УДК 519.95

Ф. Г. Фейзиев, д-р физ.-мат. наук, **З. А. Самедова**
Сумгаитский государственный университет
(Азербайджан, AZ-5008, Сумгаит, 43 квартал,
тел.(99418) 6483887, E-mail: FeyziyevFG@mail.ru)

Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3*D*-нелинейных модулярных динамических систем

Рассмотрено представление полной реакции 3*D*-нелинейной модулярной динамической системы в виде двузначного аналога полинома Вольтерры и нахождение неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностях рассматриваемой системы.

Розглянуто зображення повної реакції 3*D*-нелінійної модулярної динамічної системи у вигляді двозначного аналогу полінома Вольтери та знаходження невідомих коефіцієнтів цього полінома при відомих вхідній та вихідній послідовностях системи, що розглядається.

Ключевые слова: последовательностные машины, 3D-нелинейные модулярные системы.

Конечные последовательностные машины (КПМ) [1—4] относятся к классу дискретных динамических систем, в которых входные, выходные последовательности и последовательности состояния принимают значения из конечного множества. КПМ широко применяются в вычислительной технике, в системах диагностики, при кодировании и декодировании дискретных сообщений, в криптографии, для защиты данных и программного обеспечения ЭВМ, в управлении непрерывных объектов и других областях науки и техники [1, 3, 5—9].

Функция перехода и функция выхода КПМ таковы, что при изменении их аргументов в конечном множестве они принимают значения, являющиеся элементами того же конечного множества. Когда это конечное множество является конечным полем $GF(p)$ (или его расширением), функции перехода и выхода КПМ могут быть представлены с помощью операции сложения и умножения по $\mathrm{mod}\, p$ (или по mod простого многочлена, с помощью которого получено расширение конечного поля), где p — простое число. В этом случае КПМ можно также называть модулярной динамической системой (МДС).

В настоящее время исследованы однопараметрические и многопараметрические классы МДС, являющиеся подклассом общих дискретных многопараметрических систем, или nD-систем [4, 10, 11] (см. также библиографию в [3, 4]). Многопараметрические МДС (или nD-МДС) представляют собой обычные МДС, эволюционирующие не только в дискретном времени, но и в дискретном (клеточном) пространстве. При этом nD-МДС является конечной системой с пространственной структурой и имеет более широкое применение, чем обычная однопараметрическая МДС. Однако до настоящего времени исследованы в основном $2D$-МДС. В работах [2, 3, 8, 9, 12—14] исследованы линейные и нелинейные классы $2D$-МДС и получены важные теоретические и практические результаты.

В работах [2, 3, 8, 9] рассмотрены вопросы аналитического представления некоторых классов двоичных $2D$-нелинейных модулярных динамических систем ($2D$-НМДС) в виде двузначных аналогов полинома Вольтерры, а также рассмотрены решения задачи квадратичной оптимизации для некоторых классов двоичных $2D$-НМДС, заданных в виде двузначных аналогов полинома Вольтерры.

В работах [13, 14] исследовано применение двоичных нелинейных $2D$-НМДС, заданных в виде двузначных аналогов полинома Вольтерры, при моделировании некоторых объектов с распределенными параметрами. На основе полученных результатов разработана методика построения систем с $2D$-НМДС для управления непрерывными многосвязными объектами и объектами с распределенными параметрами [9] и построены системы поддержания оптимальных режимов работы скважины в газлифтной нефтедобыче.

Следует заметить, что в работах [9, 13, 14] рассмотрены двухпараметрические объекты, а большинство исследуемых процессов в нефтегазовых, нефтехимических, энергетических и других отраслях, имеют более двух параметров, и поэтому полученные результаты для них непригодны. При этом nD-НМДС ($n \geq 3$) являются обобщением $2D$-НМДС и могут быть моделью объектов с более двумя параметрами. Однако до настоящего времени они не исследованы. Поэтому несомненный интерес представляет исследование различных классов nD-НМДС.

Как известно, постановка той или иной задачи анализа и синтеза для рассматриваемой системы основана на уравнении, описывающем поведение этой системы. Поэтому для исследования различных классов nD-НМДС прежде всего необходимо вывести уравнение, описывающее поведение их в пространстве состояний, или уравнение, описывающее их входные и выходные зависимости.

Постановка задачи. Рассмотрим 3D-НМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$, которая характеризуется следующим функциональным соотношением:

$$y[n, c_1, c_2] = G\{u[m, c_1 + p_1, c_2 + p_2] | n - n_0 \le m \le n,$$
$$p_1 \in P_1, \ p_2 \in P_2\}, \ GF(2), \qquad (1)$$

где $n \in T = \{0, 1, 2, ...\}$, $c_i \in \{..., -1, 0, 1, ...\}$, $i = \overline{1, 2}$; $y[n, c_1, c_2] \in GF(2)$ и $u[n, c_1, c_2] \in GF(2)$ — выходная и входная последовательности НМДС.

Пусть $P_i = \{p_i(1), ..., p_i(r_i)\}$, $p_i(1) < ... < p_i(r_i)$, $p_i(j) \in \{..., -1, 0, 1, ...\}$, $j = 1, ..., r_i$, $i = \overline{1, 2}$, и, кроме того, $p_i(1)$ и $p_i(r_i)$ — конечные целые числа $(i = \overline{1, 2})$.

Задача аналитического представления полной реакции 3D-НМДС (1) состоит в представлении оператора $G\{...\}$ в виде двузначного аналога полинома Вольтерры и определении неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностях рассматриваемой системы.

Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3D-НМДС. В (1) оператор $G\{...\}$ можно записать в виде отображений, зависящих от $(n_0 + 1) r_1 r_2$ аргументов:

$$G\{...\} = f\,(u[n - n_0, c_1 + p_1(1), c_2 + p_2(1)], u[n - n_0, c_1 + p_1(1), c_2 + p_2(2)], ...$$
$$..., u[n - n_0, c_1 + p_1(1), c_2 + p_2(r_2)], ..., u[n - n_0, c_1 + p_1(r_1), c_2 + p_2(r_2)], ...$$
$$..., u[n, c_1 + p_1(r_1), c_2 + p_2(r_2)]). \qquad (2)$$

Ясно, что в каждой точке (n, c_1, c_2) модулярную функцию f можно представить в виде полинома над конечным полем $GF(2)$ с помощью произведения элементов множества U в различных возможных комбинациях:

$$U = \{u[n, c_1 + p_1(1), c_2 + p_2(1)], \ u[n, c_1 + p_1(1), c_2 + p_2(2)], ...$$
$$..., u[n, c_1 + p_1(1), c_2 + p_2(r_2)], ..., u[n, c_1 + p_1(r_1), c_2 + p_2(r_2)], ...$$
$$..., u[n - n_0, c_1 + p_1(r_1), c_2 + p_2(r_2)]\}. \qquad (3)$$

В возможных комбинациях произведений элементов из U число множителей, т.е. степеней нелинейности, может быть от нуля до $(n_0 + 1) r_1 r_2$. Каждое такое произведение можно представить как элементарное.

Выберем произвольное значение $i \in \{0, ..., (n_0 + 1) r_1 r_2\}$ и рассмотрим произведения элементов из (3) в различных комбинациях, степень нелинейности которых равна i. Пусть в произвольно выбранном произведении для каждой пары (α, β) из множества $U_{\alpha,\beta} = \{u[\xi,\ c_1 + p_1(\alpha),\ c_2 + p_2(\beta)] | \xi = 0, 1, ..., n_0\}$ участвуют множители, число которых составляет $m_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = 1, ..., r_1$, $\beta = 1, ..., r_2$. Тогда должно быть удовлетворено следующее равенство:

$$\sum_{\alpha=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{r_2} m_{\alpha,\beta} = i .$$

Пусть

$$\Phi(i) = \{\overline{m} = (m_{1,1}, ..., m_{1,r_2}, ..., m_{r_1,r_2}) | m_{\ell,k} \in \{0, ..., n_0 + 1\},$$
$$\ell = \overline{1, r_1}, k = \overline{1, r_2},\ \sum_{\alpha=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{r_2} m_{\alpha,\beta} = i\}, \tag{4}$$

$$Q(i, \overline{m}) = \{(\alpha, \beta) | m_{\alpha,\beta} \text{ — компонента } \overline{m} \text{ и } m_{\alpha,\beta} \neq 0,\ \alpha = \overline{1, r_1}, \beta = \overline{1, r_2}\}. \tag{5}$$

Рассмотренное произведение со степенью нелинейности i в общем виде можно записать в виде

$$\prod_{(\alpha,\beta) \in Q(i,\overline{m})} \prod_{\sigma_{\alpha,\beta}=1}^{m_{\alpha,\beta}} u[n - n_1(\alpha, \beta, \sigma_{\alpha,\beta}), c_1 + p_1(\alpha), c_2 + p_2(\beta)]. \tag{6}$$

Фиксируем $i \in \{1, ..., (n_0 + 1) r_1 r_2\}$ и $\overline{m} \in \Phi(i)$. Для всех $(\alpha, \beta) \in Q(i, \overline{m})$ введем обозначение

$$\Gamma_1(m_{\alpha,\beta}) = \{\overline{n}_{\alpha,\beta} = (n_1(\alpha, \beta, 1), ..., n_1(\alpha, \beta, m_{\alpha,\beta})) | 0 \le n_1(\alpha, \beta, 1) < ...$$
$$... < n_1(\alpha, \beta, m_{\alpha,\beta}) \le n_0\} . \tag{7}$$

Для всех $(\alpha, \beta) \in Q(\overline{m}, i)$ образуем из векторов $\overline{n}_{\alpha,\beta}$ блочный вектор n_2. Множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{n}_2$ обозначим $\Gamma(i, \overline{m})$. Очевидно, что каждому $\overline{n}_2 \in \Gamma(i, \overline{m})$ соответствует произведение вида (6).

Используя обозначения (4), (5), (7), можем записать $f(...)$ в виде следующего полинома:

$$f(...) = \sum_{i=0}^{(n_0+1)r_1 r_2} \sum_{\overline{m} \in \Phi(i)} \sum_{\overline{n}_2 \in \Gamma(i,\overline{m})} K_{i,\overline{m}}[\overline{n}_2] \prod_{(\alpha,\beta) \in Q(i,\overline{m})} \prod_{\sigma_{\alpha,\beta}}^{m_{\alpha,\beta}} u[n - n_1(\alpha, \beta, \sigma_{\alpha,\beta}), c +$$
$$+ p_1(\alpha), c_2 + p_2(\beta)],\ GF(2). \tag{8}$$

В случае $i = 0$ набор $\overline{m} \in \Phi(i)$ суть набор нулевых значений и поэтому вместо $K_{0,\overline{m}}[\overline{n}_2]$ будем писать K_0.

Пусть $i \in \{1, ..., r_1 r_2 (n_0 + 1)\}$ и $\overline{m} \in \Phi(i)$. На основе набора $\overline{m}$ построим матрицу $A(\overline{m}) = (m_{\alpha, \beta})$, $\alpha = \overline{1, r_1}$, $\beta = \overline{1, r_2}$. Удаляя нулевые столбцы и строки матрицы $A(\overline{m})$, построим матрицу $B(\overline{m})$. Обозначим размерность матрицы $B(\overline{m})$ через $\ell_1(\overline{m}) \times \ell_2(\overline{m})$. Ясно, что размерность матрицы $B(\overline{m})$ не превышает размерности матрицы $A(\overline{m})$, т.е. $\ell_1(\overline{m}) \le r_1$, $\ell_2(\overline{m}) \le r_2$. Для всех элементов множества $\Phi(i)$ таким же способом построим соответствующую матрицу $B(\overline{m})$.

Из элементов множества $\Phi(i)$ построим специальные подмножества:

1) любой элемент из множества $\Phi(i)$ входит только в одно специальное подмножество;

2) если для элементов $\overline{m}_1$ и $\overline{m}_2$ из множества $\Phi(i)$ соответствующие матрицы $B(m_1)$ и $B(m_2)$ совпадают, то оба элемента входят в одно и то же специальное подмножество.

Обозначим λ_i число специальных подмножеств множества $\Phi(i)$, а i_1-е специальное подмножество обозначим $\Phi_1(i, i_1)$. Тогда

$$\Phi_1(i,j) \cap \Phi_1(i,\ell) = \varnothing, \; j \ne \ell; \; \bigcup_{j=1}^{\lambda_i} \Phi_1(i,j) = \Phi(i).$$

Рассмотрим какое-либо подмножество $\Phi_1(i, i_1)$ множества $\Phi(i)$. Пусть этому подмножеству соответствует матрица B размерностью $\ell_1 \times \ell_2$: $B = (m'_{\alpha, \beta})$, $\alpha = \overline{1, \ell_1}$, $\beta = \overline{1, \ell_2}$. Тогда элементы множества $\Phi_1(i, i_1)$ можно представить в следующем виде:

$$m_{j_\alpha, \tau_\beta} = m'_{\alpha, \beta}, \; \alpha = \overline{1, \ell_1}, \beta = \overline{1, \ell_2}, \; m_{\sigma, \gamma} = 0,$$

$$\sigma \notin \{j_1, j_2, ..., j_{\ell_1}\}, \; \gamma \notin \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{\ell_2}\}.$$

Ясно, что каждой паре $(\bar{j}, \bar{\tau})$ соответствует элемент из множества $\Phi_1(i, i_1)$. Здесь $\bar{j} = (j_1, ..., j_{\ell_1})$ и $\bar{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_{\ell_2})$ являются наборами соответственно в $L_1(\ell_1)$ и $L_2(\ell_2)$, где

$$\begin{aligned} L_1(\ell_1) &= \{(j_1, ..., j_{\ell_1}) | 1 \le j_1 < ... < j_{\ell_1} \le r_1\}, \\ L_2(\ell_2) &= \{(\tau_1, ..., \tau_{\ell_2}) | 1 \le \tau_1 < ... < \tau_{\ell_2} \le r_2\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Введем следующие обозначения:

$$F(i) = \{(\ell_1, \ell_2, \overline{m}) | \overline{m} = (m_{1,1}, ..., m_{1,\ell_2}, ..., m_{\ell_1, \ell_2}), \; \sum_{\alpha=1}^{\ell_1} \sum_{\beta=1}^{\ell_2} m_{\alpha, \beta} = i;$$

$$m_{\alpha,\beta} \in \{0, ..., n_0 + 1\}, \; \alpha = \overline{1, \ell_1}, \; \beta = \overline{1, \ell_2}; \text{ для всех } \alpha \in \{1, ..., \ell_1\}$$

существует такое $\beta\in\{1,...,\ell_2\}$, что $m_{\alpha,\beta}\neq 0$, и для всех $\beta\in\{1,...,\ell_2\}$

существует такое $\alpha\in\{1,...,\ell_1\}$, что $m_{\alpha,\beta}\neq 0$; $\ell_\sigma\in\{1,...,r_\sigma\}$, $\sigma=\overline{1,2}\}$; (10)

$$Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\overline{m})=\{(\alpha,\beta)|m_{\alpha,\beta}\text{ — компонента }\overline{m}\text{ и }$$
$$m_{\alpha,\beta}\neq 0,\ \alpha=\overline{1,\ell_1},\ \beta=\overline{1,\ell_2}\}.$$

Каждому $(\ell_1,\ell_2,\overline{m}')\in F(i)$ соответствует специальное подмножество множества $\Phi(i)$. Пусть $\overline{m}=(m_{1,1},...,m_{1,\ell_2},...,m_{\ell_1,\ell_2})$, $\overline{n}_2=(\overline{n}_{1,1},...,\overline{n}_{1,\ell_2},...$ $...,\overline{n}_{\ell_1,\ell_2})$. При $\overline{n}_{\alpha,\beta}\in\Gamma_1(m_{\alpha,\beta})$, $(\alpha,\beta)\in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\overline{m})$, $\alpha=\overline{1,\ell_1}$, $\beta=\overline{1,\ell_2}$, множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{n}_2$ обозначим через $\Gamma(\ell_1,\ell_2,\overline{m})$. Очевидно, что каждой тройке $<\bar{j},\bar{\tau},\overline{n}_2>$ соответствует произведение вида

$$\prod_{(\alpha,\beta)\in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\overline{m})}\ \prod_{\sigma_{\alpha,\beta}=1}^{m_{\alpha,\beta}} u[n-n_1(\alpha,\beta,\sigma_{\alpha,\beta}),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\tau_\beta)],$$

где $\overline{n}_2\in\Gamma(\ell_1,\ell_2,\overline{m})$, $\bar{\tau}\in L_2(\ell_2)$, $\bar{j}\in L_1(\ell_1)$.

Используя (5), (7), (9), (10), можем записать (8) в виде следующего полинома:

$$f(...)=\sum_{i=0}^{(n_0+1)r_1r_2}\ \sum_{(\ell_1,\ell_2,\overline{m})\in F(i)}\ \sum_{\bar{j}\in L_1(\ell_1)}\ \sum_{\bar{\tau}\in L_2(\ell_2)}\ \sum_{\overline{n}_2\in\Gamma(\ell_1,\ell_2,\overline{m})} h_{i,\ell_1,\ell_2,\overline{m}}[\bar{j},\bar{\tau},\overline{n}_2]\times$$
$$\times\prod_{(\alpha,\beta)\in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\overline{m})}\ \prod_{\sigma=1}^{m_{\alpha,\beta}} u[n-n_1(\alpha,\beta,\sigma),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\tau_\beta)],\ GF(2). \tag{11}$$

В случае $i=0$ ясно, что $F(i)=\varnothing$, поэтому $h_{0,\ell_1,\ell_2,\overline{m}}[...]$ запишем в виде h_0.

Полиномы (8) и (11) представляют собой полиномы Жегалкина и, кроме того, являются двузначными аналогами полинома Вольтерры. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть справедливы соотношения (4), (5), (7), (9), (10). Тогда полная реакция 3*D*-НМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P=P_1\times P_2$, характеризуемая функциональным соотношением (1), может быть представлена в виде полинома (8) или (11).

Из теоремы (1) вытекает следующее.

Следствие 1. Пусть 2*D*-НМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P=\{\rho(1),...,\rho(r)\}$ $(\rho(1)<\rho(2)<...<\rho(r))$ описываются функциональным соотношением

$$y[n,c]=G\{u[m,c+p]|n-n_0\leq m\leq n,\ \ p\in P\},\ GF(2). \tag{12}$$

Тогда (12) может быть представлено в виде полинома

$$y[n,c]=\sum_{i=0}^{(n_0+1)r}\ \sum_{(\ell,\,\overline{m})\in F(i)}\ \sum_{\bar{j}\in L(\ell)}\ \sum_{\overline{n}_2\in\Gamma(\ell,\,\overline{m})} h_{i,\ell,\,\overline{m}}[\bar{j},\overline{n}_2]\times$$

$$\times\prod_{\alpha=1}^{\ell}\prod_{\sigma=1}^{m_\alpha} u[n-n_1(\alpha,\,\sigma),c+\rho(j_\alpha)],\ GF(2), \tag{13}$$

где

$$F(i)=\{(\ell,\overline{m})|\overline{m}=(m_1,\ldots,m_\ell),\ \sum_{\alpha=1}^{\ell}m_\alpha=i,\ m_\alpha\in\{1,\ldots,n_0+1\},$$

$$\alpha=\overline{1,\ell},\ \ell\in\{1,\ldots,r\}\},$$

$$L(\ell)=\{(j_1,\ldots,j_\ell)|1\le j_1<\ldots<j_\ell\le r\},$$

$$\Gamma_1(m_\alpha)=\{\overline{n}'_\alpha=(n_1(\alpha,1),\ldots,n_1(\alpha,m_\alpha))|0\le n_1(\alpha,1)<\ldots<n_1(\alpha,m_\alpha)\le n_0\},$$

$$\overline{n}_2=(\overline{n}'_1,\ldots,\overline{n}'_\ell),$$

а при $\overline{n}'_\alpha\in\Gamma_1(m_\alpha)$, $\alpha=\overline{1,\ell}$, множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{n}_2$ обозначено $\Gamma(\ell,\overline{m})$.

Нахождение неизвестных коэффициентов полиномиальных представлений для полной реакции 3*D*-НМДС. Пусть при заданных значениях входной последовательности $u[\gamma,c_1+p_1,c_2+p_2]$, $n-n_0\le\gamma\le n, p_1\in P_1$, $p_2\in P_2$, известны значения выходной последовательности. Найдем коэффициенты h_0, $h_{i,\ell_1,\,\ell_2,\,\overline{m}}[\bar{j},\,\bar{\tau},\,\overline{n}_2]$ для всех $\overline{n}_2\in\Gamma(\ell_1,\ell_2,\overline{m}),(\bar{j},\bar{\tau})\in L_1(\ell_1)\times$ $\times L_2(\ell_2)$, $i\in\{1,\ldots,(n_0+1)\,r_1r_2\}$, в полиноме (11), соответствующие известным входной и выходной последовательностям.

Число неизвестных коэффициентов в полиноме (11) составляет $2^{(n_0+1)\,r_1r_2}$. Число наборов значений $u[\gamma,c_1+p_1,c_2+p_2]$, $n-n_0\le\gamma\le n$, $p_1\in P_1$, $p_2\in P_2$, также равно $2^{(n_0+1)\,r_1r_2}$. Учитывая это, в правой части полинома (11) можно получить систему над $GF(2)$ из $2^{(n_0+1)\,r_1r_2}$ линейных алгебраических уравнений с $2^{(n_0+1)\,r_1r_2}$ неизвестными. Следует заметить, что коэффициенты неизвестных в этой системе образуются из произведений известных значений $u[\gamma,c_1+p_1,c_2+p_2]$, $n-n_0\le\gamma\le n$, $p_1\in P_1$, $p_2\in P_2$.

Нетрудно доказать, что эта система имеет единственное решение. Однако при возрастании значений n_0, r_1 и r_2 решить эту систему известными методами, например методом Крамера, Гаусса и другими, очень сложно. Структура полученной системы алгебраических уравнений такова, что для ее решения можно построить рекуррентные соотношения. Для этого введем обозначение

$$x_{ij\tau}=u[n-i,c_1+p_1(j),c_2+p_2(\tau)],\ j=\overline{1,r_1},\ \tau=\overline{1,r_2},\ i=\overline{0,n_0}, \tag{14}$$

с помощью которого получим

$$y[n, c_1, c_2] = f\,(x_{0,1,1}, \ldots, x_{0,1,r_2}, \ldots, x_{0,r_1,r_2}, \ldots, x_{n_0,r_1,r_2}).$$

Из (11) видно, что

$$h_0 = f(0, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots, 0). \tag{15}$$

Положим

$$X = \{x_{ij\tau} \,|\, i = 0, \ldots, n_0;\ \tau = 1, \ldots, r_2;\ j = 1, \ldots, r_1\}. \tag{16}$$

Пусть $x_{i_1, j_1, \tau_1} \in X$ является единственной переменной из множества X, принимающей значение 1, а остальные переменные из X, принимают значения 0. В этом случае обозначим через $f\,(x_{i_1, j_1, \tau_1} = 1)$ значение функции $f\,(\ldots)$. Учитывая значения переменных множества X, из (11) получаем

$$h_{1,1,1,(1)}[j_1, \tau_1, i_1] = h_0 + f\,(x_{i_1, j_1, \tau_1} = 1). \tag{17}$$

Согласно структуре упомянутых систем алгебраических уравнений справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $x_{i_1, j_1, \tau_1} = 1,\ t = \overline{1, m}$, а остальные переменные из множества X имеют значение 0. Через $f\,(x_{i_1, j_1, \tau_1} = 1 | t = \overline{1, m})$ обозначено значение $f\,(\ldots)$. Тогда для $h_{m,1,1,(m)}[(j_1), (\tau_1), (i_1, \ldots, i_m)]$ справедливо

$$h_{m,1,1,(m)}[(j_1), (\tau_1), (i_1, \ldots, i_m)] = f\,(x_{i_1, j_1, \tau_1} = 1 | t = \overline{1, m}) +$$

$$+ \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_t) \in \Omega_t(m)} h_{t,1,1,(t)}[(j_1), (\tau_1), (i_{\sigma_1}, \ldots, i_{\sigma_t})],\ GF(2), \tag{18}$$

где $\Omega_t(m) = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_t) | 1 \le \sigma_1 < \ldots < \sigma_t \le m\}$.

Лемма 2. Пусть $x_{i_1, j_\eta, \tau_1} = 1,\ \eta = \overline{1, \ell}$, а остальные переменные из X имеют значение 0. Через $f\,(x_{i_1, j_\eta, \tau_1} = 1 | \eta = \overline{1, \ell})$ обозначено значение $f\,(\ldots)$. Тогда справедливо следующее:

$$h_{\ell, \ell, 1, \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{\ell}}[(j_1, \ldots, j_\ell), (\tau_1), (\underbrace{(i_1), \ldots, (i_1)}_{\ell})] = f\,(x_{i_1, j_\eta, \tau_1} = 1 | \eta = \overline{1, \ell}) +$$

$$+ \sum_{\eta=0}^{\ell-1} \sum_{(s_1, \ldots, s_\eta) \in Q_\eta(\ell)} h_{\eta, \eta, 1, \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{\eta}}[(j_{s_1}, \ldots, j_{s_\eta}), (\tau_1), (\underbrace{(i_1), \ldots, (i_1)}_{\eta})],\ GF(2), \tag{19}$$

где $Q_\eta(\ell) = \{(s_1, \ldots, s_\eta) | 1 \le s_1 < \ldots < s_\eta \le \ell\}$.

Лемма 3. Пусть $x_{i_1, j_1, \tau_\gamma} = 1, \gamma = \overline{1, \ell}$, а остальные переменные из X имеют значение 0. Через $f(x_{i_1, j_1, \tau_\gamma} = 1 \mid \gamma = \overline{1, \ell})$ обозначено значение $f(...)$. Тогда справедливо соотношение

$$h_{\ell, 1, \ell, \underbrace{(1, ..., 1)}_{\ell}}[(j_1), (\tau_1, ..., \tau_\ell), \underbrace{((i_1), ..., (i_1))}_{\ell}] = f(x_{i_1, j_1, \tau_\gamma} = 1 \mid \gamma = \overline{1, \ell}) +$$

$$+ \sum_{\gamma=0}^{\ell-1} \sum_{(\xi_1, ..., \xi_\gamma) \in N_\gamma(\ell)} h_{\gamma, 1, \gamma, \underbrace{(1, ..., 1)}_{\gamma}}[(j_1), (\tau_{\xi_1}, ..., \tau_{\xi_\gamma}), \underbrace{((i_1), ..., (i_1))}_{\gamma}], \; GF(2), \qquad (20)$$

где $N_\gamma(\ell) = \{(\xi_1, ..., \xi_\gamma) \mid 1 \le \xi_1 < ... < \xi_\gamma \le \ell\}$.

Теперь предположим, что $x_{i_{\eta,\gamma,t}, j_\eta, \tau_\gamma} = 1$, $t = \overline{1, m_{\eta,\gamma}}$, $\eta = \overline{1, \ell_1}$, $\gamma = \overline{1, \ell_2}$, а остальные переменные из X имеют значение 0. В этом случае $f(...)$ обозначим через $f(x_{i_{\eta,\gamma,t}, j_\eta, \tau_\gamma} = 1 \mid t = \overline{1, m_{\eta,\gamma}}, \eta = \overline{1, \ell_1}, \gamma = \overline{1, \ell_2})$. Пусть

$$s^* = \sum_{\eta=1}^{\ell_1} \sum_{\gamma=1}^{\ell_2} m_{\eta,\gamma}.$$

Учтем значение $x_{ij\tau}$, $i = \overline{0, n_0}$, $j = \overline{1, r_1}$, $\tau = \overline{1, r_2}$, в (11). Тогда после удаления нулевых слагаемых из (11) получим

$$f(x_{i_{\eta,\gamma,t}, j_\eta, \tau_\gamma} = 1 \mid t = \overline{1, m_{\eta,\gamma}}, \; \eta = \overline{1, \ell_1}, \; \gamma = \overline{1, \ell_2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{s^*} \sum_{(\eta,\gamma,\bar{\nu}) \in F_1(\ell_1, \ell_2, \bar{m}, k)} \sum_{\bar{s} \in Q_\eta(\ell_1)} \sum_{\bar{\xi} \in N_\gamma(\ell_2)} \sum_{\bar{\sigma}' \in \Omega(\bar{\nu}, \bar{m}, \eta, \gamma)} h_{k, \eta, \gamma, \bar{\nu}}[\bar{j}_1(\bar{s}), \bar{\tau}_1(\bar{\xi}), \bar{i}_1(\bar{\sigma}')] \times$$

$$\times \prod_{(\alpha,\beta) \in \Delta(\eta, \gamma, \bar{\nu})} \prod_{t=1}^{\nu_{\alpha,\beta}} x_{i_{\alpha,\beta,\sigma_{\alpha,\beta,t}}, j_{s_\alpha}, \tau_{\xi_\beta}}, \; GF(2). \qquad (21)$$

Здесь

$$F_1(\ell_1, \ell_2, \bar{m}, k) = \{(\eta, \gamma, \bar{\nu}) \mid \eta \in \{1, ..., \ell_1\}, \gamma \in \{1, ..., \ell_2\}, \bar{\nu} = (\nu_{1,1}, ..., \nu_{1,\gamma}, ..., \nu_{\eta,\gamma}),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\eta} \sum_{\beta=1}^{\gamma} \nu_{\alpha,\beta} = k; \; \nu_{\alpha,\beta} \in \{0, ..., m_{s_\alpha, \xi_\beta}\}, \; \alpha = \overline{1, \eta}, \; \beta = \overline{1, \gamma}, \; (\alpha, \beta) \in Q_0(i, \ell_1, \ell_2, \bar{m})\},$$

$$Q_\eta(\ell_1) = \{(s_1, ..., s_\eta) \mid 1 \le s_1 < ... < s_\eta \le \ell_1\}, \; N_\gamma(\ell_2) = \{(\xi_1, ..., \xi_\gamma) \mid 1 \le \xi_1 < ... < \xi_\gamma \le \ell_2\},$$

$$\bar{j}(\bar{s}) = (j_{s_1}, j_{s_2}, ..., j_{s_\eta}), \; \bar{\tau}(\bar{\xi}) = (\tau_{\xi_1}, \tau_{\xi_2}, ..., \tau_{\xi_\gamma}),$$

$$\Omega(\bar{\nu}, \bar{m}, \eta, \gamma) = \mathop{X}_{\alpha=1}^{\eta} \mathop{X}_{\beta=1}^{\gamma} \Omega'_{\nu_{\alpha,\beta}}(m_{s_\alpha, \xi_\beta}),$$

$\Omega'_{\nu_{\alpha,\beta}}(m_{s_\alpha,\xi_\beta})=\{\overline{\sigma}_{\alpha,\beta}=(\sigma_{\alpha,\beta,1},...,\sigma_{\alpha,\beta,\nu_{\alpha,\beta}})|1\le\sigma_{\alpha,\beta,1}<...<\sigma_{\alpha,\beta,\nu_{\alpha,\beta}}\le m_{s_\alpha,\xi_\beta}\}$,

$\bar{i}_1(\overline{\sigma}_{\alpha,\beta})=(i_{\alpha,\beta,\sigma_{\alpha,\beta,1}},...,i_{\alpha,\beta,\sigma_{\alpha,\beta,\nu_{\alpha,\beta}}})$, $\bar{i}'_1(\overline{\sigma}')=(\bar{i}_1(\overline{\sigma}_{1,1}),...,\bar{i}_1(\overline{\sigma}_{1,\gamma}),...,\bar{i}_1(\overline{\sigma}_{\eta,\gamma}))$,

$\Delta(\eta,\gamma,\overline{\nu})=\{(\alpha,\beta)|\nu_{\alpha,\beta}$ — компонента $\overline{\nu}$ и $\nu_{\alpha,\beta}\ne0$, $\alpha=\overline{1,\eta}, \beta=\overline{1,\gamma}\}$.

Учитывая, что $x_{i_{\eta,\gamma,t},j_\eta,\tau_\gamma}=1$ при $t=\overline{1,\,m_{\eta,\gamma}}$, $\eta=\overline{1,\,\ell_1}$, $\gamma=\overline{1,\,\ell_2}$, из (21) получаем

$$f\,(x_{i_{\eta,\gamma,t},j_\eta,\tau_\gamma}=1\,|\,t=\overline{1,m_{\eta,\gamma}},\ \eta=\overline{1,\ell_1},\ \gamma=\overline{1,\ell_2})=$$

$$=\sum_{k=0}^{s^*}\ \sum_{(\eta,\gamma,\overline{\nu})\in F_1(\ell_1,\ell_2,\overline{m},k)}\ \sum_{\overline{s}\in Q_\eta(\ell_1)}\ \sum_{\overline{\xi}\in N_\gamma(\ell_2)}\ \sum_{\overline{\sigma}'\in\Omega(\overline{\nu},\overline{m},\eta,\gamma)} h_{k,\eta,\gamma,\overline{\nu}}[\bar{j}_1(\overline{s}),\overline{\tau}_1(\overline{\xi}),\bar{i}'_1\ (\overline{\sigma}')],$$

$$GF\,(2). \qquad (22)$$

В случае $k=s^*$ множество $F_1(\ell_1,\ell_2,\overline{m},k)$ содержит единственную тройку $(\eta,\gamma,\overline{\nu})$. При этом $\eta=\ell_1, \gamma=\ell_2, \nu_{\alpha,\beta}=m_{\alpha,\beta}$, $\beta=\overline{1,\ell_2}, \alpha=\overline{1,\ell_1}$. Кроме того, $Q_{\ell_1}(\ell_1)$ и $N_{\ell_2}(\ell_2)$ также имеют единственные элементы и эти элементы есть соответственно $(s_1,...,s_\eta)=(1,...,\ell_1)$ и $(\xi_1,...,\xi_\gamma)=(1,...,\ell_2)$, а множество $\Omega'_{\nu_{\alpha,\beta}}(m_{\alpha,\beta})$ имеет единственный элемент $\overline{\sigma}_{\alpha,\beta}=(\sigma_{\alpha,\beta,1},...$ $...,\sigma_{\alpha,\beta,\nu_{\alpha,\beta}})=(1,...,m_{\alpha,\beta})$. Следовательно,

$$\Omega(\overline{\nu},\overline{m},\eta,\gamma)=\{\underbrace{(1,...,m_{\alpha,\beta}),...,(1,...,m_{\alpha,\beta})}_{\ell_1\ell_2}\},$$

$$\bar{i}_1(\overline{\sigma}_{\alpha,\beta})=(i_{\alpha,\beta,1},...,i_{\alpha,\beta,\sigma_{\alpha,\beta,m_{\alpha,\beta}}}).$$

Поэтому формулы (22) можно записать в виде

$$f\,(x_{i_{\eta,\gamma,t},j_\eta,\tau_\gamma}=1\,|\,t=\overline{1,m_{\eta,\gamma}},\ \eta=\overline{1,\ell_1},\ \gamma=\overline{1,\ell_2})=$$

$$=h_{s^*\ell_1,\ell_2(m_{1,1},...,m_{\ell_1,\ell_2})}[(j_1,...,j_{\ell_1}),(\tau_1,...,\tau_{\ell_2}),$$

$$(i_{1,1,1},...,i_{1,1,m_{1,1}},...,i_{\ell_1,1,m_{\ell_1,1}},...,i_{\ell_1,\ell_2,m_{\ell_1,\ell_2}})]+$$

$$+\sum_{k=0}^{s^*-1}\ \sum_{(\eta,\gamma,\overline{\nu})\in F_1(\ell_1,\ell_2,\overline{m},k)}\ \sum_{\overline{s}\in Q_\eta(\ell_1)}\ \sum_{\overline{\xi}\in N_\gamma(\ell_2)}\ \sum_{\overline{\sigma}'\in\Omega(\overline{\nu},\overline{m},\eta,\gamma)} h_{k,\eta,\gamma,\overline{\nu}}[\bar{j}_1(\overline{s}),\overline{\tau}_1(\overline{\xi}),\ \bar{i}'_1(\overline{\sigma}')],$$

$$GF(2),$$

или

$$h_{s^*,\ell_1,\ell_2(m_{1,1},...,m_{\ell_1,\ell_2})}[(j_1,...,j_{\ell_1}),(\tau_1,...,\tau_{\ell_2}),$$

$$(i_{1,1,1},...,i_{1,1,m_{1,1}},...,i_{\ell_1,1,m_{\ell_1,1}},...,i_{\ell_1,\ell_2,m_{\ell_1,\ell_2}})]=$$

$$= f(x_{i_{\eta,\gamma,t},\, j_\eta,\, \tau_\gamma} = 1 \,|\, t = \overline{1, m_{\eta,\gamma}},\ \eta = \overline{1, \ell_1},\ \gamma = \overline{1, \ell_2}) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{s^*-1} \sum_{(\eta,\gamma,\bar\nu)\in F_1(\ell_1,\ell_2,\bar m,k)} \sum_{\bar s\in Q_\eta(\ell_1)} \sum_{\bar\xi\in N_\gamma(\ell_2)} \sum_{\bar\sigma'\in\Omega(\bar\nu,\bar m,\eta,\gamma)} h_{k,\eta,\gamma,\bar\nu}[\bar j_1(\bar s),\ \bar\tau_1(\bar\xi),\ \bar i_1'(\bar\sigma')],$$

$$GF(2). \qquad (23)$$

В случае $\ell_2 = 1,\ m_{\eta,\ell_2} = 1,\ \eta = \overline{1,\ell_1}$, формула (23) преобразуется к виду (19), в случае $\ell_1 = 1,\ m_{\ell_1,\gamma} = 1,\ \gamma = \overline{1,\ell_2}$, — к виду (20), а в случае $\ell_1 = 1,\ \ell_2 = 1$ — к виду (18). Следовательно, формула (23) совместно с формулами (15), (17) — (20) образуют рекуррентные формулы для нахождения неизвестных коэффициентов полинома (11).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть значение $x_{ij\tau}$ определяется по (14), а множество X — по (16). Пусть

$$x_{i_{\eta,\gamma,t},\, j_\eta,\, \tau_\gamma} = 1,\ t = \overline{1, m_{\eta,\gamma}},\ \eta = \overline{1, \ell_1},\ \gamma = \overline{1, \ell_2}\,, \qquad (24)$$

где

$$0 \le i_{\eta,\gamma,t} \le n_0,\ 1 \le j_\eta \le r_1,\ 1 \le \tau_\gamma \le r_2,\ 1 \le m_{\eta,\gamma} \le n_0 + 1,\ 1 \le \ell_1 \le r_1,\ 1 \le \ell_2 \le r_2,$$

а остальные элементы множества X, не указанные в определении (24), имеют значения 0. В этом случае для определения коэффициентов полинома (11) справедливо рекуррентное соотношение (23) с учетом (15), (17) — (20).

Используя теорему 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть существуют соотношения (7), (9)—(11). Пусть $\bar n_2 \in \Gamma(\ell_1, \ell_2, \bar m),\ \bar j \in L_1(\ell_1),\ \bar\tau \in L_2(\ell_2),\ (\ell_1, \ell_2, \bar m) \in F(i),\ i \in \{1, \ldots, (n_0+1)\, r_1 r_2\}$, и они произвольные. Тогда для $h_{i,\ell_1,\ell_2,\bar m}[\bar j,\ \bar\tau,\ \bar n_2]$ справедливо следующее соотношение:

$$h_{i,\ell_1,\ell_2,\bar m}[\bar j,\ \bar\tau,\ \bar n_2] =$$

$$= f(u[n - n_1(\alpha,\ \beta,\ \sigma_{\alpha,\beta}),\, c_1 + p_1(j_\alpha),\, c_2 + p_2(\tau_\beta)] = 1 | \sigma_{\alpha,\beta} = \overline{1, m_{\alpha,\beta}},$$

$$\beta = \overline{1, \ell_2},\ \alpha = \overline{1, \ell_1}) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{(\eta,\gamma,\bar\nu)\in F_1(\ell_1,\ell_2,\bar m,k)} \sum_{\bar s\in Q_\eta(\ell_1)} \sum_{\bar\xi\in N_\gamma(\ell_2)} \sum_{\bar\sigma'\in\Omega(\bar\nu,\bar m,\eta,\gamma)} h_{k,\eta,\gamma,\bar\nu}[\bar j(\bar s),\ \bar\tau(\bar\xi),\ \bar n_3(\bar\sigma')],$$

$$GF(2). \qquad (25)$$

Здесь

$$\bar n_3(\bar\sigma') = (\bar n_2(\bar\sigma_{1,1}),\ \ldots,\ \bar n_2(\bar\sigma_{1,\gamma})), \ldots, (\bar n_2(\bar\sigma_{\eta,1}),\ \ldots, \bar n_2(\bar\sigma_{\eta,\gamma}))),$$

$$\bar n_2(\bar\sigma_{\alpha,\beta}) = (n_1(\alpha,\ \beta,\ \sigma_{\alpha,\beta,1}), \ldots,\ n_1(\alpha,\ \beta,\ \sigma_{\alpha,\beta,\nu_{\alpha,\beta}})).$$

Перепишем формулы (17) — (20) с учетом (14), после чего они примут следующий вид:

$$h_{1,1,1,(1)}[(j_1),(\tau_1),(n_1(1,1,1))]=$$
$$=h_0+f(u[n-n_1(1,1,1),c_1+p_1(j_1),c_2+p_2(\tau_1)]=1),\ GF(2), \tag{26}$$

$$h_{i,1,1,(i)}[(j_1),(\tau_1),(n_1(1,1,1),\ldots,n_1(1,1,t))]=$$
$$=f\ (u[n-n_1(1,1,t),c_1+p_1(j_1),c_2+p_2(\tau_1)]=1|t=\overline{1,i})+$$
$$+\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\in\Omega_k(i)}h_{k,1,1,(k)}[(j_1),(\tau_1),(n_1(1,1,\sigma_1),\ldots,n_1(1,1,\sigma_k))],\ GF(2), \tag{27}$$

$$h_{i,i,1,\underbrace{(1,\ldots,1)}_{i}}[(j_1,\ldots,j_i),(\tau_1),(\underbrace{(n_1(1,1,1)),\ldots,(n_1(1,1,1))}_{i})]=$$
$$=f\ (u[n-n_1(1,1,1),\ c_1+p_1(j_t),\ c_2+p_2(\tau_1)]=1|t=\overline{1,i})+$$
$$+\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{(s_1,\ldots,s_k)\in Q_k(i)}h_{k,k,1,\underbrace{(1,\ldots,1)}_{k}}[(j_{s_1},\ldots,j_{s_k}),(\tau_1),(\underbrace{(n_1(1,1,1)),\ldots,(n_1(1,1,1))}_{k})],$$
$$GF(2). \tag{28}$$

$$h_{i,1,i,\underbrace{(1,\ldots,1)}_{i}}[(j_1),(\tau_1,\ldots,\tau_i),(\underbrace{(n_1(1,1,1)),\ldots,(n_1(1,1,1))}_{i})]=$$
$$=f\ (u[n-n_1(1,1,1),c_1+p_1(j_1),c_2+p_2(\tau_t)]=1|t=\overline{1,i})+$$
$$+\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{(\xi_1,\ldots,\xi_k)\in N_i(k)}h_{k,1,k,\underbrace{(1,\ldots,1)}_{k}}[(j_1),(\tau_{\xi_1},\ldots,\tau_{\xi_k}),(\underbrace{(n_1(1,1,1)),\ldots,(n_1(1,1,1))}_{k})],GF(2). \tag{29}$$

Таким образом, для определения коэффициентов полиномиальных представлений (11) формула (25) совместно с формулами (15), (26)—(29) образуют рекуррентные соотношения.

Нахождение неизвестных коэффициентов полиномиальных представлений для полной реакции 2*D*-НМДС. Аналогично описанному выше находим формулы для неизвестных коэффициентов полиномиальных представлений полной реакции 2*D*-НМДС (13). Ясно, что $h_0=f(0,\ldots,0,\ldots,0)$. На основе (26) получим

$$h_{1,1,(1)}[(j_1),(i_1)]=h_0+f(u[n-i_1,c+\rho(j_1)]=1),$$

а на основе (27) и (28) — соответственно

$$h_{m,1,(m)}[(j_1),(i_1,...,i_m)] = f\,(u[n-i_t, c+\rho\,(j_1)] = 1 | t=\overline{1,m}) +$$

$$+\sum_{t=0}^{m-1}\ \sum_{(\sigma_1,...,\sigma_t)\in\Omega_t(m)} h_{t,1,(t)}[(j_1),(i_{\sigma_1},...,i_{\sigma_t})],\ GF(2)\,,$$

и

$$h_{\ell,\ell,\underbrace{(1,...,1)}_{\ell}}[(j_1,...,j_\ell),\underbrace{((i_1),...,(i_1))}_{\ell}] = f\,(u[n-i_1, c+\rho\,(j_\eta)] = 1 | \eta=\overline{1,\ell}) +$$

$$+\sum_{\eta=0}^{\ell-1}\ \sum_{(s_1,...,s_\eta)\in Q_\eta(\ell)} h_{\eta,\eta,\underbrace{(1,...,1)}_{\eta}}[(j_1,...,j_\eta),...,\underbrace{((i_1),...,(i_1))}_{\eta}],\ GF(2)\,,$$

где $\Omega_t(m) = \{(\sigma_1, ..., \sigma_t) | 1 \le \sigma_1 < ... < \sigma_t \le m\}$, $Q_\eta(\ell) = \{(s_1, ..., s_\eta) | 1 \le s_1 < ...$ $... < s_\eta \le \ell\}$.

Пусть задано $\overline{n}_2 \in \Gamma(\ell, \overline{m})$, $\bar{j} \in L(\ell)$, $(\ell, \overline{m}) \in F(i)$, $i \in \{1, ..., (n_0+1)\,r\}$. Введем обозначения:

$$Q_\eta(\ell) = \{(s_1,...,s_\eta) | 1 \le s_1 < ... < s_\eta \le \ell\},\ \bar{j}_1(\bar{s}) = (j_{s_1}, ..., j_{s_\eta}),$$

$$F_1(\ell, \overline{m}, k) = \{(\eta, \overline{\nu}) | \overline{\nu} = \{\nu_1, ..., \nu_\eta\}, \nu_1 + ... + \nu_\eta = k, \nu_\alpha = (0, ..., m_{s_\alpha}\},\ \alpha = \overline{1,\eta}\,,$$

$$\eta \in \{1, ..., \ell\}, \{s_1, ..., s_\eta\} \in Q_\eta(\ell)\}\,,$$

$$\Omega'_{\nu_\alpha}(m_{s_\alpha}) = \{\overline{\sigma}_\alpha = (\sigma_{\alpha,1}, ..., \sigma_{\alpha,\nu_\alpha}) | 1 \le \sigma_{\alpha,1} < ... < \sigma_{\alpha,\nu_\alpha} \le m_{s_\alpha}\},$$

$$\Omega(\overline{\nu}, \overline{m}) = \mathop{X}_{\alpha=1}^{\eta} \Omega'_{\nu_\alpha}(m_{s_\alpha})\,. \tag{30}$$

Из теоремы 3 вытекает следующее следствие.

Следствие 2. Пусть существуют соотношения (8), $\overline{n}_2 \in \Gamma(\ell, \overline{m})$, $\bar{j} \in L(\ell), (\ell, \overline{m}) \in F(i), i \in \{1, ..., (n_0+1)\,r\}$, и приняты обозначения (30). Тогда справедливо соотношение

$$h_{i,\ell,\overline{m}}[\bar{j}, \overline{n}_2] = f\,(u[n - n_1(\alpha, t), c+\rho\,(j_\alpha)]) = 1 | t = \overline{1, m_\alpha}, \alpha = \overline{1,\ell}) +$$

$$+\sum_{k=0}^{i-1}\ \sum_{(\eta,\overline{\nu})\in F_1(\ell,\overline{m},k)}\ \sum_{\bar{s}\in Q_\eta(\ell)}\ \sum_{\overline{\sigma}'\in\Omega(\overline{\nu},\overline{m})} h_{k,\eta,\overline{\nu}}[\bar{j}(\bar{s}), \overline{n}_3(\overline{\sigma}')],\ \ GF(2), \tag{31}$$

где $\overline{n}_3(\overline{\sigma}') = (\overline{n}_2(\overline{\sigma}_1), ..., \overline{n}_2(\overline{\sigma}_\eta))$, $\overline{n}_2(\overline{\sigma}_\alpha) = (n_1(\alpha, \sigma_{\alpha,1}), ..., n_1(\alpha, \sigma_{\alpha,\nu_\alpha}))$, $\alpha = \overline{1,\eta}$.

Пример. Пусть в (12) $P=\{0, 1\}$, $n_0=1$, $r=2$. Тогда $(n_0+1)r=4$. Для $y[n,c]=f(u[n,c], u[n-1,c], u[n, c+1], u[n-1,c+1])$ запишем полиномиальное представление в виде (13). Представим элементы множеств $F(i)$ и $\Gamma(\ell,\overline{m})$ при $i=0, 1, ..., 4$.

1. В случае $i=1$ $F(1)=\{(1,(1))\}$ т.е. $\ell=1$, $m_1=1$. При этом

$$L(1)=\{(1),(2)\}, \Gamma_1(1)=\{(n_1(1, 1)=0), (n_1(1, 1)=1)\}, \Gamma(1, (1))=\{(0), (1)\}.$$

Этому случаю соответствуют следующие слагаемые:

$$\begin{gathered} S_1=h_{1,1,(1)}[(1),(0)]u[n,c], S_2=h_{1,1,(1)}[(1),(1)]u[n-1,c], \\ S_3=h_{1,1,(1)}[(2),(0)]u[n,c+1], S_4=h_{1,1,(1)}[(2),(1)]u[n-1,c+1]. \end{gathered} \tag{32}$$

2. В случае $i=2$ $F(2)=\{(1,(2)),(2,(1,1))\}$.

а) $(\ell,\overline{m})=(1,(2))$. При этом

$$L(1)=\{(1),(2)\}, \Gamma_1(2)=\{(n_1(1,1),(n_1(1,2))\}=\{(0,1)\}, \Gamma(1,(2))=\{(0),(1)\}. \tag{33}$$

Соответствующие слагаемые:

$$\begin{gathered} S_5=h_{2,1,(2)}[(1),(0,1)]u[n,c]u[n-1,c], \\ S_6=h_{2,1,(2)}[(2),(0,1)]u[n,c+1]u[n-1,c+1]. \end{gathered} \tag{34}$$

б) $(\ell,\overline{m})=(2,(1,1))$. При этом

$$L(2)=\{(1,2)\}, \Gamma_1(1)=\{(0),(1)\}, \Gamma(2,(1,1))=\{((0),(0)),((0),(1)),((1),(0)),((1),(1))\}.$$

Соответствующие слагаемые:

$$\begin{gathered} S_7=h_{2,2,(1,1)}[(1,2),((0),(0))]u[n,c]u[n,c+1], \\ S_8=h_{2,2,(1,1)}[(1,2),((0),(1)]u[n,c]u[n-1,c+1], \\ S_9=h_{2,2,(1,1)}[(1,2),((1),(0))]u[n-1,c]u[n,c+1], \\ S_{10}=h_{2,2,(1,1)}[(1,2),((1),(1))]u[n-1,c]u[n-1,c+1]. \end{gathered} \tag{35}$$

3. В случае $i=3$ $F(3)=\{(2,(1,2)),(2,(2,1))\}$.

а) $(\ell,\overline{m})=(2,(1,2))$. При этом

$$\begin{gathered} L(2)=\{(1,2)\}, \Gamma_1(1)=\{(0),(1)\}, \Gamma_1(2)=\{(0,1)\}, \\ \Gamma(2,(1,2))=\{((0),(0,1)),((1),(0,1))\}. \end{gathered}$$

Соответствующие слагаемые:

$$\begin{gathered} S_{11}=h_{3,2,(1,2)}[(1,2),((0),(0,1))]u[n,c]u[n,c+1]u[n-1,c+1], \\ S_{12}=h_{3,2,(1,2)}[(1,2),((1),(0,1))]u[n-1,c]u[n,c+1]u[n-1,c+1]. \end{gathered} \tag{36}$$

б) $(\ell,\overline{m})=(2,(2,1))$. При этом

$$L(2)=\{(1,2)\},\ \Gamma_1(2)=\{(0,1)\},\ \Gamma_1(1)=\{(0),(1)\},$$
$$\Gamma(2,(2,1))=\{((0,1),(0)),((0,1),(1))\}.$$

Соответствующие слагаемые:

$$S_{13}=h_{3,2,(2,1)}[(1,2),((0,1),(0))]\,u[n,c]\,u[n-1,c]\,u[n,c+1],$$
$$S_{14}=h_{3,2,(2,1)}[(1,2),((0,1),(1))]\,u[n,c]\,u[n-1,c]\,u[n-1,c+1]. \qquad (37)$$

4. В случае $i=4$ $F(4)=\{(2,(2,2))\}$. При этом

$$L(2)=\{(1,2)\},\Gamma_1(1)=\Gamma_2(1)=\{(0,1)\},\Gamma(2,(2,2))=\{((0,1),(0,1))\}.$$

Соответствующее слагаемое:

$$S_{15}=h_{4,2,(2,2)}[(1,2),((0,1),(0,1))]\,u[n,c]\,u[n-1,c]\,u[n,c+1]\,u[n-1,c+1]. \qquad (38)$$

Таким образом, получаем

$$y(n,c)=h_0+S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}+$$
$$+S_{11}+S_{12}+S_{13}+S_{14}+S_{15},\ GF(2), \qquad (39)$$

где S_i, $i=\overline{1,15}$, определяются по формулам (32)—(38), а $h_0\in GF(2)$.

Теперь рассмотрим нахождение какого-либо коэффициента в (39), например $h_{3,2,(2,1)}[(1,2),((0,1),(0))]$, при известных значениях входной и выходной последовательностей.

Ясно, что $h_{3,2,(2,1)}[(1,2),((0,1),(0))]$ является коэффициентом слагаемого $u[n,c]\,u[n-1,c]\,u[n,c+1]$. Обозначим через $f(u[n,c],u[n-1,c],u[n,c+1]=1)$ значение $f(u[n,c],u[n-1,c],u[n,c+1],u[n-1,c+1])$ при $u[n,c]=u[n-1,c]=$ $=u[n,c+1]=1,\ u[n-1,c+1]=0$. В этом случае $i=3$, $\ell=2$, $\overline{m}=(m_1,m_2)=(2,1)$, $(j_1,j_2)=(2,1)$, $\overline{n}_1'=(n_1(1,1),n_1(1,2))=(0,1)$, $\overline{n}_2'=(n_1(2,1))=(0)$.

1. В случае $k=1$ $F_1(2,(2,1))1)=\{(1,(1))\}$, т.е. $\eta=1$, $\nu_1=1$; $\overline{s}=(s_1)$; $(s_1)\in Q_1(2)$, т.е. $s_1=1$ или $s_1=2$.

а) При $s_1=1$

$$j_{s_1}=j_1,\Omega_{\nu_1}'(m_{s_1})=\{\overline{\sigma}_1=(\sigma_{1,1})|1\le\sigma_{1,1}\le 2\}=\{(1),(2)\},\Omega(\overline{\nu},\overline{m})=\{(1),(2)\},$$
$$\overline{n}_3(\overline{\sigma}')=(\overline{n}_2(\overline{\sigma}_1))=(n_1(1,\sigma_{1,1})),\ n_1(1,\sigma_{1,1})\in\{0,1\}.$$

а′) При $\sigma_{1,1}=1$ $n_1(1,\sigma_{1,1})=0$. Этому случаю соответствует $h_{1,1,(1)}[(1),(0)]$.
а″) При $\sigma_{1,1}=2$ $n_1(1,\sigma_{1,1})=1$. Этому случаю соответствует $h_{1,1,(1)}[(1),(1)]$.

б) При $s_1 = 2$ $j_{s_1} = j_2$, $\Omega'_{\nu_1}(m_{s_1}) = \{\overline{\sigma}_1 = (\sigma_{1,1}) | 1 \le \sigma_{1,1} \le 1\} = \{(1)\}$, $\Omega(\overline{\nu}, \overline{m}) = \{(1)\}$, т.е. $\sigma_{1,1} = 1$. При этом $\overline{n}_3(\overline{\sigma}') = (\overline{n}_2(\overline{\sigma}_1)) = (n_1(j_2, \sigma_{1,1}))$, $n_1(j_2, \sigma_{1,1}) = 1$. Этому случаю соответствует $h_{1,1,(1)}[(2),(0)]$.

2. В случае $k = 2$ $F_1(2,(2,1)),2) = \{(1,(2)),(2,(1,1))\}$.

а) При $\eta = 1$, $\overline{\nu} = (2)$

$$\overline{s} = (s_1) = (1) \in Q_1(2); \Omega(\overline{\nu}, \overline{m}) = \Omega'_{\nu_1}(m_{s_1}) = \{\overline{\sigma}_1 = (\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2})\} = \{(1, 2)\}.$$

При этом $\overline{n}_3(\overline{\sigma}') = (\overline{n}_2(\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2})) = (n_1(j_1, 1), n_1(j_1, 2)) = (0,1)$. Этому случаю соответствует $h_{2,1,(2)}[(1),(0,1)]$.

б) При $\eta = 2$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2) = (1, 1)$

$$\overline{s} = (s_1, s_\eta) = (1, 2);\ \Omega(\overline{\nu}, \overline{m}) = \Omega((1, 1), (2, 1)) = \Omega'_{\nu_1}(m_1) \times \Omega'_{\nu_2}(m_2),$$

$$\Omega'_{\nu_1}(m_1) = \Omega'_1(2) = \{\overline{\sigma}_1 = (\sigma_{1,1}) | 1 \le \sigma_{1,1} \le 2\} = \{(1),(2)\},$$

$$\Omega'_{\nu_2}(m_2) = \Omega'_1(1) = \{\overline{\sigma}_2 = (\sigma_{2,1}) | 1 \le \sigma_{1,1} \le 1\} = \{(1)\}.$$

б′) При $\sigma_{1,1} = 1, \sigma_{2,1} = 1$

$$n_1(1, \sigma_{1,1}) = n_1(1,1) = 0,\ n_1(2, \sigma_{2,1}) = n_1(2,1) = 0.$$

Этому случаю соответствует $h_{2,2,(1,1)}[(1,2),((0),(0))]$.

б″) При $\sigma_{1,1} = 2, \sigma_{2,1} = 1$

$$n_1(1, \sigma_{1,1}) = n_1(1, 2) = 1,\ n_1(2, \sigma_{2,1}) = n_1(2, 1) = 0.$$

Этому случаю соответствует $h_{2,2,(1,1)}[(1,2),((1),(0))]$.

Таким образом, на основе (31) получаем

$$h_{3,2,(2,1)}[(1,2),((0,1),(0))] = f(u[n, c], u[n-1, c], u[n, c+1] = 1) +$$

$$+ h_{1,1,(1)}[(1),(0)] + h_{1,1,(1)}[(1),(1)] + h_{1,1,(1)}[(2),(0)] + h_{2,1,(2)}[(1),(0,1)] +$$

$$+ h_{2,2,(1,1)}[(1,2),((0),(0))] + h_{2,2,(1,1)}[(1,2),((1),(0))],\ GF(2).$$

Выводы

Двузначный аналог полинома Вольтерры в виде (8) или (11) является общим уравнением для 3*D*-НМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$. Полученное рекуррентное соотношение для нахождения коэффициентов полиномиальных представлений может быть использовано при разработке алгоритмов и программного обеспечения для автоматизированного вычисления значений этих коэффициентов. Двузначный аналог полинома Вольтерры в виде (11) может быть использован при исследовании различных свойств 3*D*-НМДС, постановке и решении квадратично-оптимизационных или других различных математических и прикладных задач для 3*D*-НМДС. В частности, 3*D*-НМДС, заданные уравнением (11), могут быть использованы при моделировании трех параметрических непрерывных или дискретных объектов, описываемых уравнениями с частными производными или конечно-разностными уравнениями.

The problem of analytical description of full reaction of 3*D*-nonlinear modular system in the form of two valued analogue of Volterra's polynomial and definition of unknown coefficients of this polynomial under certain values of input and output sequences of the system is considered in the work.

1. *Фараджев Р. Г.* Линейные последовательностные машины. — М. : Сов.радио, 1975. — 248 с.
2. *Фараджев Р. Г., Нагиев А. Т., Фейзиев Ф. Г.* Аналитическое описание и квадратичная оптимизация двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин// Докл. РАН. — 1998. — **360**, № 6.— С. 750—752.
3. *Фейзиев Ф. Г., Фараджева М. Р.* Модулярные последовательностные машины: Основные результаты по теории и приложению. — Баку : Изд-во Элм, 2006. — 234 с.
4. *Блюмин С. Л., Фараджев Р. Г.* Линейные клеточные машины: Подход пространства состояний (обзор)// Автоматика и телемеханика. —1982. — № 2. — С. 125—163.
5. *Блейхут Р.* Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. — М .: Мир,1986. — 576 с.
6. *Латыпов Р. Х., Нуруддинов Ш. Р., Столов Е. Л., Фараджев Р. Г.* Применение теории линейных последовательностных машин в системах диагностирования// Автоматика и телемеханика. —1988. — № 8. — С. 3—27.
7. *Иванов М. А.* Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях. — М. : Кудиц-образ, 2001. — 368 с.
8. *Фараджев Р. Г., Фейзиев Ф. Г.* Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. — Баку : Изд-во Элм, 1996. — 180 с.
9. *Фейзиев Ф. Г.* Квадратичная оптимизация дискретных процессов в двоичных клеточных системах (Методы, алгоритмы, программы): Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. — ИК АН Азербайджана. — Баку, 2003. — 44 с.
10. *Гайшун И. В.* Многопараметрические системы управления. — Минск : Наука и техника, 1996. — 200 с.
11. *Abstracts* the First International Workshop on NDS-98 Multidimensional (nD) systems (July 12 — July 15, 1998, Lagow, Poland). — Zilona Gora: Technical University Press, 1998. — 125 p.
12. *Мамедова Г. Г.* Некоторые вопросы теории билинейных последовательностных машин: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. — ИК АН Азербайджана. — Баку, 1992. — 15 с.
13. *Nagiyev A. T., Feyziyev F. G.* The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters// Seminarberichte, Fachbereich Mathematic, 2001. — Hagen, Germany. — Band 71. — P. 31—43.

14. *Фейзиев Ф. Г.* Конечно-последовательностная модель некоторого класса объектов с распределенными параметрами// Электрон. моделирование. — Киев, 2002. — **24**, № 4. — С. 99—112.
15. *Фейзиев Ф. Г., Самедова З. А., Мамиева А. А.* Рекуррентное соотношение для определения коэффициентов полинома Жегалкина// Науч. изв. Сумгаитского гос. университета. Раздел естественных и технических наук. — 2008. — № 1. — С. 18—21.

Поступила 05.10.09;
после доработки 21.06.10

ФЕЙЗИЕВ Фикрат Гюлали оглы, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой дифференциальных уравнений и математической кибернетики Сумгаитского государственного университета. В 1978 г. окончил Азербайджанский госуниверситет. Область научных исследований — математическая кибернетика, теория конечных автоматов и теоретические вопросы информатики.

САМЕДОВА Замина Агаш кызы, ст. преподаватель кафедры математики и информатики Азербайджанского университета языков. В 1994 г. окончила Азербайджанскую государственную нефтяную академию. Область научных исследований — теория конечных автоматов и теоретические вопросы информатики.