из леммы 4 [2] следует, что

$$\begin{aligned} &P\{U, \varsigma(\omega, \alpha)\, I(\Pi_-) > x_1,\ v^j(x_1)\, I(\Pi_-) > x_{sk} - x_1 + \xi + x\} = \\ &= P\{\varsigma_0^-(\omega, \alpha)\, I(A) > x_1,\ v_0^{j-}(x_1)\, I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi + x). \end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку для любого $N \geq N(\varepsilon)$ и любого $x \geq 0$

$$P(U, \varsigma I(\overline{\Pi}_{-}) > x_1, v^{j}(x_1) I(\overline{\Pi}_{-}) > x_{sk} - x_1 + \xi + x) \leq P(\overline{\Pi}_{-}) < \frac{\varepsilon}{5|\Delta(z)|} \qquad (13)$$

и

$$P(\varsigma_0^{-} I(\overline{A}) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi + x) \leq$$
$$\leq P(\overline{A}) \leq P(\overline{\Pi}_{-}) + P(\overline{R}_l^{-}) < \frac{2\varepsilon}{5|\Delta(z)|}, \qquad (14)$$

из (10) — (14) получаем для любого $N \geq N(\varepsilon)$ и любого $x \geq 0$

$$\left| B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, \xi, x) - B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi, x) \right| < \frac{3}{5|\Delta(z)|}. \qquad (15)$$

Из свойства интеграла и (15) следует, что для любого $x \geq 0$

$$\left| E \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} - \right.$$
$$\left. - E \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} \right| \leq E \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int \left| B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, \xi, x) - \right.$$
$$\left. - B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi, x) \right| dx_1 \dots dx_{sk} < \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int \frac{3\varepsilon}{5|\Delta(z)|}\, dx_1 \dots dx_{sk} = \frac{3\varepsilon}{5}. \qquad (16)$$

Из (9) и (16) следует, что для любого $N \geq N(\varepsilon)$ и любого $x \geq 0$

$$\left| E \int\limits_{\Delta} \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} - E \int\limits_{\Delta} \dots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi, x) dx_1 \dots dx_{sk} \right| \leq$$
$$\leq \left| E \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} \right| +$$
$$+ \left| E \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \dots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} \right| +$$
$$+ \left| E \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} - \right.$$

$$-E\int\limits_{\Delta(z)}\ldots\int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\,dx_1\ldots dx_{sk}\Bigg| < \frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{3\varepsilon}{5}=\varepsilon.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$ равномерно по $x\geq 0$

$$\left|E\int\limits_{\Delta}\ldots\int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\,dx_1\ldots dx_{sk} - E\int\limits_{\Delta}\ldots\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\,dx_1\ldots dx_{sk}\right|\to 0.$$

Доказательство. Выберем любое число $\varepsilon>0$. Из леммы 3 следует, что существует такое $z=z(\varepsilon)$, что для любого $z\geq z(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\ldots\int B_\lambda(x_1, x_{sk})\,dx_1\ldots dx_{sk}<\frac{\varepsilon}{6}. \tag{17}$$

Поскольку $\lambda(0)\leq\lambda$, из леммы 2 следует, что для любых $\xi\geq 0$ и $x\geq 0$

$$B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\leq B_\lambda(x_1, x_{sk}),\ \ B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\leq B_\lambda(x_1, x_{sk}). \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что для любых $\xi\geq 0$ и $x\geq 0$

$$\begin{gathered} E\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\ldots\int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\,dx_1\ldots dx_{sk}<\frac{\varepsilon}{6}, \\ E\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\ldots\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\,dx_1\ldots dx_{sk}<\frac{\varepsilon}{6}. \end{gathered} \tag{19}$$

Согласно аксиоме непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l=l(\varepsilon)$, что для любого $l\geq l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(z)>l)<\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}. \tag{20}$$

Отсюда и из неравенства $x_1<x_{sk}<z$ следует, что

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(x_1)>l)<P(\Pi_{\lambda(0)}(z)>l)<\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}. \tag{21}$$

Пусть C_l — случайное событие, состоящее в том, что совпадут моменты возникновения первых l требований двух пуассоновских потоков с параметрами $\lambda(0)$ и $\lambda(0)_-$ (второй поток получается из первого просеиванием). Тогда $P(C_l)=(1-kN^{-1})^l \to 1$ при $N\to\infty$. Отсюда следует, что для выбранного $\varepsilon>0$ существует такое $l=l(\varepsilon)$, что для любого $l\ge l(\varepsilon)$

$$P(C_l)>1-\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}. \tag{22}$$

Пусть $C=\{\Pi_{\lambda(0)}(z)\le l\}\,C_l$ и $I(C)$ — индикатор случайного события C. Тогда

$$\begin{aligned} B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x) &= P(\varsigma_0^- > x_1,\ v_0^{j-}(x_1) > x_{sk}-x_1+\xi+x) = \\ &= P(\varsigma_0^- I(C) > x_1,\ v_0^{j-}(x_1)\, I(C) > x_{sk}-x_1+\xi+x) + \\ &+ P(\varsigma_0^- I(\overline{C}) > x_1,\ v_0^{j-}(x_1)\, I(\overline{C}) > x_{sk}-x_1+\xi+x), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x) &= P(\varsigma_0 > x_1,\ v_0^{j}(x_1) > x_{sk}-x_1+\xi+x) = \\ &= P(\varsigma_0 I(C) > x_1,\ v_0^{j}(x_1)\, I(C) > x_{sk}-x_1+\xi+x) + \\ &+ P(\varsigma_0 I(\overline{C}) > x_1,\ v_0^{j}(x_1)\, I(\overline{C}) > x_{sk}-x_1+\xi+x). \end{aligned} \tag{24}$$

Из построения случайного события C следует, что

$$\begin{aligned} &P\{\varsigma_0\, I(C) > x_1,\ v_0^{j}(x_1)\, I(C) > x_{sk}-x_1+\xi+x\} = \\ &= P\{\varsigma_0^- I(C) > x_1,\ v_0^{j-}(x_1)\, I(C) > x_{sk}-x_1+\xi+x\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку с использованием (21) и (22)

$$\begin{aligned} &P(\varsigma_0\, I(\overline{C}) > x_1,\ v_0^{j}(x_1)\, I(\overline{C}) > x_{sk}-x_1+\xi+x) < P(\overline{C}) \le \\ &\le P(\Pi_{\lambda(0)} > l) + P(\overline{C}) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|} \end{aligned} \tag{26}$$

и аналогично

$$P(\varsigma_0^- I(\overline{C}) > x_1,\ v_0^{j-}(x_1)\, I(\overline{C}) > x_{sk}-x_1+\xi+x) < P(\overline{C}) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|}, \tag{27}$$

из (23) — (27) следует, что при любых $\xi\ge 0$ и $x\ge 0$

$$\left|B^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x) - B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\right| < \frac{2}{3|\Delta(z)|}. \tag{28}$$

Из свойства интеграла и (28) следует

$$\left| E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \le$$

$$\le E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int \left| B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x) - B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x) \right| dx_1 \ldots dx_{sk} <$$

$$< \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int \frac{2}{3|\Delta(z)|}\, dx_1 \ldots dx_{sk} = \frac{2\varepsilon}{3}. \qquad (29)$$

Из (19) и (29) следует, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$ и любого $x \ge 0$

$$\left| E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \le$$

$$\le \left| E \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| + \left| E \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| +$$

$$+ \left| E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отсюда и из определения предела последовательности вытекает утверждение леммы 6. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$\left| J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x) - E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \to 0.$$

Доказательство. Для простоты введем обозначения:

$$J_N(U, x) = J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x),$$

$$J_N^{(1)}(U, x) = E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B^{j_1 \ldots j_{sk}}(U, x_1, \ldots, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk},$$

$$J_N^{(2)}(x) = E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk},$$

$$J_N^{(3)}(x) = E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk}.$$

Из лемм 5—7 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральные числа $N_1 = N_1(\varepsilon)$, $N_2 = N_2(\varepsilon)$, $N_3 = N_3(\varepsilon)$, что соответственно для любого натурального числа $N > N_1$ и любого $x \geq 0$

$$\left| J_N(U, x) - J_N^{(1)}(U, x) \right| < \varepsilon / 3,$$

для любого $N > N_2$ и любого $x \geq 0$

$$\left| J_N^{(1)}(U, x) - J_N^{(2)}(x) \right| < \varepsilon / 3,$$

для любого $N > N_3$ и любого $x \geq 0$

$$\left| J_N^{(2)}(x) - J_N^{(3)}(x) \right| < \varepsilon / 3.$$

Пусть $N_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда для любого натурального числа $N > N_0$ и любого $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$\left| J_N(U, x) - J_N^{(3)}(x) \right| \leq \left| J_N(U, x) - J_N^{(1)}(U, x) \right| + \left| J_N^{(1)}(U, x) - J_N^{(2)}(x) \right| +$$

$$+ \left| J_N^{(2)}(x) - J_N^{(3)}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Лемма 7 доказана.

Пусть j — номер элемента j_1. Пусть $v_0^j = \eta_j + w^{(0)}$ — стационарное время пребывания требования j-го типа в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda(0), G_0}$. Оно состоит из двух независимых случайных слагаемых: длины η_j требования j-го типа с функцией распределения $G_j(x) = P(\eta_j \leq x)$ и стационарного времени ожидания обслуживания $w^{(0)}$ в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda(0), G_0}$.

Лемма 8. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда для любого $x \geq 0$

$$E \int_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} = \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} \frac{(t-u)^{ks-2}}{(ks-2)!} P(v_0^j > t + x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем в рассматриваемом кратном интеграле замену переменных $t = x_1$, $t_1 = x_{sk} - x_1$, $t_2 = x_{sk} - x_2$, ..., $t_{sk-1} = x_{sk} - x_{sk-1}$. После этой замены данный интеграл примет вид

$$E \int_{t_1 > t_2 > \ldots > t_{sk-1} > 0,} \ldots \int_{t > 0} P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi + x\}\, dt dt_1 \ldots dt_{sk-1} =$$

$$= E \int_{t_1 > \ldots > t_{sk-1} > 0} \ldots \int dt_1 \ldots dt_{sk-1} \int_{t>0} P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi + x\}\, dt. \qquad (30)$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [3, 4] следует, что

$$\int\limits_{t>0} P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi + x\}\, dt = P\{v_0^j > t_1 + \xi + x\}\, T_{\lambda(0)}. \qquad (31)$$

Из равенств (30) и (31), интегрируя и полагая $t = t_1$, находим искомый интеграл в виде

$$E\int\limits_{\Delta}\!\ldots\!\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} =$$

$$= E\int\limits_{t_1>t_2>\ldots>t_{sk-1}} \ldots \int P\{v_0^j > t_1 + \xi + x\}\, dt_1 \ldots dt_{sk-1} T_{\lambda(0)} =$$

$$= E\int\limits_{t>0} \frac{t^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_0^j > t_1 + \xi + x\}\, dt T_{\lambda(0)} =$$

$$= \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{t>u} \frac{(t-u)^{ks-2}}{(ks-2)!} P(v_0^j > t + x)\, dt T_{\lambda(0)} \le \frac{E[(v_0^j)^{sk-1}]}{(sk-1)!} T_{\lambda(0)} < \infty$$

для любого $x \ge 0$, так как существует конечный момент $m_{sk} < \infty$ и $\rho < 1$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$q_0^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x) \sim \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{t>u} \frac{(t-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P(v_0^j > t + x)\, dt T_{\lambda(0)},$$

где j — номер элемента j_1, отказавшего первым на периоде регенерации из первых k сложных систем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует равенство

$$q_0^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x).$$

Из леммы 7 при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$\left| J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x) - E\int\limits_{\Delta}\!\ldots\!\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \to 0.$$

Согласно лемме 8

$$E\int_{\Delta}\!\!...\!\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi, x)\, dx_1 ... dx_{sk} = \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} \frac{(t-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P\,(v_0^j > t+x)\, dtT_{\lambda(0)}.$$

Из последних трех соотношений при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$q_0^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k, x) \sim \frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} \frac{(t-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P\,\{v_0^j > t+x\}\, dtT_{\lambda(0)}.$$

Лемма 9 доказана.

Обозначим $q_0^{12...k}(x) = P\,(U^{12...k}, \tau^- > x)$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет обычный отказ комплекса по 1, 2, ..., k-слабомонотонному минимальному пути и комплекс пробудет в неисправном состоянии время, большее, чем x. Для краткости, обозначим $v_0(i_1^l) = v_0^j$, где $j = i_1^l$ — номер элемента, отказавшего первым из первых k сложных систем на периоде регенерации, и этот элемент из l-й сложной системы, отказавшей по пути π_i, $l = 1, 2, ..., k$.

Лемма 10. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$q_0^{12...k}(x) \sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P\,(v_0(i_1^l) > t+x)\, dtT_{\lambda(0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $j_1, j_2, ..., j_k$ - последовательность отказавших элементов в первых k системах, приведших к отказу комплекса. Пусть

$$\begin{matrix} i_1^1,\, i_2^1, ..., i_s^1, \\ i_1^2,\, i_2^2, ..., i_s^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_1^k,\, i_2^k, ..., i_s^k \end{matrix} \qquad (32)$$

есть последовательность номеров отказавших элементов 1, 2, ..., k-й системы, приведших к отказу комплекса. Каждый из этих наборов определяет монотонный минимальный путь π_i $(l=1, 2, ..., k)$, по которому произошел отказ i-й сложной системы. Следовательно, $j_1, j_2, ..., j_k$ — такая перестановка из номеров (32), указывающая последовательность произошедших отказов элементов в этих сложных системах, что для каждого верхнего индекса сохраняется монотонность по нижнему индексу. Тогда

$$q_0^{12\ldots k}(x) = \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_{sk})} q_0^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k, x), \tag{33}$$

где $q_0^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k, x)$ — вероятность обычного отказа комплекса и его пребывания в неисправном состоянии более продолжительное время, чем x, по таким 1, 2, ..., k-слабомонотонным путям, что отказ l-й сложной системы произошел по монотонному минимальному пути $\pi_i (l=1, 2, ..., k)$, а перестановка $j_1, j_2, ..., j_k$ определяет порядок отказов элементов из первых k сложных систем.

Из леммы 1 и определения условной вероятности $B^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(U, x_1, ..., x_{sk}, x)$ в силу дисциплины обслуживания требований в порядке поступления следует, что вероятность $q_0^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k, x)$ не зависит от порядка отказов элементов $j_2, ..., j_{sk}$, отказавших вслед за элементом j_1 из первых k сложных систем комплекса, а $J_N(U, j_1, j_2, ..., j_{sk}, x) = J_N(U, j_1, x)$ не зависит от номеров элементов $j_2, ..., j_k$. Поэтому во внутренней сумме (33) для каждого элемента j_1 с номером $j = i_1^l$ $(l=1,2,...,k)$ будет ровно $\dfrac{(sk-1)!}{(s-1)!(s!)^{k-1}}$ равных слагаемых, каждое из которых при $N \to \infty$ согласно лемме 9 равномерно по $x \geq 0$ эквивалентно

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} \frac{(t-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Отсюда при $N \to \infty$ равномерно по $x \geq 0$

$$\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_{sk})} q_0^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k, x) \sim$$

$$\sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует, что при $N \to \infty$ равномерно по $x \geq 0$

$$q_0^{12\ldots k}(x) \sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Лемма 10 доказана.

Обозначим $q_0^{l_1 l_2 \ldots l_k}(x) = P(U^{l_1 l_2 \ldots l_k}, \tau^- > x)$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет обычный отказ комплекса по l_1, l_2, ..., l_k-слабомонотонному минимальному пути и комплекс пробудет в неисправном состоянии время большее, чем x.

Обозначим $P(U, \tau^- > x)$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет обычный отказ комплекса и время пребывания его в неисправном состоянии больше, чем x.

Лемма 11. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ равномерно по $x \geq 0$

$$P(U, \tau^- > x) \sim$$

$$\sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}} \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения комплекса N в силу однотипности сложных систем, его составляющих, и того, что дисциплина обслуживания требований в РО отказавших элементов не зависит от номеров сложных систем, где они отказали, следует, что для любых $1 \leq l_1 < < l_2 < \ldots < l_k \leq N$ (систем с номерами $\mathrm{mod}_N(l+1), \ldots, \mathrm{mod}_N(l+k), 0 \leq l \leq N-1$)

$$q_0^{l_1 l_2 \ldots l_k}(x) = q_0^{12\ldots k}(x).$$

Отсюда и согласно определению $P(U, \tau^- > x) = N q_0^{12\ldots k}(x)$. Отсюда и из леммы 10 при $N \to \infty$ следует утверждение леммы 11.

Лемма 12. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk+1} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ $P(A) \sim P(U)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 11 следует, что при $x=0$

$$P(U)=P(U,\tau^{-}>0)\sim$$

$$\sim\frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}}\sum_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \cdots\cdots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}}\sum_{l=1}^{k}\int_{u>0}dH(u)\int_{t>u}(t-u)^{sk-2}P(v_0(i_1^l)>t)\,dtT_{\lambda(0)}.$$

Из лемм 10 и 15 [5, 6] при $N\to\infty$ следует

$$P(A)\sim\frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}}\sum_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \cdots\cdots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}}\sum_{l=1}^{k}\int_{u>0}dH(u)\int_{t>u}(t-u)^{sk-2}P(v_0(i_1^l)>t)\,dtT_{\lambda(0)}.$$

Отсюда в силу транзитивности отношения эквивалентности при $N\to\infty$ $P(A)\sim P(U)$. Лемма 12 доказана.

Пусть

$$F(x)=1-\frac{\sum\limits_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \cdots\cdots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\prod\limits_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)\sum\limits_{l=1}^{k}\int\limits_{u>0}dH(u)\int\limits_{t>u}(t-u)^{sk-2}P(v_0(i_1^l)>t+x)\,dt}{\sum\limits_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \cdots\cdots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\prod\limits_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)\sum\limits_{l=1}^{k}\int\limits_{u>0}dH(u)\int\limits_{t>u}(t-u)^{sk-2}P(v_0(i_1^l)>t)\,dt},\quad x\ge 0.$$

Теорема 1. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk+1}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$ равномерно по натуральному номеру i

$$\lim\sup_{x\ge 0}\left|P\{\tau_i^{-}\le x\}-F(x)\right|=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения для следующих случайных событий: $U_i=$ {i-й отказ комплекса является обычным} и $\overline{U}_i=$ {i-й отказ комплекса не является обычным}.

Представим вероятность $P\{\tau_i^{-}>x\}$ как сумму вероятностей несовместных событий:

$$P\{\tau_i^{-}>x\}=P\{U_i,\tau_i^{-}>x\}+P\{\overline{U}_i,\tau_i^{-}>x\}. \qquad (35)$$

В этой сумме второе слагаемое оценим сверху:

$$P\{\overline{U}_i, \tau_i^- > x\} \le P(\overline{U}_i) = 1 - P(U_i). \tag{36}$$

Вероятность того, что i-й отказ комплекса является обычным, равна условной вероятности того, что произошедший на периоде регенерации отказ комплекса является обычным:

$$P(U_i) = P(U|A) = \frac{P(U)}{P(A)}. \tag{37}$$

Из леммы 12 следует, что при $N \to \infty$

$$P(A) \sim P(U) \text{ или } \frac{P(U)}{P(A)} \to 1. \tag{38}$$

Из (37) и (38) следует, что при $N \to \infty$ $\limsup\limits_{i \ge 1} [1 - P(U_i)] = 0$. Отсюда и из (36) следует, что при $N \to \infty$ равномерно по номеру i $\limsup\limits_{x \ge 0} P\{\overline{U}_i, \tau_i^- > x\} = 0$. Отсюда и из (35) следует, что при $N \to \infty$ равномерно по номеру i

$$\limsup_{x \ge 0} [P\{\tau_i^- > x\} - P\{U_i, \tau_i^- > x\}] = 0. \tag{39}$$

Вероятность того, что i-й отказ комплекса является обычным и $\tau_i^- > x$, равна условной вероятности того, что произошедший на периоде регенерации отказ комплекса является обычным и время пребывания комплекса в неисправном состоянии больше, чем x:

$$P\{U_i, \tau_i^- > x\} = \frac{P\{U, \tau^- > x\}}{P(A)}. \tag{40}$$

Из леммы 11 при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$ следует

$$P(U, \tau^- > x) \sim$$

$$\sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}} \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t + x)\, dt T_{\lambda(0)}. \tag{41}$$

Из лемм 10 и 15 [6] при $N \to \infty$ следует

$$P(A) \sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}} \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t)\, dt T_{\lambda(0)}. \quad (42)$$

Заменяя числитель и знаменатель в (40) на эквивалентные величины из (41) и (42), находим при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$ и номеру i

$$P\{U_i, \tau_i^- > x\} \to$$

$$\to \frac{\sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt}{\sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t)\, dt}, \quad x \ge 0.$$

Отсюда, из (39) и определения функции $F(x)$ при $N \to \infty$ равномерно по номеру i получаем $\lim \sup_{x \ge 0} \left| P\{\tau_i^- > x\} - [1 - F(x)] \right| = 0$, откуда, согласно равенству $P\{\tau_i^- \le x\} = 1 - P\{\tau_i^- > x\}$, следует, что при $N \to \infty$ равномерно по номеру i $\lim \sup_{x \ge 0} \left| P\{\tau_i^- \le x\} - F(x) \right| = 0$, где

$$F(x) = 1 - \frac{\sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt}{\sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{t>u} (t-u)^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t)\, dt}, \quad x \ge 0.$$

Теорема 1 доказана.

The asymptotic distributions of time are obtained when the sets of circular united complex systems with reserve of time are in the out order. This occurs provided that the systems number increases in inverse proportion to failure intensity of complex system elements in such a way that

the total load on the queueing system is bounded from the top by the value below unit with the system units maintenance as far as they arise.

1. *Макаричев А. В.* Надежность комплексов сложных восстанавливаемых систем // Электрон. моделирование. — 2004. — **26,** № 2. — С. 57—77.
2. *Макаричев А. В.* Асимптотические оценки периода регенерации комплексов сложных восстанавливаемых систем при различных дисциплинах обслуживания// Там же. — 2003. — **25**, № 2. — С. 83—97.
3. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М. : Наука, 1967. — 244 с.
4. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. — М. : Сов. радио, 1967. — 299 с.
5. *Макаричев А. В.* Надежность циклических соединений в комплекс сложных восстанавливаемых систем с временным резервом. I. //Электрон. моделирование. — 2007. — **29**, № 5. — С. 63—73.
6. *Макаричев А. В.* Надежность циклических соединений в комплекс сложных восстанавливаемых систем с временным резервом. II. // Там же. — 2007. — **29**, № 6. — С. 93—105.

Поступила 10.05.11

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. В 1981 г. окончил Московский государственный университет им. М. Ломоносова. Область научных исследований — вопросы теории вероятностей, теории восстанавливаемых систем, оптимизация характеристик надежности комплексов сложных восстанавливаемых систем.