УДК 621.327; 519.2; 534.8

Б. Г. Марченко, д-р физ.-мат. наук, **В. Н. Зварич**, канд. техн. наук.
Ин-т электродинамики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, пр-т Победы, 56,
тел. 2396534, E-mail: zvaritch@nas.gov.ua)

Линейные процессы авторегрессии с периодическими структурами как модели вибрационных сигналов

Рассмотрены некоторые свойства линейных процессов авторегрессии с периодическими структурами, которые можно использовать при разработке алгоритмов распознавания информационных сигналов. Описано применение таких случайных процессов в качестве математических моделей вибраций подшипников качения.

Розглянуто деякі властивості лінійних процесів и авторегресії з періодичними структурами, які можна використати при розробці алгоритмів розпізнавання інформаційних сигналів. Описано використання таких випадкових процесів у якості математичних моделей вібрацій підшипників котіння.

Ключевые слова: линейные процессы с периодическими структурами, линейные процессы авторегрессии с периодическими структурами, характеристическая функция.

Стационарные процессы авторегрессии как математические модели широко применяются при решении многих прикладных задач. Однако для математического моделирования информационных сигналов, имеющих циклический характер, нецелесообразно использовать детерминированные процессы или стационарные случайные процессы. В этом случае имеет смысл применить случайные процессы, обладающие периодическими структурами. Впервые представление периодического случайного процесса было введено Е. Е. Слуцким [1]. Развитие теории случайных процессов с периодическими структурами отражено в работах [2 — 22].

Такие процессы все чаще используются при решении задач энергетики [7], в частности в вибродиагностике [11, 14, 18]. Как показывают результаты экспериментальных исследований [23], вибрации вращающихся узлов электрических машин не всегда можно считать стационарными случайными процессами.

Рассмотрим особенности и некоторые свойства линейных процессов авторегрессии с периодическими структурами. Такие процессы являются обобщением линейных стационарных процессов авторегрессии [24]. Особенностью данных процессов является возможность их использования для описания негауссовых периодических случайных сигналов.

Определение. Процессом авторегрессии с периодически изменяющимися параметрами называется действительный случайный процесс $\{\xi_t,\ t\in Z\}$, определенный на множестве целых чисел $Z=\{...,\ -1,\ 0,\ 1,\ ...\}$, который можно задать в виде

$$\xi_t + a_1(t-1)\xi_{t-1} + ... + a_p(t-p)\xi_{t-p} = \varsigma_t, \tag{1}$$

где $a_1(t),...,a_p(t)$ — параметры авторегрессии, периодически изменяющиеся во времени с одинаковым периодом T, $a_1(t)=a_1(t+T)$, ..., $a_p(t)= =a_p(t+T)$; $p>0$, $p\in Z$, $\forall t\in Z$ — порядок авторегрессии; ς_t — случайный процесс с дискретным временем и независимыми значениями, имеющий безгранично делимый закон распределения.

Процесс авторегрессии имеет также представление в пространстве состояний [25]:

$$X_{t+1} = A_p(t)\,X_t + B\varsigma_t,\quad \xi_t = CX_t + \varsigma_t, \tag{2}$$

где X_t — вектор состояний, $X_t=[\xi_t^p,\ ...,\ \xi_t^1]$;

$$\xi_t^{p-j} = \sum_{i=j+1}^{p} -a_i(t)\,\xi_{t-i+j} \quad j=0,1,\ ...,\ p-1;$$

$$A_p(t)=\begin{bmatrix} -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{p-1}(t) & -a_p(t) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix};\ C=B'=[1\,...\,0\,0];$$

' — символ транспонирования.

Гильбертов процесс авторегрессии с периодически изменяющимися параметрами авторегрессии может быть задан в виде

$$\xi_t = \sum_{\tau=0}^{\infty}\varphi\,(\tau,\ t)\,\varsigma_{t-\tau}, \tag{3}$$

где $\varphi\,(\tau, t)$, $|\varphi\,(\tau,\ t)|<K$ — действительная или комплекснозначная функция, равномерно ограниченная по обеим аргументам ($K<\infty$). Поэтому процесс авторегрессии, заданный уравнением (1), можно назвать линейным случайным процессом с дискретным временем. Ядро $\varphi\,(\tau,\ t)$ линейного случайного процесса (3) связано с параметрами авторегрессии $\{a_j(t),\ j=\overline{1,\ p}\}$ при фиксированном значении t соотношениями, приведенными в [24].

Ядро линейного случайного процесса (3) можно также определить, используя систему матричных уравнений (2): $\varphi(\tau, t) = CA_p^{\tau-1}(t) B$. При фиксированном значении $t A_p^0 = I$, где I — единичная матрица; $A_p^\tau = A_p * A_p^{\tau-1}$ [26].

Из (2) следует, что для процесса авторегрессии с периодическими коэффициентами выполняется соотношение $A_p(t) = A_p(t+T)$, $T>0$, откуда вытекает выполнение равенств

$$CA_p(t) B = CA_p(t+T) B, \ \varphi(\tau, t) = \varphi(\tau, t+T), \ T>0.$$

Таким образом, гильбертов процесс авторегрессии с периодически изменяющимися во времени с одинаковым периодом $T>0$ параметрами авторегрессии, заданный соотношениями (1) и (2), является линейным случайным процессом с дискретным временем и периодическим по t ядром.

Логарифм характеристической функции линейного процесса авторегрессии с периодическим ядром имеет следующий вид:

$$\ln f_\xi(u,t) = i\kappa_{\varsigma 1} u \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi(\tau, t) - 0{,}5 u^2 \kappa_{\varsigma 2} \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi^2(\tau, t) +$$

$$+ \sum_{\tau=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp[ixu\varphi(\tau, t)] - 1 - \frac{iux\varphi(\tau, t)}{1+x^2} \right\} dL(x),$$

где $\kappa_{\varsigma 1}$ и $\kappa_{\varsigma 2}$ — первый и второй кумулянты порождающего процесса ς_τ; $L(x)$ — пуассоновский спектр скачков в формуле Леви порождающего случайного процесса ς_τ.

Рассмотрим линейный процесс авторегрессии, имеющий периодическую структуру порождающего процесса. Такой процесс удовлетворяет разностному уравнению $\xi_t + a_1\xi_{t-1} + \ldots + a_{t-p} = \varsigma_t$, $t \in Z$, где $\{a_j, j = \overline{1, p}\}$ — параметры авторегрессии; p — порядок авторегрессии; ς_t — порождающий процесс, имеющий следующие свойства.

Пусть $\eta_t = \varsigma_t - \varsigma_{t-1}$, $t \in Z$, — первая разность порождающего процесса ς_t. Допустим, что существует $T>0$ такое, что при всех τ и t выполняются соотношения

$$\kappa_1(\tau) = \kappa_1(\tau+T), \ \kappa_2(\tau) = \kappa_2(\tau+T), \ d_x L(x, \tau) = d_x L(x, \tau+T),$$

где $\kappa_1(\tau)$ и $\kappa_2(\tau)$ — первые кумулянтные функции процесса η_t; $L(x,\tau)$ — пуассоновский спектр скачков в формуле Леви для процесса ς_t.

Логарифм характеристической функции линейного случайного процесса с периодическим порождающим процессом имеет вид

$$\ln f_\xi(u,t) = iu \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi(t-\tau)\mu(\tau) - 0{,}5 u^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi^2(t-\tau) D(\tau) +$$

$$+\sum_{\tau=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp[ixu\varphi(t-\tau)]-1-\frac{iux\varphi(t-\tau)}{1+x^2}\right\}d_xL(x,\tau),$$

где

$$\mu(\tau)=\kappa_1(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{1+x^2}d_xL(x,\tau);\ \ D(\tau)=\kappa_2(t)-\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,d_xL(x,\tau).$$

Принимая во внимание следствие 1 теоремы 1 из работы [17], выполняем условия $\mu(\tau)=\mu(\tau+T)$, $D(\tau)=D(\tau+T)$. Следовательно, справедливо тождество $f_\xi(u,t)=f_\xi(u,t+T)$.

Таким образом, линейный процесс авторегрессии с периодическим порождающим процессом является периодическим случайным процессом в строгом смысле.

Рассмотренные модели случайных процессов можно использовать для моделирования информационных сигналов экспертных систем, многих радиофизических процессов, имеющих периодическую зависимость, периодических сигналов в биомедицинских исследованиях.

К периодическим случайным процессам в строгом смысле можно отнести и процессы авторегресии с периодически изменяющимися во времени с одинаковым периодом параметрами авторегрессии и с периодическим порождающим процессом. Рассмотрим такие процессы авторегрессии более подробно. Запишем процесс авторегрессии

$$\xi_t+a_1(t-1)\xi_{t-1}+\ldots+a_p(t-p)\xi_{t-p}=\varsigma_t,\ \ t\in Z. \tag{4}$$

Здесь $a_1(t)\ldots a_p(t)$ — параметры авторегрессии, изменяющиеся периодически во времени с одинаковым периодом $T_1>0$,

$$a_1(t)=a_1(t+T_1),$$
$$\vdots$$
$$a_p(t)=a_p(t+T_1),$$

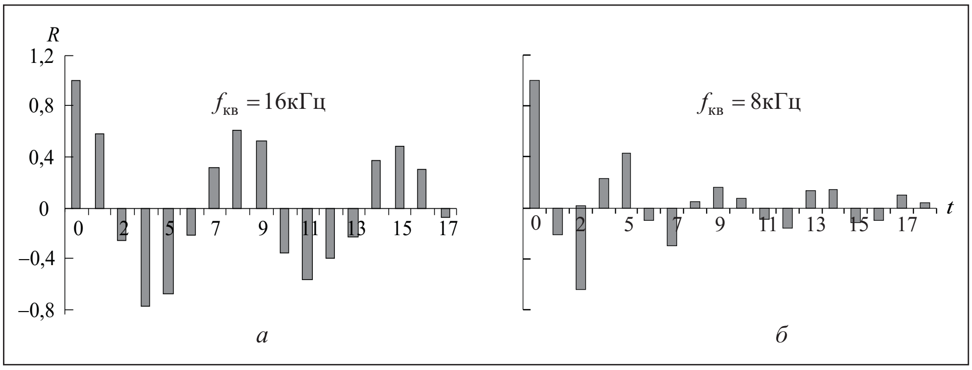
где $p>0$, $p\in Z$ — порядок авторегрессии. Пусть $\eta_t=\varsigma_t-\varsigma_{t-1}$, $t\in Z$, — первая разность порождающего процесса ς_t.

Допустим, что существует $T_2>0$ такое, что при всех τ и t выполняются соотношения

$$\kappa_1(\tau)=\kappa_1(\tau+T_2),\ \ \kappa_2(\tau)=\kappa_2(\tau+T_2),\ \ d_xL(x,\tau)=d_xL(x,\tau+T_2),$$

где $\kappa_1(\tau)$ и $\kappa_2(\tau)$ — первые кумулянтные функции процесса η_t; $L(x,\tau)$ — пуассоновский спектр скачков в формуле Леви для процесса ς_t.

Пусть существует действительное число $\alpha\in(-\infty,\infty)$ такое, что $T_2=\alpha T_1$. Обозначим $T_1=T$, тогда $T_2=\alpha T$. Следовательно, ядро линейного случай-



Графики оценки автокорреляционной функции сигнала вибраций на крышке подшипника 309 ЕШ2, установленного на стенде с перекосом $12'\pm2{,}5'$ (*а*) и на узле в вертикальном положении (*б*) при различных значениях $f_{\text{кв}}$

ного процесса авторегрессии (4) удовлетворяет при всех τ и t соотношению $\varphi(\tau,t)=\varphi(\tau+\alpha T,\ t+T)$. Параметр α выражает отношение периода первой разности порождающего процесса η_t к периоду линейного процесса авторегрессии ξ_t, определяется соотношением $\alpha=\text{tg}\phi$ и является угловым коэффициентом прямой плоскости $\tau\times t$, вдоль которой ядро $\varphi(\tau,t)$ — периодическая функция [17]. Угол ϕ называют углом периодичности ядра процесса ξ_t.

Рассмотренные процессы применены, например, для моделирования вибраций подшипников качения электрических машин. На рисунке представлены графики оценки автокорреляционной функции сигнала вибраций подшипника качения типа 309ЕШ2, установленного на стенде для исследования вибраций подшипников качения электрических машин [27]. Был использован макет информационно-измерительной системы вибродиагностики, состоящий из акселерометров АВС 017, блока предварительной обработки и фильтрации вибраций, платы ввода аналоговой информации L-203, вычислительного блока на базе IBM PC, пакета прикладных программ для анализа вибрационных сигналов. Исследования вибраций проводились в диапазоне частот $\Delta f=2-4$ кГЦ с частотой квантования сигнала $f_{\text{кв}}=16$ кГц; скорость вращения вала, на котором установлен подшипник, V = 500 об\мин., величина анализируемой выборки $N=5000$, коэффициент усиления K_u = 30 дБ.

Результаты предварительных исследований с применением методов, описанных в [23], свидетельствуют о том, что с вероятностью P = 0,95 зафиксированные реализации вибрации подшипника 309ЕШ2, установленного с перекосом на стенде, являются реализациями нестационарного случайного процесса.

Как видно из рисунка, оценка автокорреляционных функций исследуемого вибрационного процесса имеет периодический характер. Оценка периода корреляции вибрационных процессов по методу, изложенному в работе [12], показала, что период корреляционной функции на рисунке *а* $T \approx 440$ мкс (шаг дискретизации 62,5 мкс), а на рисунке *б* — $T \approx 500$ мкс (шаг дискретизации 125 мкс).

Таким образом, применяя описанные свойства процессов авторегрессии с периодическими структурами в качестве математических моделей информационных сигналов различных типов, можно построить эффективные алгоритмы анализа и классификации информационных сигналов, что показано на примере применения линейных процессов авторегрессии для моделирования вибрационных процессов вращающихся узлов электрических машин, в частности вибраций подшипников качения.

Linear autoregressive processes with periodic structures have been considered. Some properties of the random processes which can be applied for development of information signals recognition algorithm are presented. Application of such random processes as mathematical models of rolling bearings vibrations is considered.

1. *Слуцкий Е. Е.* Избранные труды. Теория вероятностей. Мат статистика.— М. : Изд-во АН СССР, 1970. — 292 с.
2. *Гладышев Е. Г.* Периодические и почти периодические коррелированные случайные процессы с непрерывным временем//Теория вероятностей и ее применения. — 1963. — **8**, № 2. — С. 184—189.
3. *Лоэв М.* Теория вероятностей. — М .: ИЛ, 1962. — 720 с.
4. *Ogura H.* Spectral Representation of a Periodic Nonstationary Random Process// IEEE Transaction of Information Theory. — 1971. — Vol. IT-17, № 2. — P. 143—149.
5. *Gardner W. A., Franks L. E.* Characterization of Cyclostationary Random Signal processes// Ibid. — 1975. — Vol.IT-21, №1. — P. 5—14.
6. *Мыслович М. В., Приймак Н. В., Щербак Л. Н.* Периодически коррелированные случайные процессы в задачах обработки акустической информации. — Киев : Общество «Знание» УССР, 1980. — 26 с.
7. *Баранов Г. Л., Марченко Б. Г., Примак Н.* Построение модели и анализ стохастически периодических нагрузок энергосистем// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.— 1991.— **37**, № 2.— С. 12—21.
8. *Zvaritch V., Myslovitch M., Martchenko B.* The Model of Random Periodic Information Signals on the White Noise Bases// Applied Mathematics Letters. — 1995. — Vol.8, № 3. — P. 87—89.
9. *Зварич В. Н., Мыслович М. В., Марченко Б. Г.* Стохастически периодические случайные процессы как модели информационных сигналов// Изв. вузов «Радиоэлектроника». — 1995. — **38**, № 1. — P. 46—51.
10. *Javorskyj I., Isaev I., Maevski J., Yuzefovich R.* Component Covariance Analysis for Periodically Correlated Random Processes//Signal Processing.— 2010. — Vol. 90. — P. 1083—1102.
11. *Martchenko B., Myslovitch M., Zvaritch V.* Vibration Signal Expert System for Fault Detection of Power Equipment Rolling Bearings// Proc. of IFAC 14 World Congress. Beijing, China, July 5-9.— 1999.— Vol.P. — P. 181—186.
12. *Серебренников М. Г. Первозванский А. А.* Выявление скрытых периодичностей.— М. : Наука, 1965. — 244 с.

13. *Зварич В. Н., Марченко Б. Г.* Линейные процессы авторегрессии с периодическими структурами. — Материалы III Международной научно-практической конференции АВИА-2001 — Киев: изд. НАУ, 2001. — **3**. —С. 8.75—8.78
14. *McCormick A. C., Nandi A. K.* Cyclostationarity in Rotating Machine Vibrations//Mechanical Systems and Signal Processing. — 1998. — Vol. 12, № 2. — P. 225—242.
15. *Jones R. H., Brelsford W. M.* Time series with periodic structure//Biometrika. — 1967. — Vol. 54, № 3-4.— P.403—408.
16. *Pagano M.* On periodic and Multiple Autoregressions// The Annals of Statistics. — 1978. — Vol. 6, № 6. — P. 1310—1317.
17. *Марченко Б. Г.* Лінійні періодичні процеси. — Праці Інституту електродинаміки.— Київ: ІЕД НАНУ, 1999. — С. 172—185.
18. *Antony J., Guillet F., Badooni M., Bonvardot F.* Blind Separation of Convolved Cyclostationary Process// Ibid. — 2005. — Vol.85. — P. 51—66.
19. *Hurd H., Makagon A., Miamee A. G.* On AR(1) models with periodic and almost periodic coefficient// Stochastic Processes and their Applications. — 2002. — Vol.100. — P. 167—185.
20. *Miamee A. G., Talebi S.* On PC Solution of PARMA (p,q) models// Probability and Mathematical Statistics. — 2005. — Vol. 25. — P. 279—288.
21. *Reuven A. M., Weiss A. J.* Direct Position Determination of Cyclostationary Signals// Signal Processing. — 2009. — Vol.89. — P. 360—370.
22. *Sabri K., Badaoui M.E., Guillet F. et al.* Cyclostationary Modelling of Ground Reaction Force Signals // Ibid. — 2010. — Vol. 90. — P. 1146—1152.
23. *Зварич В. Н., Марченко Б. Г. Проценко Л. Д.* Анализ вибраций и обнаружение неисправностей электрических машин//Изв АН СССР. «Энергетика и транспорт».— 1985. — № 4. — С. 29—35.
24. *Зварич В. Н., Марченко Б. Г.* Линейные процессы авторегрессии в задачах вибродиагностики узлов электрических машин//Техническая диагностика и неразрушающий контроль.— 1996. — № 1. — С. 45—51.
25. *Labarre D. Grivel E., Bersonmie Y. et al* Consistent estimation of autoregressive parameters from noisy observations based on two interacting Kalman filters//Signal Processing.— 2006. — Vol. 86. — P. 2863—2876.
26. *Kowalski A., Szynal D.* An Optimal Prediction in General ARMA Models//Journal of Multivariate Analysis. — 1990. — Vol. 34. — P. 14—36.
27. *Марченко Б. Г., Мыслович М. В.* Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. — Киев : Наук. думка, 1992. — 196 с.

Поступила 05.11.10

МАРЧЕНКО Борис Григорьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1958 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований – статистическая радиофизика, теория случайных процессов, теория измерений, информационно-измерительные системы.

ЗВАРИЧ Валерий Николаевич, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1982 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований – статистическая радиофизика, обработка информационных сигналов, информационно-измерительные системы.