УДК 001.57: 004.94: 517.9: 519.2

С. Б. Приходько, канд. техн. наук
Национальный университет кораблестроения
им. адмирала Макарова
(Украина, 54025, Николаев, пр. Героев Сталинграда, 9,
тел. (0512) 424470, E-mail: sprikhodko@nuos.edu.ua)

Применение нормализующих преобразований для построения математических моделей нелинейных стохастических дифференциальных систем

Предложен метод построения математических моделей нелинейных стохастических дифференциальных систем на основе нормализующих преобразований.

Запропоновано метод побудови математичних моделей нелінійних стохастичних диференціальних систем на основі нормалізуючих перетворень.

Ключевые слова: стохастическая дифференциальная система, нормализирующее преобразование.

Стохастической дифференциальной системой (СДС) называют такую систему, поведение которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) [1, 2]. Для управления динамическими объектами, большинство которых являются именно такими системами, требуется построение математических моделей. В настоящее время кроме традиционных задач управления динамическими объектами приходится решать задачи, связанные с передачей информации с помощью случайных несущих сигналов, защитой и распознаванием речи, которые также требуют построения математических моделей нелинейных СДС.

Как правило, проблема построения математических моделей СДУ нелинейных СДС решается либо с использованием методов линеаризации, либо на основе предположения о нормальности сигналов в системе [2]. Такие решения возможны только в случаях, когда сигналы в системе незначительно отличаются от нормальных, а нелинейности малы. В других случаях для построения СДУ нелинейных СДС может быть использован подход, основанный на построении СДУ для нормализованных случайных сигналов с применением одномерного нормализующего преобразования [3, 4]. В [5] рассмотрена возможность перехода от нелинейного СДУ к нормализованному с использованием многомерного преобразования.

Попытаемся обобщить полученные ранее результаты на случай многомерных нормализующих преобразований, т.е. показать возможность построения математических моделей нелинейных СДС на основе многомерных нормализующих преобразований.

В предлагаемом методе построения математических моделей нелинейных СДС в пространстве сигналов (методе структурной идентификации нелинейных СДС) возможны два случая.

1. Задана реализация первой компоненты $x_1(t)=x(t)$ случайного сигнала $\mathbf{x}(t)=\{x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)\}^T$, а все последующие компоненты определяются как производные по времени от предыдущих компонент, т.е. $x_2(t)=\dot{x}_1(t), ..., x_n(t)=\dot{x}_{n-1}(t)$.

2. Заданы реализации всех компонент случайного сигнала $\mathbf{x}(t)$.

В реальных системах первый случай соответсствует реализации нерегулярного волнения, речевого сигнала, а второй — записи выходных сигналов динамического объекта, например угла и угловой скорости бортовой качки корабля на нерегулярном волнении. Рассмотрим первый случай.

Постановка задачи. Пусть задана реализация первой компоненты $x_1(t)$ негауссовского случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ на $\Delta=[0,T]$, и по этой реализации может быть найдена сглаженная оценка спектральной плотности компоненты $x_1(t)$. Пусть $x_1(t)$ — стационарный в широком смысле и эргодический по первым четырем статистическим моментам случайный процесс на интервале времени Δ.

Предположение 1. Пусть существует взаимно-однозначное многомерное нормализующее преобразование

$$\mathbf{z}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

такое, что $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})\in R^n$, функция $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема на Δ по t, дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$, а $\mathbf{z}=\mathbf{z}(t)$ — гауссовский случайный процесс, где $\mathbf{z}(t)=\{z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t)\}$.

Предположение 2. Пусть существует обратное к (1) преобразование

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{z}) \tag{2}$$

такое, что функция $\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{z})$ непрерывно дифференцируема на Δ по t, дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{z}$.

Предположение 3. Пусть компонента $z_1(t)$ вектора $\mathbf{z}(t)$ является стационарным центрованным случайным процессом со спектральной плотностью

$$S_{z_1}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{|H(i\omega)|^2}{|F(i\omega)|^2}, \tag{3}$$

а $\mathbf{z}(t)$ удовлетворяет системе из n линейных СДУ

$$d\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)\,dt + \mathbf{B}dw(t),\ \ \mathbf{z}(0) = \boldsymbol{\psi}\,(\boldsymbol{\nu}), \tag{4}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix};\ \mathbf{B} = (0, \ldots, 0, q_{n-m}, q_{n-m+1}, \ldots, q_n)^T;$$

$F(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n = 1$, $H(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$, $m \le n-1$, а параметры $\{q_{n-m}, \ldots, q_n\}$ определяются по формулам $q_{n-m} = b_m$, $q_k = b_{n-k} - \sum\limits_{i=n-m}^{k-1} a_{n-k+i} q_i$, $k = n-m+$ $+1, \ldots, n$.

Пусть все компоненты, начиная со второй, случайного сигнала $\mathbf{x}(t)$ можно найти как производные по времени от предыдущих компонент, т.е. $x_2(t) = \dot{x}_1(t), x_3(t) = \dot{x}_2(t), \ldots, x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t)$.

Необходимо по реализации первой компоненты $x_1(t)$ случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ построить нелинейное СДУ вида

$$d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\,dt + \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{W}(t). \tag{5}$$

Пусть $\mathbf{x}(t)$ является решением СДУ (5) на $\Delta = [0, T]$ с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{x}(t) \in R^n$, где R^n — n-мерное (вещественное) евклидово пространство. При этом $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ — коэффициенты сноса и диффузии в СДУ (5); $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \in R^{n \times m}$ — матричная функция размера $(n \times m)$, $\mathbf{W}(t) \in R^m$ — m-мерный стандартный винеровский процесс, компонентами которого являются независимые скалярные винеровские процессы, а $\boldsymbol{\nu}(t) \in R^n$ — случайный вектор начальных условий.

Решение задачи. В этой постановке суть метода построения математических моделей вида (5) на основе нормализующих преобразований состоит в следующем. Реализацию компоненты $x_1(t)$ случайного сигнала $\mathbf{x}(t)$ нелинейной СДС преобразуем в реализацию нормального случайного процесса $z_1(t)$ вектора $\mathbf{z}(t)$ на основе нормализующего преобразования (1). По реализации компоненты $z_1(t)$ находим нормализованное СДУ (4) для $\mathbf{z}(t)$, согласно которому на основе преобразований (1), (2) и формулы для стохастического дифференциала (формулы Ито, если СДУ понимается в смысле Ито) строим искомое СДУ (5).

Реализацию компоненты $x_1(t)$ преобразуем в реализацию нормального случайного процесса $z_1(t)$ вектора $\mathbf{z}(t)$ на основе нормализующего преобразования (1), в качестве которого применяем многомерное преобразование Джонсона [5]:

$$\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{h}\,[\boldsymbol{\lambda}^{-1}(\mathbf{x} - \varphi)], \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}$, φ, $\boldsymbol{\lambda}$ — параметры распределения Джонсона, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)^T$, $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{diag}\,(\eta_1, ..., \eta_n)$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^T$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$; $\mathbf{h}\,[(y_1, ..., y_n)^T] = \{h_1(y_1), ..., h_n(y_n)\}^T$; $h_i(\cdot)$ — функция одномерного преобразования Джонсона для i-й компоненты [3], $h\,(x, \varphi, \lambda) = \ln(\tilde{x})$, $x > \varphi$ (семейство S_L), $h\,(x, \varphi, \lambda) = \ln[\tilde{x}/(1 - \tilde{x})]$, $\varphi < x < \varphi + \lambda$ (семейство S_B), $h\,(x, \varphi, \lambda) = \mathrm{Arsh}\,(\tilde{x})$, $-\infty \le x \le +\infty$ (семейство S_U). Здесь $\tilde{x} = (x - \varphi)/\lambda$, $\mathrm{Arsh}\,(\tilde{x}) = \ln(\tilde{x} + \sqrt{\tilde{x}^2 + 1})$.

Для семейства S_L функцию плотности вероятности задаем в виде

$$f\,(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}\,(x - \varphi)} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2}\left[\frac{\gamma - \eta\ln\lambda}{\eta} + \ln(x - \varphi)\right]^2\right\},$$

для семейства S_B — в виде

$$f\,(x) = \frac{\eta\lambda}{\sqrt{2\pi}\,(x - \varphi)(\lambda + \varphi - x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta\ln\left(\frac{x - \varphi}{(\lambda + \varphi - x)}\right)\right]^2\right\},$$

для семейства S_U — в виде

$$f\,(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi\,\{(x - \varphi)^2 + \lambda^2\}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta\ln\left(\frac{x - \varphi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x - \varphi}{\lambda}\right)^2 + 1}\right)\right]^2\right\}.$$

Семейства распределений Джонсона отличаются разнообразием форм: в плоскости асимметрия в квадрате A^2 и эксцесс ε занимают значительные области (рис. 1). Если комбинация A^2 и ε находится вблизи линии S_L, то выборочное распределение можно аппроксимировать распределением из семейства S_L (логарифмически нормальным распределением). Распределения со значениями A^2 и ε, лежащие выше линии S_L, аппроксимируют распределением из семейства S_U, а находящиеся ниже линии S_L (до линии критической области) — распределением из семейства S_B. Если комбинация A^2 и ε попадает в критическую область, то выборочное распределение нельзя аппроксимировать распределением из семейств распределений Джонсона.

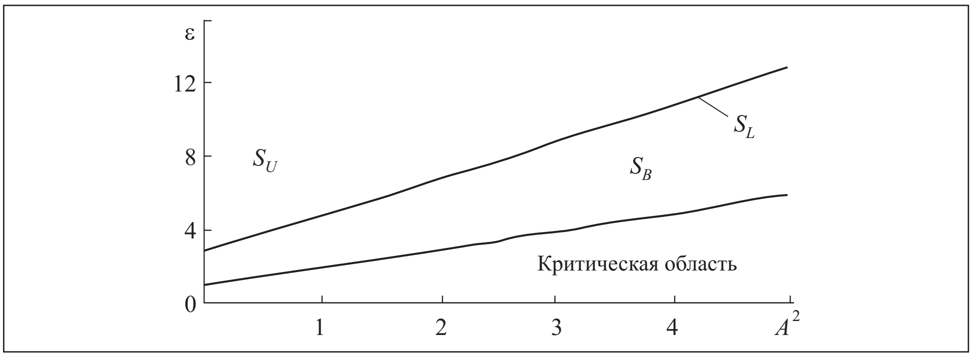

Рис. 1. Комбинации A^2 и ε для различных распределений Джонсона

Выбор семейства распределений Джонсона осуществляется по оценкам асимметрии A и эксцесса ε, значения которых вычисляют в соответствии с гистограммой, построенной по реализации $x_1(t)$. Параметры γ, η, λ и φ для выбранного семейства распределений Джонсона в общем случае можно найти, решив следующую задачу:

$$\theta = \arg\min_{\theta} \left\{ \sum_{j=1}^{m} [y(x_j) - f(x_j, \theta)]^2 \right\}, \tag{7}$$

где θ — вектор неизвестных параметров, $\theta = \{\gamma, \eta, \lambda, \varphi\}$; x_j — значение x в середине j-го подынтервала; $y(x_j)$ — значение ординаты гистограммы при x_j; $f(x_j, \theta)$ — функция плотности вероятности при x_j; m — число подынтервалов гистограммы.

После определения параметров γ, η, λ и φ реализацию компоненты $x_1(t)$ преобразуем в реализацию нормального случайного процесса $z_1(t)$ на основе нормализующего преобразования (6).

По реализации $z_1(t)$ находим нормализованное СДУ (4) для $\mathbf{z}(t)$. Фактически задача построения нормализованного СДУ (4) по реализации $z_1(t)$ является задачей статистической идентификации, которая, как известно, некорректна по Тихонову. Для ее регуляризации, кроме метода Тихонова, могут быть применены сглаженные оценки спектральной плотности [3]. По реализации $z_1(t)$ находим сглаженную оценку спектральной плотности $z_1(t)$ и аппроксимируем ее дробно-рациональной функцией (3). Затем методом формирующих фильтров получаем СДУ (4).

По нормализованному СДУ (4) на основе преобразований (1), (2) и формулы для стохастического дифференциала строим искомое СДУ (5), в котором коэффициенты $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ находим по формулам, определяемым согласно следующему утверждению.

Утверждение. Пусть выполняются предположения 1, 2, 3 и условия теоремы о существовании решения СДУ (4). Тогда

$$f_k(\mathbf{x},t)=\left[\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_k^{-1}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_k^{-1}}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})+\frac{1}{2}\mathbf{B}^T\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}_k^{-1}}{\partial^2\mathbf{z}}\mathbf{B}\right]\Bigg|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})}; \tag{8}$$

$$G_k(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_k^{-1}}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{B}\Bigg|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})}, \quad k=1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{z})$ непрерывно дифференцируема на Δ по t, дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{z}$ и выполняются условия теоремы о существовании решения СДУ (4). Тогда согласно теореме о формуле Ито для компонент функции (2) могут быть построены соответствующие стохастические дифференциалы. Учитывая, что $\mathbf{z}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$, для k-й компоненты вектора $\mathbf{x}$ стохастический дифференциал можно записать так:

$$dx_k=\left[\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_k^{-1}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_k^{-1}}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})+\frac{1}{2}\mathbf{B}^T\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}_k^{-1}}{\partial^2\mathbf{z}}\mathbf{B}\right]\Bigg|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})}dt+\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_k^{-1}}{\partial\mathbf{z}}\mathbf{B}\Bigg|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})}d\mathbf{W}(t). \tag{10}$$

Сопоставляя коэффициенты в (10) с коэффициентами сноса и диффузии в СДУ (5), окончательно приходим к формулам (8) и (9).

Следует заметить, что если СДУ (5) рассматривать в смысле Стратоновича, то в выражении (8) будет отсутствовать последнее слагаемое.

Рассмотрим второй случай.

Постановка задачи. Пусть задано n компонент негауссовского случайного процесса $\mathbf{x}(t)=\{x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\}$ на $\Delta=[0,T]$, и по их реализациям могут быть найдены сглаженные оценки спектральных плотностей этих компонент. Компоненты $\mathbf{x}(t)$ будем считать стационарными в широком смысле и эргодическими по первым четырем статистическим моментам случайными процессами на интервале Δ.

Пусть выполняются предположения 1, 2 и 3 для всех компонент $\mathbf{x}(t)$. Необходимо по реализациям компонент случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ построить СДУ вида (5).

Решение задачи. В этой постановке суть метода построения математических моделей нелинейных СДС вида (5) состоит в следующем. Реализации компонент случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ преобразуем в реализации компонент нормального случайного процесса $\mathbf{z}(t)$ на основе преобразования (1). По этим реализациям находим нормализованные СДУ (4) и на основе преобразований (1), (2) и формулы Ито строим СДУ (5), для которых находим коэффициенты $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{G}(\mathbf{x},t)$ по формулам (8), (9).

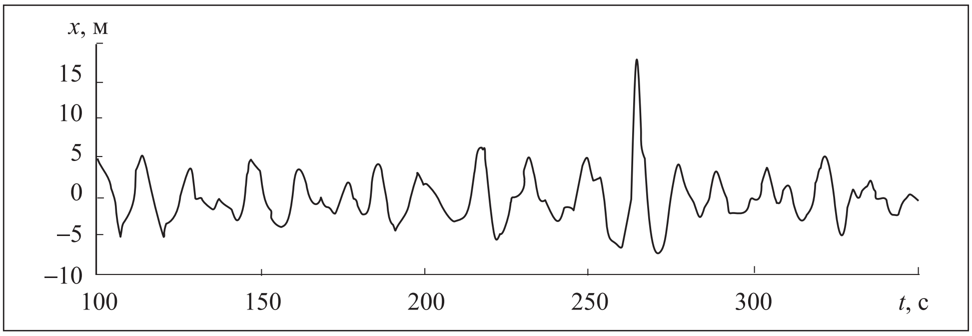

Рис. 2. Вертикальные перемещения поверхности экстремальных морских волн [6]

Рассмотрим пример структурной идентификации нелинейной СДС на основе нормализующих преобразований в пространстве сигналов для первого случая, когда задана реализация первой компоненты $x_1(t)$ случайного сигнала $\mathbf{x}(t)$, а все последующие компоненты определяются как производные по времени от предыдущих. В качестве компоненты $x = x_1(t)$ возьмем вертикальное перемещение поверхности экстремальных морских волн, которое является негауссовским случайным процессом. Пример реализации этого случайного процесса — известная запись морского волнения в Северном море [6] (рис. 2).

Согласно рис. 2 построена гистограмма вертикального перемещения поверхности морских волн, по которой найдены оценки асимметрии ($A = 0,8165$) и эксцесса ($\varepsilon = 5,790$), что соответствует распределению Джонсона из семейства S_U (см. рис. 1).

В результате решения задачи (7) для выбранного распределения Джонсона из семейства S_U найдены параметры: $\gamma = -0,7630$, $\eta = 1,870$, $\lambda = 4,584$, $\varphi = -2,265$. По критерию Пирсона установлена адекватность выбранной вероятностной модели экспериментальным данным. После выполнения нормализации случайного процесса $x(t)$ на основе преобразования Джонсона из семейства S_U с соответствующими параметрами получен случайный процесс $z(t)$, представленный на рис. 3.

Сравнивая рис. 2 и 3, можно сделать следующий вывод: нормализация негауссовского случайного процесса при $\varepsilon > 3$ приводит к уменьшению разницы между ординатами в нормализованном процессе, что ведет к снижению значений эксцесса и асимметрии. Это подтверждается и результатами расчетов.

Согласно рис. 3 построена гистограмма ординат случайного процесса $z(t)$, по которой найдены значения асимметрии ($A = 0,0533$) и эксцесса ($\varepsilon = 2,836$). Эти значения приближено соответствуют нормальному закону (относительная ошибка для эксцесса — 5,5 %). Нормализация привела к

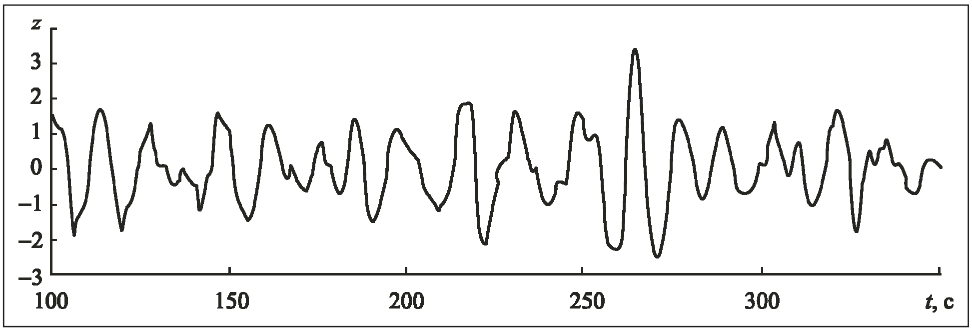

Рис. 3. Нормализованный случайный процесс $z(t)$

уменьшению значений A и ε соответственно на 93,5 % и 51,0 %. В соответствии с критерием Пирсона подтверждена нулевая гипотеза о нормальности закона распределения для процесса $z(t)$.

После реализации случайного процесса $z(t)$ находим оценку его спектральной плотности, которую аппроксимируем дробно-рациональной функцией (3) при $n=4$, $m=3$, что позволяет учитывать реальную двухпиковую форму спектра волновых ординат экстремального морского волнения.

Используя метод формирующих фильтров для процесса $z(t)$ со спектральной плотностью вида (3) при $n=4$, $m=3$, получаем нормализованное СДУ

$$\frac{d^4 z}{dt^4}+a_3\frac{d^3 z}{dt^3}+a_2\frac{d^2 z}{dt^2}+a_1\frac{dz}{dt}+a_0 z=$$

$$=b_3\frac{d^3 n(t)}{dt^3}+b_2\frac{d^2 n(t)}{dt^2}+b_1\frac{dn(t)}{dt}+b_0 n(t), \qquad (11)$$

где $n(t)$ — белый шум. Обозначив $z_1=z(t)$, $z_2=\dot z_1-b_3 n(t)$, $z_3=\dot z_2-$ $-(b_2-b_3a_3)\,n(t)$, $z_4=\dot z_3-(b_1-b_2a_3+b_3a_3^2-b_3a_2)\,n(t)$, преобразуем СДУ (11) в систему:

$$\dot z_1=z_2+b_3 n(t);$$

$$\dot z_2=z_3+(b_2-b_3a_3)\,n(t);$$

$$\dot z_3=z_4+(b_1-b_2a_3+b_3a_3^2-b_3a_2)\,n(t); \qquad (12)$$

$$\dot z_4=(b_0-b_1a_3+b_2a_3^2-b_3a_3^3-b_2a_2-b_3a_1)\,n(t)-a_3z_4-a_2z_3-a_1z_2-a_0z_1.$$

Для семейства S_U найдем компоненты преобразования (6),

$$z_1=\gamma+\eta\,\mathrm{Arsh}\,(\tilde x_1),$$

$$z_2=\frac{\eta x_2}{\lambda\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}},$$

$$z_3=\frac{\eta}{\lambda\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}}\left(x_3-\frac{1}{\lambda}\frac{\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{\tilde{x}_1^2+1}\right), \qquad (13)$$

$$z_4=\frac{\eta}{\lambda\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}}\left[x_4-\frac{1}{\lambda^2}\frac{x_2^3}{\tilde{x}_1^2+1}-\frac{3}{\lambda}\frac{\tilde{x}_1x_2}{\tilde{x}_1^2+1}\left(x_3-\frac{1}{\lambda}\frac{\tilde{x}_1x_2^2}{\tilde{x}_1^2+1}\right)\right],$$

и преобразования (2):

$$x_1=\varphi+\lambda sh(\tilde{z}_1),\quad x_2=\frac{\lambda}{\eta}z_2ch(\tilde{z}_1),$$

$$x_3=\frac{\lambda}{\eta}z_3ch(\tilde{z}_1)+\frac{\lambda}{\eta^2}z_2^2sh(\tilde{z}_1), \qquad (14)$$

$$x_4=\frac{\lambda}{\eta}z_4ch(\tilde{z}_1)+\frac{\lambda}{\eta^3}z_2^3ch(\tilde{z}_1)+3\frac{\lambda}{\eta^2}z_2z_3sh(\tilde{z}_1),$$

где $\tilde{x}=(x_1-\varphi)/\lambda$; $\tilde{z}=(z_1-\gamma)/\eta$. Используя формулы (8), (9) и преобразования (13), (14), получаем искомые СДУ (5) для системы СДУ (12):

$$\dot{x}_1=x_2+\frac{\lambda}{\eta}b_3\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}\,n(t),$$

$$\dot{x}_2=x_3+\frac{1}{\eta}\left[\frac{b_3\tilde{x}_1x_2}{\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}}+\lambda\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}(b_2-b_3a_3)\right]n(t),$$

$$\dot{x}_3=x_4+\frac{1}{\eta\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}}\left[\left(\frac{x_2^2}{\lambda}+\tilde{x}_1x_3-\frac{1}{\lambda}\frac{\tilde{x}_1x_2^2}{\tilde{x}_1^2+1}\right)b_3+2\tilde{x}_1x_3(b_2-b_3a_3)+\right.$$

$$\left.+\lambda(\tilde{x}_1^2+1)(b_1-b_2a_3+b_3a_3^2-b_3a_2)\right]n(t);$$

$$\dot{x}_4=\frac{1}{\lambda(\tilde{x}_1^2+1)}\left(\frac{6}{\lambda}x_2x_3+4\tilde{x}_1x_2x_4+3\tilde{x}_1x_2^3\right)-\frac{9\tilde{x}_1x_2^2}{\lambda^2(\tilde{x}_1^2+1)^2}\left(\frac{x_2^2}{\lambda}+2\tilde{x}_1x_3\right)+$$

$$+\frac{15\tilde{x}_1^3x_2^4}{\lambda^3(\tilde{x}_1^2+1)}-a_3\left[x_4-\frac{x_2}{\lambda(\tilde{x}_1^2+1)}\left(\frac{x_2^2}{\lambda}+3\tilde{x}_1x_3-\frac{3\tilde{x}_1^3x_2^2}{\lambda(\tilde{x}_1^2+1)}\right)\right]-$$

$$-a_2\left[x_3-\frac{\tilde{x}_1x_2^2}{\lambda(\tilde{x}_1^2+1)}\right]-a_1x_2-a_0\frac{\lambda}{\eta}\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}(\gamma+\eta\,\mathrm{Arsh}\,\tilde{x}_1)+ \qquad (15)$$

$$+\frac{n(t)}{\eta\sqrt{\tilde{x}_1^2+1}}\left\{\left[\frac{x_2}{\lambda(\tilde{x}_1^2+1)}\left(\frac{3}{\lambda}\frac{\tilde{x}_1^3x_2^2}{\tilde{x}_1^2+1}+\frac{x_2^2}{\lambda^2}-3\tilde{x}_1^2x_3-\frac{4\tilde{x}_1x_2^2}{\lambda}\right)+\tilde{x}_1x_3+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{3x_2x_3}{\lambda}\right]b_3+3(b_1-b_2a_3+b_3a_3^2-b_3a_2)\tilde{x}_1x_2+$$

$$+\lambda(b_0-b_1a_3+b_2a_3^2-b_3a_3^3-b_2a_2-b_3a_1)(\tilde{x}_1^2+1)+$$

$$\left.+3(b_2-b_3a_3)\left(\frac{x_2^2}{\lambda}+\tilde{x}_1x_3-\frac{3}{\lambda}\frac{\tilde{x}_1^3x_2^2}{\tilde{x}_1^2+1}\right)\right\},$$

которые следует понимать в смысле Ито. СДУ (15) — это нелинейная математическая модель экстремального морского волнения, позволяющая учитывать реальное негауссовское распределение волновых ординат и двухпиковую форму частотного спектра, а также осуществлять компьютерное моделирование интенсивного морского волнения при оценке прочности и мореходности судов.

Выводы

Предложенный метод построения математических моделей нелинейных СДС на основе нормализованных СДУ, формул для стохастического дифференциала (формулы Ито), нормализующих многомерных преобразований и преобразований, обратных к ним, позволяет получать математические модели случайных сигналов (процессов) в СДС в виде нелинейных СДУ в случае, когда эти сигналы отличаются от гауссовских.

Получены формулы для определения коэффициентов сноса и диффузии нелинейных СДУ на основе нормализованных СДУ, формулы для стохастического дифференциала (формулы Ито), а также формулы нормализующих многомерных преобразований и преобразований, обратных к ним. В качестве нормализирующего преобразования может быть применено многомерное преобразование Джонсона. В дальнейшем исследования планируется вести в направлении поиска новых нормализующих преобразований.

The method based on normalizing transformations is proposed for construction of mathematical models of nonlinear stochastic differential systems.

1. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. — М. : Наука, 1985. — 560 с.
2. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Теория стохастических систем: Учеб. пособие. — М. : Логос, 2000. — 1000 с.

3. *Приходько С. Б.* Методи побудови математичних моделей нормалізованих сигналів нелінійних стохастичних диференціальних систем // Математичне моделювання. — 2008. — № 2 (19). — С. 3—6. (Дніпродзержинськ).
4. *Приходько С. Б.* Структурна ідентифікація нелінійних стохастичних диференціальних систем на основі математичних моделей нормалізованих сигналів // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2009. — № 3 (84). — С. 86—92.
5. *Приходько С. Б.* Багатовимірні перетворення для нормалізації математичних моделей нелінійних стохастичних диференціальних систем // Математичне моделювання. — 2009. — № 1 (20). — С. 12—15. (Дніпродзержинськ).
6. *Soares C. G., Fonseca N., Pascoal R. et al.* Analysis of wave induced loads on a FPSO due to abnormal waves // Proc. of OMAE Specialty Conference on Integrity of Floating Production. Storage & Offloading (FPSO) Systems, August 30 — September 2, 2004, Houston, TX. — P.1—8.

Поступила 13.05.10;
после доработки 01.11.10

ПРИХОДЬКО Сергей Борисович, канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой программного обеспечения автоматизированных систем Национального университета кораблестроения им. адмирала Макарова. В 1981 г. окончил Николаевский кораблестроительный ин-т. Область научных исследований — моделирование стохастических систем, информационные технологии.