УДК 681.5.01

С. Е. Саух, д-р техн. наук
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины,
(Украина, 03164, Киев ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4249164, E-mail: saukh@svitonline.com)

Математическое моделирование энергетических цепей

Представлен подход к математическому моделированию энергетических систем, основанный на теории энергетических цепей и энергетических аналогиях. Показаны широкие возможности математического моделирования энергетических цепей как инструмента исследования сложных энергетических систем, для которых свойственны разнообразие системообразующих объектов, неоднородность наблюдаемых физических явлений и математическая сложность их описания. Возможности математического и компьютерного моделирования энергетических цепей рассмотрены на примере газотранспортных систем.

Представлено підхід до математичного моделювання енергетичних систем, базований на теорії енергетичних кіл і енергетичних аналогіях. Показано широкі можливості математичного моделювання енергетичних кіл як інструмента дослідження складних енергетичних систем, яким притаманні різноманітність системоутворюючих об’єктів, неоднорідність спостережуваних фізичних явищ і математична складність їхнього опису. Можливості математичного та комп’ютерного моделювання енергетичних кіл розглянуто на прикладі газотранспортних систем.

Ключевые слова: энергетические аналогии, параллельная переменная, последовательная переменная, энергетическая цепь, математическая модель, энергетическая система.

Основные трудности, возникающие при моделировании сложных систем энергетики, связаны с неоднородностью наблюдаемых физических явлений и сложностью их математического описания, значительным разнообразием системообразующих элементов, а также жесткими ограничениями на длительность вычислительных экспериментов, в течение которых получаемая информация не теряет актуальности.

Комплексное решение проблемы создания компьютерных моделей энергетических систем возможно в рамках единого подхода, который обеспечивает согласованное построение физико-математических моделей и вычислительных алгоритмов.

Термин «энергетическая цепь» введен для обобщенного представления свойств компонентов технологической цепи добычи (генерации) и доставки энергоресурса потребителю. При этом учитываются общие закономерности, свойственные энергетической цепи в целом, не зависящие от свойств конкретного вида энергоресурса.

Существующие теории однородных по физическим явлениям цепей (электрических, механических, гидравлических, пневмогидравлических, тепловых и др.) являются основой для построения физико-математических моделей этих явлений и соответствующих технических систем. Характерная особенность энергетических систем — неоднородность физических явлений, которые должны быть описаны в модели, т.е. одновременно в одной системе наблюдаются электромеханические, электромагнитные, теплогидравлические, магнитогидродинамические и другие взаимосвязанные процессы. Поэтому для построения физико-математических моделей энергетических систем введено понятие энергетической цепи.

Основные положения теории энергетических цепей с сосредоточенными параметрами описаны в работах [1, 2], в которых обобщены базовые понятия теорий электрических, механических, гидравлических и других однородных цепей. Такое обобщение выполнено на основе аналогий в способах измерения количественных характеристик основных понятий (переменных). Переменные классифицируются по следующему принципу: они считаются однотипными, если однотипным оказывается способ включения в цепь приборов для их измерения, которые хотя бы в принципе можно подключить одним из двух способов — параллельно или последовательно. Переменные, измеряемые последовательно подключенными приборами, названы последовательными обобщенными переменными, а измеряемые параллельно подключенными приборами — параллельными обобщенными переменными.

Дальнейшее развитие теории связано с необходимостью классифицировать не отдельные системы переменных, описывающие различные физические явления, а группы систем переменных, описывающих группы взаимосвязанных физических явлений (табл. 1, 2).

Такая классификация выполнена на основе обобщенного подхода более высокого уровня — принципа энергетических аналогий [3], в соответствии с которым:

• введено понятие обобщенных переменных действия и переменных состояния, при этом переменные действия определяют мощность рассеивания энергии в элементе, а переменные состояния являются изменяющимися во времени интегральными характеристиками переменных действия;

• мощность рассеивания энергии в элементе определяется произведением паралельных и последовательных переменных действия;

• кинетическая энергия определяется интегрированием последовательных переменных действия по последовательным переменным состояния;

Таблица 1

Физическое явление	Переменные состояния		Переменные действия	
	Параллельные	Последовательные	Параллельные	Последовательные
Электричество	Заряд q, К	Магнитный поток Φ, Вб	Напряжение $u = d\Phi / dt$, В	Сила тока $i = dq / dt$, А
Механика	Перемещение x, м	Импульс K, кг·м/с	Сила $F = dK / dt$, Н	Линейная скорость $\upsilon = dx / dt$, м/с
	Угол поворота θ, рад	Момент импульса М, кг·м^2/с	Момент силы $N = dM / dt$, Нм	Угловая скорость $\omega = d\theta / dt$, рад/с
Теплота	Энтропия S, Дж/К	Не определено	Температура T, К	Поток энтропии $\sigma = dS / dt$, Вт/К
Гидравлика	Перемещение $x_Г$, м	Импульс движущейся жидкости $K_Г = \int\limits_V \rho \frac{dx_Г}{dt} dV$, (кг·м)/с, где ρ — плотность, кг/м^3; V — объем, м^3	Сила напора $F_Г = \int\limits_П p dП = \frac{dK_Г}{dt}$, Н, где П — поверхность объема V, м^2; p — давление, Па	Средняя в поперечном сечении скорость движения жидкости $\upsilon_Г = dx_Г / dt$, м/с

Таблица 2

Физическое явление	Мощность	Кинетическая энергия	Потенциальная энергия
Электричество	$P_E = ui = P_E i^2 = G_E u^2$	$W_E^K = \int\limits_0^\Phi i d\Phi = L_E \frac{i^2}{2}$	$W_E^П = \int\limits_0^q u dq = C_E \frac{u^2}{2}$
Механика	$P_{МП} = F\upsilon = P_{МП}\upsilon^2 = G_{МП} F^2$	$W_{МП}^K = \int\limits_0^K \upsilon dK = L_{МП} \frac{\upsilon^2}{2}$	$W_{МП}^П = \int\limits_0^x F dx = C_{МП} \frac{F^2}{2}$
	$P_{МВ} = N\omega = P_{МВ}\omega^2 = G_{МВ} N^2$	$W_{МВ}^K = \int\limits_0^M \omega dM = L_{МВ} \frac{\omega^2}{2}$	$W_{МВ}^П = \int\limits_0^\theta N d\theta = C_{МВ} \frac{N^2}{2}$
Теплота	$P_T = T\sigma = P_T \sigma^2 = G_T T^2$	Не определено	$W_T^П = \int\limits_0^S T dS = C_T \frac{T^2}{2}$
Гидравлика	$P_Г = F_Г \upsilon_Г = P_Г \upsilon_Г^2 = G_Г F_Г^2$	$W_Г^K = \int\limits_0^{K_Г} \upsilon_Г dK_Г = L_Г \frac{\upsilon_Г^2}{2}$	$W_Г^П = \int\limits_0^{x_Г} F_Г dx_Г = C_Г \frac{F_Г^2}{2}$

Примечания: *МП* — механика, поступательное движение; *МВ* — механика, вращательное движение.

• потенциальная энергия определяется интегрированием параллельных переменных действия по параллельным переменным состояния.

Взаимосвязанные явления в элементах с сосредоточенными параметрами. Глубинный смысл энергетических аналогий проявляется в возможности использования законов сохранения энергии для создания моделей элементов энергетических цепей, в которых наблюдаются неоднородные физические явления, а введение векторных групп обобщенных последовательных и параллельных переменных дает возможность описать взаимосвязи между переменными с помощью матричных аналогов сопротивлений, проводимостей, емкостей и индуктивностей. В результате оказывается возможным применять базовые принципы и методы анализа электрических цепей для анализа энергетических цепей [3, 4].

Закон сохранения энергии в пассивных элементах энергетической цепи с сосредоточенными параметрами представляется в виде тождества $dW^{Д} + dW^{К} + dW^{П} = 0$, в котором слагаемыми являются энергия диссипации

$$dW^{Д} = (\mathbf{u}, \mathbf{i})\, dt,$$

кинетическая энергия

$$dW^{К} = d\,(\mathbf{L}\cdot\mathbf{i}, \mathbf{i})/2 = (\mathbf{L}\cdot\mathbf{i},\, d\mathbf{i}),$$

потенциальная энергия

$$dW^{П} = d\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{u}, d\mathbf{u}).$$

Здесь $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$; , $\mathbf{u}$, $\mathbf{i}$ — векторы параллельных и последовательных переменных,

$$\mathbf{u} = |u\, F\;\, N\, T\, F_{Г}|^{T},$$

$$\mathbf{i} = |i\, \upsilon\, \omega\sigma\; \upsilon_{Г}|^{T};$$

$\mathbf{L}$, $\mathbf{C}$ —матрицы параметров с диагональными элементами (табл. 3),

$$diag\mathbf{L} = |L_E\; L_{МП}\;\, L_{МВ}\; L_T\;\, L_{Г}|,$$

$$diag\,\mathbf{C} = |C_E\; C_{МП}\;\, C_{МВ}\; C_T\;\, C_{Г}|.$$

Очевидно, что недиагональные элементы матричных параметров определяются характеристиками взаимосвязей физических явлений.

Однородные явления в элементах с распределенными параметрами резистивного типа. В таких элементах процессы определяются обобщенной зависимостью

$$J = \gamma E, \tag{1}$$

где γ — удельная проводимость потока J, вызванного напряженностью E.

Таблица 3

Физическое явление	Сосредоточенный параметр элементов			
	Сопротивление	Проводимость	Индуктивность	Емкость
Электричество	$R_E = \frac{du}{di}$, Ом	$G_E = \frac{di}{du}$, См	$L_E = \frac{d\Phi}{di}$, Гн	$C_E = \frac{dq}{du}$, Ф
Механика	$R_{МП} = \frac{dF}{d\upsilon}, \frac{\text{Нс}}{\text{м}}$	$G_{МП} = \frac{d\upsilon}{dF}, \frac{\text{м}}{\text{Нс}}$	$L_{МП} = \frac{dK}{d\upsilon}$, кг	$C_{МП} = \frac{dx}{dF}$, м / Н
	$R_{МВ} = \frac{dN}{d\omega}$, Нсм	$G_{МВ} = \frac{d\omega}{dN}$, Н$^{-1}$с$^{-1}$м$^{-1}$	$L_{МВ} = \frac{dM}{d\omega}$, кгм^2	$C_{МВ} = \frac{d\theta}{dN}$, Н$^{-1}$м$^{-1}$
Теплота	$R_T = \frac{dT}{d\sigma}$, К^2/Вт	$G_T = \frac{d\sigma}{dT}$, Вт/К^2	Не определено	$C_T = \frac{dS}{dT}$, Дж/К^2
Гидравлика	$R_Г = \frac{dF_Г}{d\upsilon_Г}, \frac{\text{Нс}}{\text{м}}$	$G_Г = \frac{d\upsilon_Г}{dF_Г}, \frac{\text{м}}{\text{Нс}}$	$L_Г = \frac{dK_Г}{d\upsilon_Г}$, кг	$C_Г = \frac{dx_Г}{dF_Г}$, м / Н

В частности, для элементов однородных систем зависимость (1) формулируется на основании

• закона Ома, т.е. связь между плотностью J_E электрического тока и градиентом потенциала φ имеет вид

$$J_E = -\gamma_E \operatorname{grad}(\varphi) = \gamma_E E_E, \quad \gamma_E > 0, \quad E_E = -\operatorname{grad}(\varphi);$$

• закона Фурье, т.е. связь между плотностью J_T теплового потока и градиентом температуры T имеет вид

$$J_T = -\gamma_T \operatorname{grad}(T) = \gamma_T E_T, \quad \gamma_T > 0, \quad E_T = -\operatorname{grad}(T);$$

• закона Дарси, т.е. связь между плотностью $J_Г$ потока компонента смеси и градиентом давления p имеет вид

$$J_Г = -\gamma_Г \operatorname{grad}(p) = \gamma_Г E_Г, \quad \gamma_Г > 0, \quad E_Г = -\operatorname{grad}(p).$$

Неоднородные явления в элементах с распределенными параметрами резистивного типа. Для таких элементов обобщаются законы Ома, Фурье, Дарси и им подобные в векторно-матричном виде

$$\mathbf{J} = \Gamma \mathbf{E}, \tag{2}$$

где Г — матрица проводимости;

$$\mathbf{E} = |E_E \; E_{МП} \; E_{МВ} \; E_T \; E_Г|, \quad \mathbf{J} = |J_E \; J_{МП} \; J_{МВ} \; J_T \; J_Г|.$$

При этом

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Omega} = \mathbf{i}, \quad \int\limits_{H} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{H} = \mathbf{u},$$

где $d\mathbf{\Omega}$ — нормаль к элементу $d\Omega$ поверхности Ω длиной, равной его площади; $d\mathbf{H}$ — вектор длиной dН, ориентированный в направлении обхода кривой H. Потоки вектора плотностей потоков **J** через поверхность Ω определяют вектор последовательных переменных действия **i**, а циркуляция вектора напряженностей **E** вдоль кривой H определяет вектор параллельных переменных действия **u**.

Соотношением (2) воспользовался Л. Онзагер [5], формулируя постулат о линейной зависимости между потоками и напряженностями для термоэлектрических явлений:

$$J_E = \gamma_E E_E + \gamma_{ET} E_T; \quad J_T = \gamma_{TE} E_E + \gamma_T E_T,$$

где $\gamma_{ET} = \gamma_{TE}$ — кинетические коэффициенты термоэлектричества, равенство которых вытекает из принципа симметричности взаимодействия тепловых и электрических явлений.

Законы Кирхгофа в энергетической цепи. Придерживаясь принятых обозначений, легко записать первый и второй законы Кирхгофа для энергетической цепи в обобщенном виде.

Первый закон Кирхгофа:

дифференциальная форма — $\oint\limits_{\Omega_n} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Omega}_n = 0$;

интегральная форма — $\sum\limits_{n} \mathbf{i} = 0.$

Второй закон Кирхгофа:

дифференциальная форма — $\oint\limits_{H_k} \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{H}_k = 0$;

интегральная форма — $\sum\limits_{k} \mathbf{u} = 0$,

где n — узел цепи, представляющий собой замкнутую область пространства Ω_n, охватывающую границы соединенных между собой элементов энергетической цепи, в схеме соединения элементов которой можно выделить k-й независимый контур, образующий замкнутую кривую H_k.

Известные принцип минимума теплового действия в электрической цепи, принцип минимума производства энтропии и классический экстремальный принцип механики можно представить обобщенным экстремальным принципом действия в энергетической цепи в виде

$$\min P_{\Sigma} = \min \sum_{z} (\mathbf{u}_z, \mathbf{i}_z).$$

Энергетическая цепь как модель газотранспортной сети. Изложенные принципы построения моделей обобщенной энергетичной цепи были распространены на газотранспортные сети произвольной топологии [4, 6], что позволило создать программные средства моделирования стационарных и переходных режимов работы магистральных газопроводов. Для этого в пределах предложенной классификации проанализированы переменные, относительно которых построены математические модели отдельных объектов сети (участки труб, оборудование компрессорных станций), в частности такие:

системы уравнений нестационарного неизотермического течения газа в трубе постоянного диаметра при параметрически заданных граничных условиях;

системы уравнений сжатия и охлаждения газа в оборудовании компрессорных станций;

балансовые уравнения для потоков масс $M(t)$ и потоков энергий $M(t)$ $T(t)$ в узлах сети $n \in n_{\text{in}} \bigcup n_{\text{out}}$, где n_{in} и n_{out} — множества всех внутренних и граничных узлов.

Учитывая взаимосвязь тепловых и гидравлических явлений, которые наблюдаются при транспортировке газа, для указанных моделей в качестве последовательных и параллельных переменных действия предложены векторные функции $\mathbf{i} = |M\ MT|^T$, $\mathbf{u} = |p\ T|^T$, в которые входят функции массового расхода M, давления p, температуры газа T.

Для алгебраизации систем нелинейных уравнений нестационарного неизотермического течения газа в трубах использованы оригинальные числовые операторные методы, построенные на полиномах Ньютона [7]. Такие методы обеспечивают одинаково высокую точность аппроксимации частных производных как в середине областей определения независимых переменных, так и на их границах.

Алгебраизованные уравнения модели объектов газотранспортной сети после линеаризации имеют вид

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_{\text{in}}(\tau) \\ \mathbf{i}_{\text{out}}(\tau) \end{vmatrix} = \mathbf{G} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_{\text{in}}(\tau) \\ \mathbf{u}_{\text{out}}(\tau) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i}^0_{\text{in}}(\tau) \\ \mathbf{i}^0_{\text{out}}(\tau) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где τ — множество дискретных значений независимой переменной времени t, на котором аппроксимируется решение систем уравнений нестационарного неизотермического течения газа в трубах; $\mathbf{u}_{\text{in}}(\tau)$ и $\mathbf{u}_{\text{out}}(\tau)$ — векторы неизвестных параллельных переменных действия в узлах сети, к которым подключен данный объект газотранспортной системы; $\mathbf{i}_{\text{in}}(\tau)$ и $\mathbf{i}_{\text{out}}(\tau)$ — векторы последовательных переменных действия на входе и выходе объекта; $\mathbf{G}$ — матрица проводимостей объектов сети; $\mathbf{i}^0_{\text{in}}(\tau)$ и $\mathbf{i}^0_{\text{out}}(\tau)$ — векторы констант линейных функций.

С использованием операторных уравнений элементов сети вида (3), на основе балансовых уравнений для потоков масс $M(t)$ и потоков энергий $M(t)T(t)$ в узлах сети предложены формализованные алгоритмы построения модели газотранспортной сети произвольной топологии. Такое построение можно осуществить на основе обобщенного метода узловых термогидравлических потенциалов, аналогичного методу узловых потенциалов в теории электрических цепей.

Энергетические цепи большой размерности. При моделировании промышленных сетевых энергосистем системы балансовых уравнений энергетических цепей, порождаемые обобщенным методом узловых потенциалов, являются разреженными системами большой размерности, которые имеют блочно-симметричную структуру. Для ускоренного решения таких систем в условиях жестких ограничений оперативной памяти предложены методы полной столбцово-строчной (*CR*) и неполной столбцово-строчной (*ICR*) факторизации несимметричных матриц [8, 9].

Метод *CR*-факторизации матриц принципиально отличается от известного метода *LU*-факторизации свойством адаптивности к динамически выбираемым ведущим элементам, что позволяет отказаться от процедуры перестановок строк и столбцов в процессе вычисления факторных матриц.

Преимущества метода подтверждены результатами его тестирования на множестве матриц большой размерности. Установлено, что при прочих равных условиях относительно точности полученных решений и задействованных объемов памяти метод *CR*-факторизации предпочтительнее метода *LU*-факторизации, так как позволяет существенно (в среднем более чем на треть) сократить время решения систем алгебраических уравнений большой размерности.

Преимущества метода *ICR*-факторизации над методом *ILU*-факторизации и его модификациями заключается в достижении высокой аппроксимационной точности формируемых факторных матриц при экономичном использовании ресурсов памяти, что подтверждается экспериментально на множестве тестовых примеров при использовании формируемых факторных матриц в качестве предобусловливателей в итерационных методах Крылова (типа GMRES(m) и BiCGStab).

Использование методов *CR*- и *ICR*-факторизации открывает новые возможности компьютерного моделирования энергетических систем, имеющих топологические сложности. Например для моделей энергетических систем с числом системообразующих объектов приблизительно от 10^3 до 10^5 решение соответствующих балансовых систем линеаризованных алгебраических уравнений с числом обусловленности до 10^9—10^{11} осуществляется за время от 10^{-1} до 10^2с на компьютере Pentium IV/3.0GHz/1.0Gb.

Выводы

Подход к математическому описанию энергетических систем, основанный на понятии энергетических цепей и энергетических аналогиях, позволяет создавать компьютерные модели, эффективно воспроизводящие процессы неоднородной физической природы в таких системах. Разработанные методы численного анализа сложных математических моделей большой размерности обеспечивают выполнение жестких требований к точности и длительности вычислительных экспериментов, за время проведения которых порождаемая информация не теряет актуальности для пользователей.

The paper deals with an approach to mathematical modeling of power systems based on the theory of power chains and power analogies. Great potentialities of mathematical modeling of the power chains as an instrument for studying the complex power systems are shown, the diversity of objects which form a system, heterogeneity of observed physical phenomena and mathematical complicacy of their description being characteristic of them. Potentialities of mathematical and computer modeling of the power chains have been considered on the example of gas transportation systems.

1. *Trent H. M.* Isomorphism between oriented linear graphs and lumped physical system // J. Acoustic America — 1955. — N 5. — P. 500 — 527.
2. *Бердников В. В.* Прикладная теория гидравлических цепей. — М. : Машиностроение, 1977. — 192 с.
3. *Саух С.М.* Енергетичні аналогії в теорії енергетичних кіл // Доп. НАН України. — 2003. — N 12. — С. 76 — 83.
4. *Saukh S. Ye.* Multi-physics processes simulation on a basis of the energetic analogies // Proc. of the International conference on Electrical and Control Technologies. — Kaunas : Kaunas University of Technology, 2006. — P. 201 — 206.
5. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. — М. : Мир, 2002. — 461 с.
6. *Саух С. Е.* Особенности математического моделирования газотранспортных систем. — Киев, 1987. — 48 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; N 94).

7. *Береговенко Г. Я., Пухов Г. Е., Саух С. Е.* Численные операторные методы решения дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. — Киев : Наук. думка, 1992. — 262 с.
8. *Саух С. Е.* Метод CR-факторизации матриц большой размерности // Электрон. моделирование. — 2007. — **29**, N 6. — С. 3 — 22.
9. *Саух С. Е.* Неполная столбцово-строчная факторизация матриц для итерационного решения больших систем уравнений // Там же. — 2010. — **32**, N 6. — С. 3 — 14.

Поступила 08.12.10

САУХ Сергей Евгеньевич, д-р техн. наук, гл. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — численные операторные методы решения дифференциальных уравнений, декомпозиционные и итерационные методы решения линейных систем большой мерности, математическое моделирование технологических процессов в энергетике и газотранспортных системах, экономико-математические методы моделирования финансовых и макроэкономических процессов.