



УДК 004.021, 051.3

В. В. Аристов, канд. техн. наук
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15
тел. (044) 424-32-51, E-mail: vasily@aristov.com)

Математические модели итерационных соотношений обобщенных CORDIC-алгоритмов

Предложена аналитическая математическая модель для исследования дискретных итерационных процессов при формировании функциональных макроопераций (ФМ) обобщенными CORDIC-подобными алгоритмами. В модели объединены посредством системной канонической передаточной функции квазиопределяющие дифференциальные уравнения, используемые для описания ФМ, с итерационными формулами численного интегрирования. Получены коэффициенты канонических передаточных функций обобщенных разностно-дифференциальных формул численного интегрирования и приведен полнофункциональный вариант соответствующей программной процедуры на языке Maple с примерами.

Запропоновано аналітичну математичну модель для дослідження дискретних ітераційних процесів при формуванні функціональних макрооперацій (ФМ) узагальненими CORDIC-подібними алгоритмами. У моделі поєднано за допомогою системної канонічної передавальної функції квазівизначальні диференціальні рівняння, використовувані для опису ФМ, з ітераційними формулами чисельного інтегрування. Отримано коефіцієнти канонічних передавальних функцій узагальнених різницево-диференціальних формул чисельного інтегрування і наведено повнофункціональний варіант відповідної програмної процедури мовою Maple з прикладами.

К л ю ч е в ы е с л о в а: CORDIC, функциональные макрооперации, итерационные алгоритмы, математическая модель, канонические передаточные функции, интегро-алгоритмический метод, разностно-дифференциальные формулы интегрирования, микроповорот.

Алгоритм CORDIC (Coordinate Rotation Digital Computer) и соответствующая базовая структура аппаратной реализации предложены в работе [1] более 50-ти лет назад для вычисления тригонометрических функций и векторных преобразований в реальном масштабе времени в бортовых компьютерах. В 1962 г. в работе [2] представлена модификация алгоритма на основе пошагового масштабирования и сформулированы принципы псевдоумножения и псевдоделения. В 1971 г. в работе [3] сформулирован объединенный подход для различных вариантов CORDIC, что позволило расширить набор функций, вычисляемых по единому унифицированному

алгоритму: умножение, деление, $\sin()$, $\cos()$, $\text{tg}()$, $\text{arctg}()$, $\text{sh}()$, $\text{ch}()$, $\text{th}()$, $\text{arth}()$, $\ln()$, $\text{exp}()$ и $\text{sqr}()$. В 1972 г. этот вариант был использован фирмой Hewlett-Packard в микрокалькуляторах HP35.

Существенным достоинством CORDIC-алгоритмов является достаточность использования для их реализации следующих простейших операций: сложение-вычитание, сдвиги и считывание констант. При этом суммарное число операций линейно зависит от разрядности операндов.

В основу исходного CORDIC-алгоритма положена идея последовательных микроповоротов вектора на определенные наборы фиксированных углов. Например, записывая с помощью матрицы направляющих косинусов вращение вектора $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ на некоторый фиксированный угол

микроповорота α_{i+1} в декартовых координатах, получаем

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{i+1} & -\sin\alpha_{i+1} \\ \sin\alpha_{i+1} & \cos\alpha_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \cos\alpha_{i+1} \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg}\alpha_{i+1} \\ \text{tg}\alpha_{i+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = k_{i+1} \begin{pmatrix} 1 & -\xi_{i+1}H_{i+1} \\ \xi_{i+1}H_{i+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где для двоичного кодирования $H_{i+1} = 2^{-v_{i+1}}$ — коэффициент сдвига, $\xi_{i+1} = \pm 1$ — направление вращения, v_{i+1} — целые числа в пределах величины разрядности операндов. При этом угол действительного микроповорота $\alpha_{i+1} = \xi_{i+1} \text{arctg}(2^{-v_{i+1}})$, а деформация модуля вектора на текущем шаге

$$k_{i+1} = \sqrt{1+2^{-2v_{i+1}}}. \quad (2)$$

Независимость деформации вектора (2) от направления вращения ξ_{i+1} является положительным фактором, так как для фиксированных наборов v_{i+1} , удовлетворяющих сходимости по аргументу α с заданной точностью, результирующая деформация вектора имеет вид

$$K = \prod_i^n k_{i+1} = \sqrt{\prod_i^n (1+2^{-2v_{i+1}})} = \text{const.}$$

Поскольку условие $k_{i+1} = 1$ при всех микроповоротах для базового варианта CORDIC-алгоритма не выполняется, возникают проблемы со сходимостью, точностью, компенсацией масштабных коэффициентов и другие (см., например, [4, 5]), решению которых посвящены многочисленные последующие публикации [6].

На рис. 1 показано распределение публикаций о CORDIC в IEEE (кривая 1) за полвека. Определяются три периода: 20 лет (1959 — 1979 гг.) —

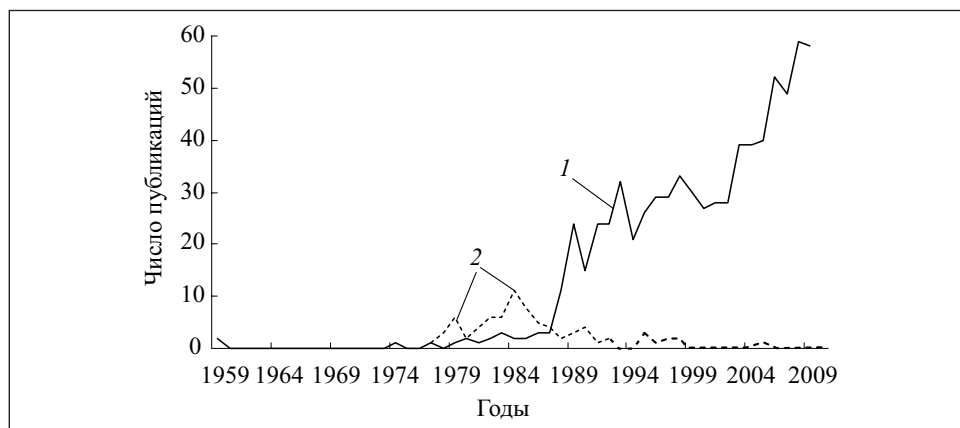


Рис. 1. Распределение публикаций о CORDIC-алгоритмах по годам: 1 — зарубежных авторов; 2 — автора данной статьи

невысокая интенсивность, следующие восемь лет (1980 — 1988 гг.) — повышенный интерес к данной тематике, а затем — резкое возрастание числа публикаций. Объясняется это в основном успехами в микроэлектронике и прогрессом в создании средств проектирования СБИС и программируемых матриц, а также расширяющимися потребностями в высокоэффективных программно-аппаратных разработках для различного использования (рис. 2). Действительно, практически во всех публикациях приведены один или несколько примеров практической реализации собственных разработок авторов.

Проанализированные публикации имеют следующие особенности.

1. Большая часть публикаций имеет инженерную основу. В них алгоритм CORDIC представлен в трактовке типа (1), изложенной в работах [1—3], т.е. рассматривается формируемый стандартный набор функций с учетом заданных ограничений, встраивается этот алгоритм в общую задачу приложения и разрабатывается общая архитектура.

2. Число публикаций математиков в этом направлении невелико. Может быть, именно это можно считать причиной того, что западные исследователи за полвека так и не достигли существенного прогресса в развитии алгоритмов CORDIC. Однако если бы они проявили интерес к русскоязычной научно-технической литературе, то получили бы мощную математическую, алгоритмическую и структурно-аппаратную основу для развития как алгоритма CORDIC, так и новых более эффективных CORDIC-подобных алгоритмов.

Согласно общей теории интегро-алгоритмических вычислений (Integration Algorithmic Computation (IAC)) алгоритмы CORDIC и его различ-

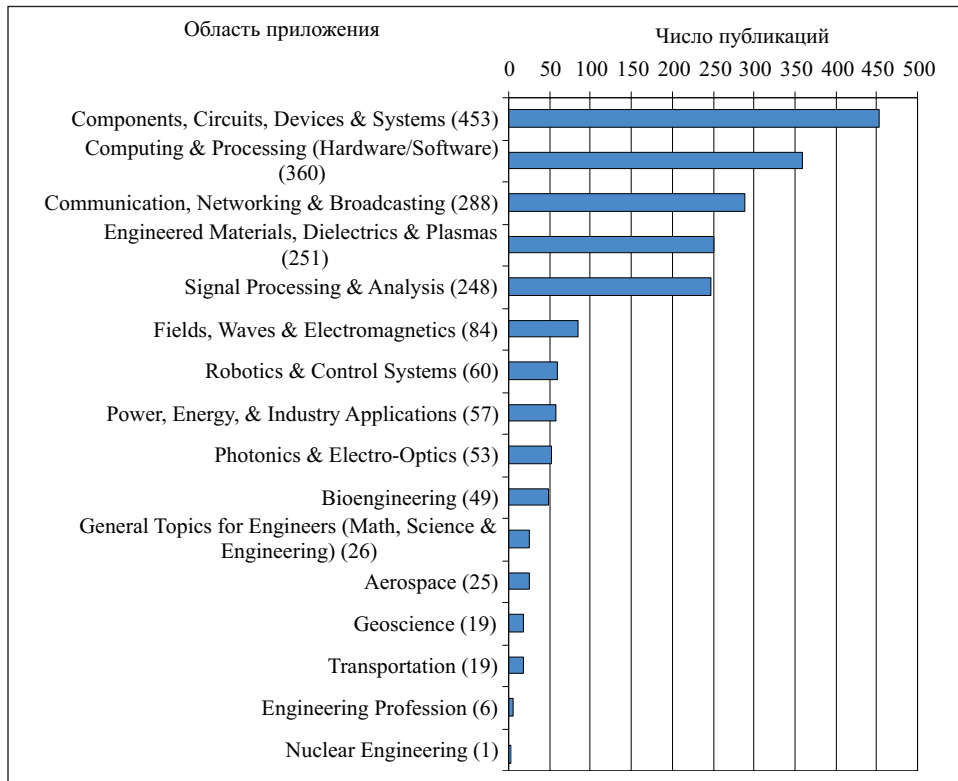


Рис. 2. Публикации о CORDIC по отраслям

ные модификации составляют лишь один из возможных вариантов реализации ИАС. В работах [4, 5 и др.] (см. рис. 1, кривая 2) изложена обобщенная теория алгоритмов Волдера, однако для формирования функциональных макроопераций (ФМ) отдано предпочтение исследованию иной реализации — разработанном автором интегро-алгоритмическому методу ИАМ, или IAM (Integration Algorithmic Method).

Согласно ИАС в основу CORDIC, по сути, положено итерационное соотношение Эйлера (явный вариант формулы прямоугольников)

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \xi_{i+1} 2^{-v_{i+1}} \mathbf{A} \mathbf{Y}_i, \quad (3)$$

где \mathbf{A} — матрица определяющих или квазиопределяющих дифференциальных уравнений ФМ (матрица коммутации) [4, 5]. Соотношение (3) достаточно простое для реализации, но обладает глобальным недостатком — фазовой погрешностью, приводящей к деформации вектора при формировании ФМ, в частности элементарных функций, что вызывает сложность при обеспечении точности, сходимости, компенсации искажений и других параметров.

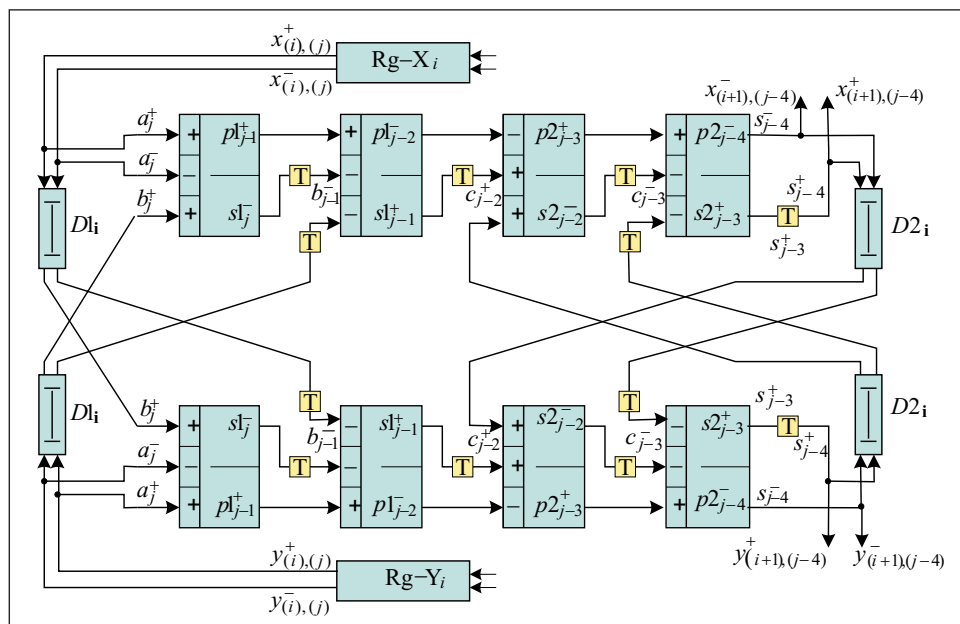


Рис. 3. Блок вращения вектора

В основу ИАМ положено неявное итерационное соотношение, соответствующее формуле трапеций

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \xi_{i+1} 2^{-(v_{i+1}+1)} \mathbf{A} (\mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_{i+1}). \quad (4)$$

Как и для CORDIC, для реализации ИАМ используется тот же простой набор операций: сложение-вычитание, сдвиги и считывание констант. Однако неявный вид этого соотношения требует особого подхода в организации структур и вычислений ФМ по данному методу. Ссылки на соответствующие разработки приведены в работах [4, 5].

При реализации формул трапеций не возникает фазовой погрешности, поэтому деформация вектора типа (2) отсутствует на любом допустимом шаге H_i и при любой задаваемой разрядности вычислений. На рис. 3 показана структура последовательного блока для выполнения микроповоротов вектора. Она содержит восемь одноразрядных полусумматоров Σ для двоичной избыточной знако-разрядной системы счисления (ИЗСС), четыре блока сдвига $D1$ и $D2$ на величину итерационного шага (в виде, например, последовательных регистров), два входных регистра, $Rg-X$ и $Rg-Y$, для исходных координат вектора и блоки триггерных задержек T . Выходные регистры не показаны, так как они могут быть совмещены с входными.

Задав, например, $X_i = 0,345$ (двоичный код 0.01011000010), $Y_i = 0,94$ (0.1111000010), шаг $H_i = -1/8$ и число двоичных разрядов результата 400, получим за один $(i + 1)$ -й итерационный шаг значение в ИЗСС нового вектора с точностью до 120 достоверных десятичных разрядов, а именно:

$$\begin{aligned}
 X_{i+1} &= 0.2252723735408560311284046692607003891050583657 \dots \\
 &\dots 8093385214007782101, \\
 Y_{i+1} &= 0.9756420233463035019455252918287937743190661478 \dots \\
 &\dots 0505836575875486381.
 \end{aligned}$$

Разрядность может быть выше и ниже или переменной, при этом она практически не влияет на аппаратуру и алгоритм. Несложно получить тысячу достоверных десятичных значений вектора за одну микросекунду на таком последовательном малозатратном блоке, арифметическая часть которого требует наличия на кристалле всего нескольких сотен вентиляей. Такой возможности для стандартных вариантов методов CORDIC и его модификаций не существует. Структуры модулей на основе ИАМ могут быть также параллельными, матричными, конвейерными и др.

Итерационные соотношения как для CORDIC (3), так и для ИАМ (4) относятся к классу формул численного интегрирования (ФЧИ). В работах [7 и др.] приведены иные итерационные соотношения для ФМ, однако при внимательном рассмотрении все они также могут быть представлены в виде ФЧИ. Далее будем рассматривать разностно-дифференциальные формулы (РДФ) численного интегрирования обобщенного типа [5, 8], частными вариантами которых являются и формулы Эйлера (прямоугольников), формулы трапеций и многие другие.

Существует множество формул этого класса, для которых, как и в ИАМ, отсутствует фазовая погрешность, а следовательно, и деформация вектора при формировании ФМ. Следует заметить, что при численном интегрировании систем дифференциальных уравнений (СДУ) требования к точности формул интегрирования отличаются от таковых при формировании ФМ. В первом случае необходимо обеспечить приемлемую точность на шаге без существенного накопления погрешности от шага к шагу, в то время как амплитудная составляющая погрешности ФЧИ при формировании ФМ практически не важна, так как вызываемая ею деформация по аргументу (итерационному шагу) компенсируется соответствующим выбором констант.

Постановка задачи. Исходные данные следующие.

1. Математическая модель ФМ в виде порождающей однородной СДУ с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}. \quad (5)$$

Состав ФМ определяется также дополнительным линейным функционалом относительно компонент вектора решения \mathbf{Y} и переменной интегрирования x , а квадратная $n \times n$ матрица \mathbf{A} удовлетворяет ограничению

$$\mathbf{A}^{2j+1} = q^j \mathbf{A}, \quad (6)$$

где j — натуральное число; q — скаляр. Если матрица \mathbf{A} неособенная, то $\mathbf{A}^2 = q \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная диагональная матрица.

2. Обобщенная многошаговая РДФ численного интегрирования (РДФЧИ) с учетом m производных высшего порядка $f_{i+1-l}^{(s)}$ ($m \geq s \geq 0$) имеет вид

$$y_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v y_{i+1-v} + \sum_{s=0}^m \sum_{l=l_0}^n c_{sl} H^{s+1} f_{i+1-l}^{(s)}, \quad (7)$$

где a_v и c_{sl} — весовые коэффициенты соответственно для значений интеграла y_{i+1-v} и производных $f_{i+1-l}^{(s)}$ при квантованных значениях независимой переменной $x = x_0 + (i + 1 - l)H$; \bar{n} и $(n - l_0)$ — число шагов H вдоль независимой переменной, на интервалах которой должны быть определены соответственно значения интеграла и подынтегральной функции с ее m производными; l_0 — число шагов H вперед от $(i + 1)$ -й точки квантования, при $l_0 > 0$ РДФ (5) являются явными, а при $l_0 \leq 0$ — неявными. Итерационное соотношение в виде ФЧИ (7) дискретизирует непрерывное по x решение (5).

3. Математическая модель итерационных процедур имеет вид трех взаимосвязанных канонических передаточных функций (КПФ) — прямой $S(p)$, системной $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ и обратной $S^{-1}(p)$ (или обратной системной $\mathbf{C}(\mathbf{A})$) КПФ [5]:

$$S(p) = \frac{1}{p} S_0(p) = \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r H^r p^r; \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \mathbf{B}_0(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \sum_{r=0}^{\infty} \rho_r H^r \mathbf{A}^r; \quad (9)$$

$$S^{-1}(p) = p S_0^{(-1)}(p) = p \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r H^r p^r; \quad (10)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \mathbf{C}_0(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r H^r \mathbf{A}^r, \quad (11)$$

где p — оператор дифференцирования в области изображений, $p^r \doteq \frac{d^r}{dx^r}$;

\mathbf{A} — матричный оператор дифференцирования однородной СДУ с постоянными коэффициентами; $\alpha_r, \rho_r, \gamma_r$ — безразмерные коэффициенты КПФ, характеризующие конкретную итерационную процедуру. Эти коэффициенты взаимосвязаны: определив α_r , можно найти и остальные.

Канонические передаточные функции (9) — (11) имеют множество вариантов применения [4, 5]. Так, амплитудно- и фазо-частотные характеристики ФЧИ можно получить из (8), заменив оператор дифференцирования p в соотношении $S_0(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r H^r p^r$ на комплексное значение $j\omega$, т.е. $S_0(j\omega) = A_0(\omega) e^{j\varphi_0(\omega)}$. При этом амплитудно-частотная характеристика принимает вид

$$A_0(\omega) = \sqrt{\left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r H^{2r} \omega^{2r} \alpha_{2r} \right)^2 + \left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r H^{2r+1} \omega^{2r+1} \alpha_{2r+1} \right)^2},$$

а фазо-частотная — соответственно

$$\varphi_0(\omega) = \arctg \frac{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r H^{2r+1} \omega^{2r+1} \alpha_{2r+1}}{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r H^{2r} \omega^{2r} \alpha_{2r}}.$$

На основе пунктов 1 — 3 необходимо разработать единую математическую модель и соответствующие программные средства для анализа параметров и получения данных о любой конкретной РД ФЧИ (7), используемой в качестве итерационного соотношения для формирования ФМ, а также показать, что решение порождающей системы (5) любого порядка n определяется матрично-векторным соотношением

$$\tilde{\mathbf{Y}} = e^{\tilde{x}\mathbf{A}} \left(\frac{(\beta_0 - 1)}{q} \mathbf{A}^2 - \mathbf{E} \right) \mathbf{Z},$$

а для неособенных матриц \mathbf{A} — соотношением $\tilde{\mathbf{Y}} = \beta_0 e^{\tilde{x}\mathbf{A}} \mathbf{Z}$, где

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^k H_i r_x(H_i), \quad \beta_0 = \prod_{i=1}^k \beta_i(H_i).$$

Здесь деформации аргумента $r_x(H_i)$ и вектора $\beta_i(H_i)$ — скалярные величины, зависящие от модуля величины итерационного шага H_i и параметров ФЧИ.

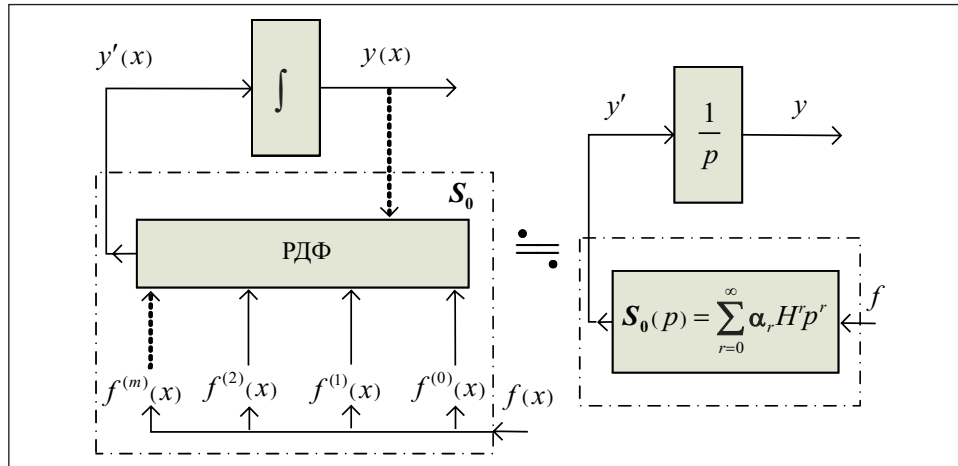


Рис. 4. Эквивалентирование процесса РДФ интегрирования в разомкнутом режиме

Математическая модель РДФ в режиме интегрирования функций. Соотношение (7) в общем случае справедливо при интегрировании независимых непрерывных функций $f^{(s)}(x)$, т.е. в режиме разомкнутого интегрирования (рис. 4). Однако в частном случае при $m = 0$, т.е. когда отсутствуют высшие производные от входного сигнала $f(x)$, искомая модель будет эквивалентной решению системы (5) (режим замкнутого интегрирования). Таким частным случаем формул (7) является класс формул

$$y_{i+1} = y_{i+1-\nu} + H \sum_{l=0}^n c_l f_{i+1-l}, \quad (12)$$

где f_{i+1-l} — значение подынтегральной функции в $(i + 1 - l)$ -й точке отсчета независимой переменной x ; ν — указатель интервала (νH), в котором определяется приращение интеграла Δy_{i+1} . В зависимости от величины ν и значений c_l из (12) получаем формулы Эйлера, трапеции, Симпсона, Адамса-Башфорта и др.

Определим коэффициенты α_r канонической передаточной функции (8) для РДФ (7). Для этого воспользуемся следующей схемой вывода соотношений.

1. Преобразовать в РДФ многоточечную зависимость y_{i+1} от подынтегральной функции и ее производных в односточечную, например относительно значения аргумента x_{i+1} , и определить точное соотношение для методической погрешности аппроксимации.

2. Представить блок ФЧИ в виде черного ящика, имеющего прямую каноническую передаточную функцию с неопределенными коэффициен-

тами α_r , определить y_{i+1} как результат преобразования подынтегральной функции этим блоком и найти соотношение для методической погрешности.

3. Найти условия адекватности обоих вариантов представления ФЧИ.

Преобразование РДФ. Полагаем, что подынтегральная функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $[x_{i+1-N}, x_{i+1}, x_{i+1-l_0}]$, где $N = \max\{\bar{n}, n\}$. В этом случае значения производных $f_{i+1-l}^{(s)}$ на предыдущих шагах могут быть представлены рядами Тейлора с учетом значений производных в точке x_{i+1} :

$$f_{i+1-l}^{(s)} = \sum_{r=0}^{\infty} f_{i+1}^{(r+s)} \frac{(-lH)^r}{r!}.$$

Подставив их в исходную формулу (7), запишем

$$y_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v y_{i+1-v} + \sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^m c_{sl} H^{s+1} \sum_{r=0}^{\infty} f_{i+1}^{(r+s)} \frac{(-lH)^r}{r!}.$$

После преобразования тройной суммы

$$\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^m c_{sl} \sum_{r=0}^{\infty} f_{i+1}^{(r+s)} \frac{(-l)^r}{r!} H^{r+s+1} = \sum_{r=0}^{\infty} f_{i+1}^{(r)} H^{r+1} \sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{S_m} c_{sl} \frac{(-l)^{r-s}}{(r-s)!},$$

где $S_m = \min\{r, s\}$, получаем

$$y_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v y_{i+1-v} + \sum_{r=0}^{\infty} f_{i+1}^{(r)} H^{r+1} \sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{S_m} c_{sl} \frac{(-l)^{r-s}}{(r-s)!}. \quad (13)$$

Соотношение (13) определяет результат численного интегрирования по РДФ (7) с учетом величин подынтегральной функции и ее производных в точке x_{i+1} .

Методическая погрешность аппроксимации. Локальная методическая погрешность на шаге интегрирования равна разности между полученным выражением y_{i+1} и точным значением интеграла y_{i+1}^T , т.е. $\xi_{i+1} = y_{i+1} - y_{i+1}^T$. Значение y_{i+1}^T в точке x_{i+1} найдем, используя взвешенную сумму точных частных приращений $\Delta^T y_{i+1-v} = y_{i+1}^T - y_{i+1-v}^T$:

$$y_{i+1}^T = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v y_{i+1}^T = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v (y_{i+1-v} + \Delta^T y_{i+1-v}) = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v y_{i+1-v} + \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \Delta^T y_{i+1-v}.$$

Записав их также в виде бесконечных рядов Тейлора

$$y_{i+1}^T = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \left(y_{(i+1-v)} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_{i+1}^{(r)} H^{r+1}}{(r+1)!} (-1)^r v^{r+1} \right) =$$

$$= \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v y_{i+1-v} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_{i+1}^{(r)} H^{r+1} (-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1},$$

видим, что ошибка метода интегрирования по формуле (7) в $(i+1)$ -й точке составляет

$$\xi_{i+1} = y_{i+1} - y_{i+1}^T = \sum_{r=0}^{\infty} f_{i+1}^{(r)} H^{r+1} \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r,m\}} \frac{c_{sl} (-1)^{r-s}}{(r-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} \right). \quad (14)$$

Преобразование посредством КПФ. На основе прямой КПФ

$$S(p) = \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r H^r p^r = \frac{\alpha_0}{p} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha_r}{\alpha_0} H^r p^r \right)$$

при коэффициенте усиления интегрирования $\alpha_0 = 1$ следует

$$S(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r H^r p^r,$$

где первый член определяет идеальный интеграл y_{i+1}^T , а второй — погрешность формулы интегрирования $\bar{\xi}_{i+1}$. Тогда запишем

$$y_{i+1} = y_{i+1}^T + \bar{\xi}_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \int_{x_{i+1-v}}^{x_{i+1}} f(x) dx + \bar{\xi}_{i+1},$$

где

$$\bar{\xi}_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \int_{x_{i+1-v}}^{x_{i+1}} \sum_{r=1}^{\infty} H^r \alpha_r f^{(r)}(x) dx = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \sum_{r=1}^{\infty} H^r \alpha_r \int_{x_{i+1-v}}^{x_{i+1}} f^{(r)}(x) dx.$$

Для бесконечно дифференцируемой подынтегральной функции $f(x)$

$$\int_{x_{i+1-v}}^{x_{i+1}} f^{(r)}(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{i+1}^{(r+k)}}{(k+1)!} (-1)^k v^{k+1} H^{k+1},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{i+1} &= \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \sum_{r=1}^{\infty} H^r \alpha_r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{i+1}^{(r+k)}}{(k+1)!} (-1)^k v^{k+1} H^{k+1} = \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} H^r \alpha_r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{i+1}^{(r+k)}}{(k+1)!} (-1)^k H^{k+1} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{k+1}, \end{aligned}$$

или, после изменения порядка суммирования,

$$\bar{\xi}_{i+1} = \sum_{r=1}^{\infty} f_{i+1}^{(r)} H^{r+1} \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1}. \quad (15)$$

Адекватность решений. Для адекватного описания ФЧИ (7) интегрирующим блоком с передаточной функцией (8) необходимо обеспечить равенство выражений (14) и (15), т.е. $\bar{\xi}_{i+1} = \xi_{i+1}$, так как они должны описывать одну и ту же методическую погрешность. Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} f_{i+1}^{(r)} H^{r+1} \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r,m\}} \frac{c_{sl} (-l)^{r-s}}{(r-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} \right) = \\ = \sum_{r=1}^{\infty} f_{i+1}^{(r)} H^{r+1} \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1}. \end{aligned}$$

Поскольку при $r = 0$ правая составляющая с учетом индексов суммы равна нулю, запишем

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} f_{i+1}^{(r)} H^{r+1} \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r,m\}} \frac{c_{sl} (-l)^{r-s}}{(r-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} - \right. \\ \left. - \sum_{s=0}^n \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Это равенство должно выполняться для всех натуральных значений $r = 0, 1, 2, \dots, \infty$ при произвольных величинах $f_{i+1}^{(r)}$, что обеспечивается соотношением

$$\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r,m\}} \frac{c_{sl} (-l)^{r-s}}{(r-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1} = 0, \quad (16)$$

из которого при $r = 0$ следует зависимость между коэффициентами РДФ (7)

$$\sum_{l=l_0}^n c_{0l} - \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v = 0,$$

а при иных целочисленных величинах $r \geq 1$ — равенство

$$\alpha_r \sum_{v=1}^n a_v v + \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^n a_v v^{s+1} =$$

$$= \sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r,m\}} \frac{c_{sl}(-l)^{r-s}}{(r-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^n a_v v^{r+1}.$$

При $\sum_{v=1}^n a_v v \neq 0$ получаем выражение для коэффициентов прямой КПФ:

$$\alpha_r = \frac{\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r,m\}} \frac{c_{sl}(-l)^{r-s}}{(r-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^n a_v v^{r+1} - \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^n a_v v^{s+1}}{\sum_{v=1}^n a_v v}. \quad (17)$$

Основная масса практически используемых ФЧИ описывается КПФ с коэффициентами α_r , удовлетворяющими полученному рекуррентному соотношению (17). Однако в исключительных случаях коэффициенты α_r КПФ могут быть таковы, что в соотношении (14) при значении s меньше некоторого значения r_0 будет $\sum_{v=1}^n a_v v^{s+1} = 0$. Поэтому разобьем систему

(16) на две подсистемы: для $r = 0, 1, \dots, r_0 - 1$

$$\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r,m\}} \frac{c_{sl}(-l)^{r-s}}{(r-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^n a_v v^{r+1} = 0,$$

для $r = r_0, r_0 + 1, \dots, \infty$

$$\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r,m\}} \frac{c_{sl}(-l)^{r-s}}{(r-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^n a_v v^{r+1} - \sum_{s=r_0-1}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1} = 0.$$

Из второй подсистемы после замены индексов следует рекуррентное соотношение для коэффициентов α_r КПФ РДФ (7):

$$\alpha_r = \frac{r_0!}{\sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r_0}} \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{S_m = \min\{r+r_0-1, m\}} \frac{c_{sl} l^{r+r_0-1-s} (-1)^{r-s}}{(r+r_0-1-s)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+r_0)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+r_0} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_{r-j} (-1)^j}{(r_0+j)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r_0+j} \right), \quad (18)$$

где $S_m = \min\{r+r_0-1, m\}$; r_0 — минимальное натуральное число ($r_0 > 0$), при котором $\sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r_0} \neq 0$. Задавая последовательно $r = 1, 2, 3, \dots$, согласно

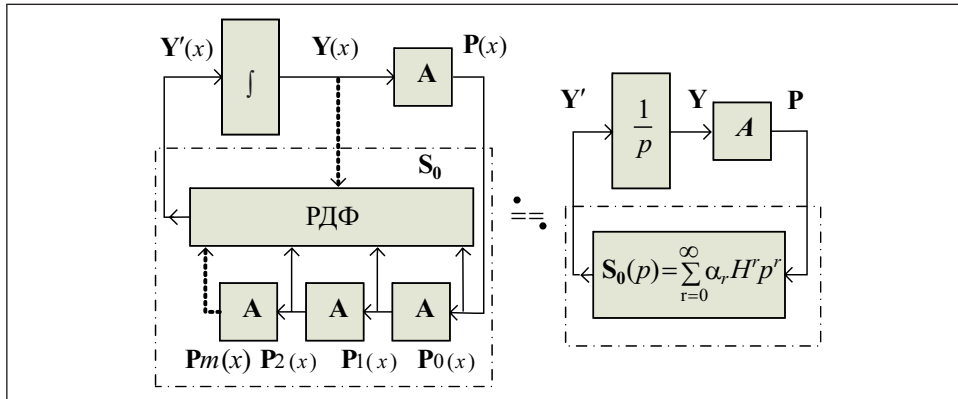


Рис. 5. Схема эквивалентирования процесса РДФ интегрирования для СДУ

(18) можно сформировать ряд коэффициентов α_r канонической передаточной функции (8). При разложении производных относительно другой точки аргумента, x_i , получим несколько иное, но адекватное (18), выражение для α_r .

Математическая модель РДФ для решения СДУ (5). Найдем коэффициенты КПФ РДФ при численном интегрировании однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5). В этом случае производными $f_{i+1-l}^{(s)}$ в (7) являются квантованные по независимому аргументу x векторные производные $P_{s_{i+1-l}}$, определяемые с помощью вектора Y_{i+1-l} и матричного оператора дифференцирования A : $P_{s_{i+1-l}} = A^{s+1} Y_{i+1-l}$.

На рис. 5 приведена «аналоговая» модель рассматриваемого процесса. Непрерывное решение Y этой модели в точках квантования x_k эквивалентно дискретным результатам численного интегрирования, определяемым РДФ

$$Y_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v Y_{i+1-v} = \sum_{s=0}^m \sum_{l=l_0}^n c_{sl} H^{s+1} P_{s_{i+1-l}}. \quad (19)$$

Погрешность интегрирования системы (5) обусловлена наличием блока S_0 с коэффициентом передачи, не равным единице и зависящим от параметров и структуры РДФ (19). Покажем, что для рассматриваемого случая параметры S_0 не зависят от матрицы A .

Преобразование РДФ. Выразим входную переменную $P_0(x)$ блока S_0 через коэффициенты $\gamma_{1r} = \gamma_r$ обратной КПФ этого блока и производные от подынтегральной функции $Y^{(r+1)}(x)$ на выходе S_0 :

$$P_0(x) = P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{1r} H^r Y^{(r+1)}(x).$$

Однако $\mathbf{P}_0(x) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(x)$, поэтому, опуская в дальнейшем для простоты независимый аргумент x , определяем производные в виде $\mathbf{P}_0^{(j)} = \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(j)}$. Тогда переменная $\mathbf{P}_1(x)$, отображающая первую производную от входной переменной $\mathbf{P}(x)$, имеет вид

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}\mathbf{P}_0 = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{1r} H^r \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(r+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{1r} H^r \mathbf{P}_0^{(r+1)}$$

и не адекватна производной $\mathbf{P}_0^{(1)}$ вследствие ненулевых значений коэффициентов γ_{1r} при $r > 0$. Далее, для переменной $\mathbf{P}_2(x)$ находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{P}_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{1r} H^r \mathbf{P}_0^{(r+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{1r} H^r \mathbf{P}_1^{(r+1)} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{1r} H^r \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{1\mu} H^{\mu} \mathbf{P}_0^{(r+\mu+2)} = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{2r} H^r \mathbf{P}_0^{(r+2)}, \end{aligned}$$

где $\gamma_{2r} = \sum_{\mu=0}^r \gamma_{1\mu} \gamma_{1(r-\mu)}$, и при $s = 0, 1, 2, \dots, m$ для $\mathbf{P}_s(x)$ справедливо следующее:

$$\mathbf{P}_s = \sum_{r=0}^{\infty} H^r \gamma_{sr} \mathbf{P}_0^{(r+s)}, \quad (20)$$

$$\gamma_{1r} = \gamma_r, \quad \gamma_{sr} = \sum_{\mu=0}^r \gamma_{(s-1)\mu} \gamma_{1(r-\mu)}, \quad \gamma_{0r} = \begin{cases} 1 & \text{при } r=0, \\ 0 & \text{при } r>0. \end{cases} \quad (21)$$

Между коэффициентами α_j и γ_j соответственно прямой (8) и обратной (10), (11) КПФ существует взаимосвязь

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_r = -\alpha_r - \sum_{s=1}^{r-1} \gamma_{r-s} \alpha_s, \quad (22)$$

или

$$\alpha_r = -\gamma_r - \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_{r-s} \gamma_s.$$

Для определения γ_r используем коэффициенты γ_j и α_j при $j \leq r$. Этих данных достаточно для вычисления составных коэффициентов γ_{sr} . Представив формулу (20) в виде

$$\mathbf{P}_s = \sum_{r=s}^{\infty} H^{r-s} \gamma_{s(r-s)} \mathbf{P}_0^{(r)},$$

убеждаемся, что при последовательной организации вычислений коэффициентов КДФ по мере возрастания r не возникает неявных рекурсий, так как для определения α_r используются уже вычисленные значения γ_{sj} при $j \leq r - s$. При $s = 0$ коэффициенты γ_{0r} являются константами 1, 0, 0, ... (см. (21)).

Выразим используемые в РДФ квантованные значения $\mathbf{P}_{s_{i+1-l}}$ через производные от $\mathbf{P}_{0_{i+1}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{s_{i+1-l}} &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(-lH)^\sigma \mathbf{P}_{s_{i+1}}^{(\sigma)}}{\sigma!} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(-lH)^\sigma}{\sigma!} \sum_{r=0}^{\infty} H^r \gamma_{sr} \mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r+s+\sigma)} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} H^r \mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r+s)} \sum_{\sigma=0}^r \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-\sigma}}{(r-\sigma)!}. \end{aligned}$$

Подставляя эту формулу в (19), после преобразований находим

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \mathbf{Y}_{i+1-v} + \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r)} H^{r+1} \sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!}.$$

Методическая погрешность аппроксимации. Локальная методическая погрешность на шаге интегрирования (или взвешенной совокупности \bar{n} шагов интегрирования) равна разности между полученным выражением \mathbf{Y}_{i+1} и точным значением интеграла \mathbf{Y}_{i+1}^T :

$$\xi_{i+1} = \mathbf{Y}_{i+1} - \mathbf{Y}_{i+1}^T.$$

Точное значение интеграла \mathbf{Y}_{i+1}^T в точке x_{i+1} найдем, используя взвешенную сумму точных частных приращений $\Delta^T \mathbf{Y}_{i+1-v} = \mathbf{Y}_{i+1}^T - \mathbf{Y}_{i+1-v}^T$,

$$\mathbf{Y}_{i+1}^T = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \mathbf{Y}_{i+1}^T = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v (\mathbf{Y}_{i+1-v} + \Delta^T \mathbf{Y}_{i+1-v}) = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \mathbf{Y}_{i+1-v} + \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \Delta^T \mathbf{Y}_{i+1-v},$$

записав их также в виде бесконечных рядов Тейлора

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+1}^T &= \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \left(\mathbf{Y}_{i+1-v} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r)} H^{r+1}}{(r+1)!} (-1)^r v^{r+1} \right) = \\ &= \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \mathbf{Y}_{i+1-v} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r)} H^{r+1} (-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1}. \end{aligned}$$

При этом ошибка метода интегрирования по РДФ (19) в $(i + 1)$ -й точке квантования составляет

$$\xi_{i+1} = \mathbf{Y}_{i+1} - \mathbf{Y}_{i+1}^T =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r)} H^{r+1} \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} \right). \quad (23)$$

Преобразование посредством КПФ. На основе прямой КПФ

$$S(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r H^r p^r,$$

где первый член определяет идеальный интеграл \mathbf{Y}_{i+1}^T , а второй — погрешность формулы интегрирования $\bar{\xi}_{i+1}$, запишем

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_{i+1}^T + \bar{\xi}_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \int_{x_{i+1-v}}^{x_{i+1}} \mathbf{P}_0(x) dx + \bar{\xi}_{i+1}.$$

При этом

$$\bar{\xi}_{i+1} = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \int_{x_{i+1-v}}^{x_{i+1}} \sum_{r=1}^{\infty} H^r \alpha_r \mathbf{P}_0^{(r)}(x) dx = \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \sum_{r=1}^{\infty} H^r \alpha_r \int_{x_{i+1-v}}^{x_{i+1}} \mathbf{P}_0^{(r)}(x) dx.$$

Для бесконечно дифференцируемой подынтегральной функции $\mathbf{P}_0(x)$ получаем

$$\int_{x_{i+1-v}}^{x_{i+1}} \mathbf{P}_0(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r+k)}}{(k+1)!} (-1)^k v^{k+1} H^{k+1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{i+1} &= \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v \sum_{r=1}^{\infty} H^r \alpha_r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r+k)}}{(k+1)!} (-1)^k v^{k+1} H^{k+1} = \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} H^r \alpha_r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r+k)}}{(k+1)!} (-1)^k H^{k+1} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{k+1}, \end{aligned}$$

или, после изменения порядка суммирования,

$$\bar{\xi}_{i+1} = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r)} H^{r+1} \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1}. \quad (24)$$

Адекватность решений. Для адекватного описания ФЧИ (19) интегрирующим блоком с передаточной функцией (8) необходимо обеспечить равенство выражений (23) и (24), т.е. $\bar{\xi}_{i+1} = \xi_{i+1}$, так как они должны описывать одну и ту же методическую погрешность. Поэтому приравняем правые части (23) и (24):

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r)} H^{r+1} & \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} \right) = \\ & = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r)} H^{r+1} \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1}. \end{aligned}$$

Поскольку при $r = 0$ правая составляющая с учетом индексов суммы равна нулю, можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}_{0_{i+1}}^{(r)} H^{r+1} & \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} - \right. \\ & \left. - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1} \right). \end{aligned}$$

При этом, как и в случае разомкнутого интегрирования, для всех натуральных значений $r = 0, 1, 2, \dots, \infty$ должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} \sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} - \\ - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Отсюда при $r = 0$ следует дополнительное соотношение между коэффициентами РДФ (19)

$$\sum_{l=l_0}^n c_{0l} - \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v = 0,$$

а при иных целочисленных $r \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha_r \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v + \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1} = \\ = \sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1}. \end{aligned}$$

При $\sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v \neq 0$ следует выражение для коэффициентов прямой КПФ:

$$\alpha_r = \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} - \right.$$

$$- \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^n a_v v^{s+1} \Big/ \sum_{v=1}^n a_v v.$$

Однако коэффициенты α_r таковы, что в соотношении (24) при s меньше некоторого значения r_0 сумма $\sum_{v=1}^n a_v v^{s+1}$ может быть равной нулю. Поэтому разобьем систему (25) на две подсистемы: для $r = 0, 1, \dots, r_0 - 1$

$$\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} = 0,$$

для $r = r_0, r_0 + 1, \dots, \infty$

$$\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{s_m=\min\{r, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r-s} \gamma_{s\sigma} \frac{(-l)^{r-s-\sigma}}{(r-s-\sigma)!} + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+1} -$$

$$- \sum_{s=r_0-1}^{r-1} \frac{\alpha_{r-s}}{(s+1)!} (-1)^s \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{s+1} = 0.$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение для коэффициентов α_r КДФ РДФ интегрирования (19) при решении СДУ

$$\alpha_r = \frac{r_0!}{\sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r_0}} \left(\sum_{l=l_0}^n \sum_{s=0}^{\min\{r+r_0-1, m\}} c_{sl} \sum_{\sigma=0}^{r+r_0-1-s} \gamma_{s\sigma} \frac{l^{r+r_0-1-s-\sigma} (-1)^{r-s-\sigma}}{(r+r_0-1-s-\sigma)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{r+1}}{(r+r_0)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r+r_0} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_{r-j} (-1)^j}{(r_0+j)!} \sum_{v=1}^{\bar{n}} a_v v^{r_0+j} \right). \quad (26)$$

Математическая модель итерационных соотношений формирования ФМ. Квазиопределяющими уравнениями некоторого набора операторов $W_i\{\mathbf{Z}, S, v\}$, $i \in \{1, m\}$, назовем совокупность порождающих уравнений в общем случае другого набора операторов $Y_j\{\mathbf{Z}, x\}$, $j \in \{1, N\}$, с такими дополнительными условиями $\varphi_k\{\mathbf{Y}, S, v, x\}$, $k \in \{1, p\}$, выполнение которых приводит к определению заданного набора операторов W_i . Наборы взаимосвязанных прямых и обратных тригонометрических, гиперболических, экспоненциальных и иных функций, т.е. ФМ, можно описать определяющими уравнениями (5) в совокупности с линейными функционалами (одним или несколькими) вида

$$\varphi_k = \eta_k x + \sum_j^N \eta_j Y_j - |\eta_s| S \Rightarrow 0.$$

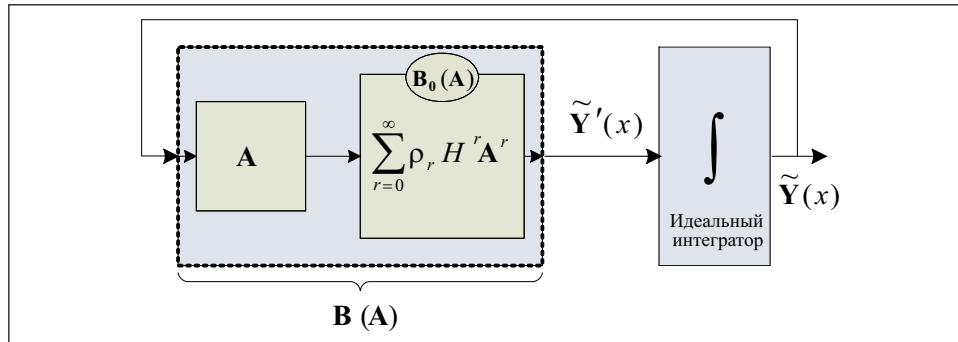


Рис. 6. Квазиэквивалентная непрерывная модель дискретного итерационного процесса

Поскольку решение уравнений (5) осуществляется приближенными итерационными ФЧИ класса РДФ (7) или (19) для СДУ, в общем случае значение \tilde{Y}_i не будет совпадать со значением Y в квантованных точках x_i независимой переменной. Непрерывная квазиэквивалентная система (рис. 6) порождающих дифференциальных уравнений для вектора \tilde{Y} находится с помощью системной КПФ (9):

$$\tilde{Y}' = B\tilde{Y}, \tilde{Y}(x_0) = Y_0 = Z, \quad (27)$$

где

$$B = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_r H^r A^{r+1}.$$

Коэффициенты ρ_r однозначно определяются с помощью коэффициентов α_r прямой КПФ (26) из рекуррентных соотношений

$$\rho_r = \rho_r(0), \rho_q(j) = \sum_{s=0}^{j+1} \rho_{q-1}(j+1-s) \alpha_s,$$

$$\rho_0(0) = 1, \rho_0(j)|_{j>0} = 0, q, j = 1, 2, 3, \dots$$

Изменив индексацию, эти рекуррентные соотношения можно записать в виде

$$\rho_r = \rho_r(r), \rho_{q+1}(q+j) = \rho_q(q+j) + \sum_{s=1}^j \rho_q(q+j-s) \alpha_s,$$

$$\rho_1(r) = \alpha_r, \rho_q(r)|_{q \geq r} = \rho_r = \rho_r(r), q, j = 1, 2, 3, \dots$$

Кривые, представленные на рис. 7, свидетельствуют о целесообразности применения термина квазиэквивалентность. Вектор решения полученной модели (27) является непрерывным и лишь в точках квантования x_i

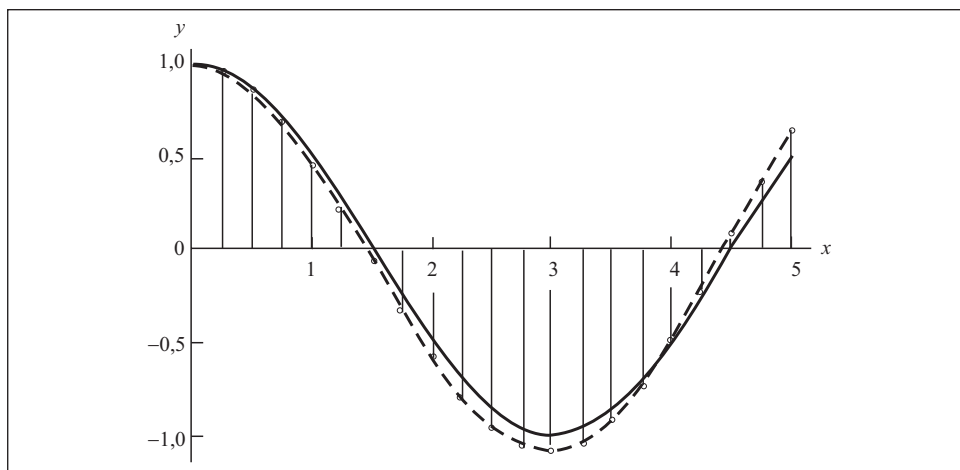


Рис. 7. Варианты решения : ——— — точное решение исходной системы (5); - - - — точное решение системы (27); вертикальные линии — численное решение системы (5)

совпадает с результатами вычислений системы (5) по итерационной ФЧИ. Следует заметить, что вследствие погрешности аппроксимации ФЧИ, используемой в качестве итерационного соотношения, эти результаты не совпадают с точным решением (5). Однако с помощью обратной системной КПФ (11) матрицу \mathbf{A} порождающей системы (5) можно преобразовать в матрицу \mathbf{C} и тогда численное решение новой порождающей системы $\mathbf{Y}' = \mathbf{C}\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0$ в точках квантования x_i будет совпадать с точным решением (5).

Поскольку итерации осуществляются с переменным шагом H_i , соответственно будет переменной и матрица $\mathbf{B}_i = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_r H_i^r \mathbf{A}^{r+1}$. Найдем решение квазиэквивалентной системы (27) при выполнении посредством ФЧИ k произвольных шагов H_i . Учитывая ограничение (6) и соответствующее ему равенство $\mathbf{A}^{2(j+1)} = q^j \mathbf{A}^2$, получаем

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{A} + \sum_{r=1}^{\infty} (\rho_{2r-1} H_i^{2r-1} \mathbf{A}^{2r} + \rho_{2r} H_i^{2r} \mathbf{A}^{2r+1}) = r_x(H_i) \mathbf{A} + r_\beta(H_i) \mathbf{A}^2,$$

где $r_\beta(H_i) = \sum_{r=1}^{\infty} \rho_{2r-1} H_i^{2r-1} q^{r-1}$ и коэффициент деформации аргумента имеет вид

$$r_x(H_i) = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{2r} H_i^{2r} q^r. \quad (28)$$

Тогда решение (27) на одном шаге H_i можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{H_i} = e^{\mathbf{B}_i H_i} \mathbf{Z} = e^{H_i r_x(H_i) \mathbf{A}} e^{H_i r_\beta(H_i) \mathbf{A}^2} \mathbf{Z}.$$

При выполнении k произвольных шагов оно принимает вид

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \prod_{i=1}^k e^{\mathbf{B}_i H_i} \mathbf{Z} = e^{\left(\sum_{i=1}^k H_i r_x(H_i)\right) \mathbf{A}} e^{\left(\sum_{i=1}^k H_i r_\beta(H_i)\right) \mathbf{A}^2} \mathbf{Z}.$$

Преобразуем вторую матричную экспоненту

$$\begin{aligned} e^{\left(\sum_{i=1}^k H_i r_\beta(H_i)\right) \mathbf{A}^2} &= \mathbf{E} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^k H_i r_\beta(H_i)\right)^s \mathbf{A}^{2s}}{s!} = \\ &= \mathbf{E} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^k H_i r_\beta(H_i)\right)^s q^{s-1} \mathbf{A}^2}{s!} = \mathbf{E} + \left(e^{\sum_{i=1}^k H_i q r_\beta(H_i)} - 1 \right) \frac{\mathbf{A}^2}{q} = \mathbf{E} + \frac{(\beta_0 - 1)}{q} \mathbf{A}^2, \end{aligned}$$

где β_0 — коэффициент деформации вектора,

$$\beta_0 = e^{\sum_{i=1}^k H_i q r_\beta(H_i)} = e^{\sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^{\infty} \rho_{2r-1} H_i^{2r} q^r}, \text{ или } \beta_0 = \prod_{i=1}^k e^{\sum_{r=1}^{\infty} \rho_{2r-1} q^r H_i^{2r}},$$

или

$$\beta_0 = \prod_{i=1}^k \prod_{r=1}^{\infty} e^{\rho_{2r-1} q^r H_i^{2r}}. \tag{29}$$

Тогда

$$\tilde{\mathbf{Y}} = e^{\tilde{x} \mathbf{A}} \left(\mathbf{E} + \frac{(\beta_0 - 1)}{q} \mathbf{A}^2 \right) \mathbf{Z}, \tag{30}$$

а для неособенных матриц \mathbf{A} , т.е., когда $\det \mathbf{A} \neq 0$, вектор решения системы (27) принимает вид

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \beta_0 e^{\tilde{x} \mathbf{A}} \mathbf{Z}, \tag{31}$$

где \tilde{x} — результирующий интервал по аргументу x ,

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^k H_i r_x(H_i) = \sum_{i=1}^k H_i \left(\sum_{r=0}^{\infty} \rho_{2r} H_i^{2r} q^r \right).$$

Итак, ненулевые значения коэффициентов ρ_r в канонической передаточной функции ФЧИ при $r > 0$ приводят к погрешностям вычисления


```

end do:
  B := seq(A[k], k = 1 .. Rm):
  CPF := "_____ Coefficient Alpha of CTF _____": FI := cat(Fa, "a"):
  save Frm, Var, CPF, B, FI: B := seq(Z[k], k = 1 .. Rm):
  CPF := "_____ Coefficient Gamma of CTF _____": FI := cat(Fa, "g"):
  save Frm, Var, CPF, B, FI:
  if cf=1 then Var:="          VARIANT  Y' = AY + F": Fa := cat(F, "A"): end if:
  if cf=2 then
    for k from 1 to Rm do for r from Rm by -1 to k do
      Pq[r]:=Pq[r]+sum(Pq[r-i]*A[i],i=1..r-k) end do: end do:
      B := seq(Pq[k], k = 1 .. Rm):
      CPF := "_____ Coefficient Ro of CTF _____": FI := cat(Fa, "r"):
      save Frm, Var, CPF, B, FI:
      Ktg:=evalf(exp(sum(Pq[2*i-1]*(-1)^i, i=1..Rm/2))):
      if Ktg < 0.25 then Ktg:=1: end if:
      Dth:=1: Dtg:=1:
      for r from 1 to Rm do
        H:=2^(-r): sq:=-1: A[r]:=exp(sum(Pq[2*i-1]*H^(2*i)*sq^i,i=1..Rm/2)):
        Dtg:=Dtg*A[r]:
        Zq[1,r]:=1+sum(Pq[2*i]*H^(2*i)*sq^i,i=1..Rm/2): sq:=1:
        Zq[2,r]:=1+sum(Pq[2*i]*H^(2*i)*sq^i,i=1..Rm/2):
        Z[r]:=exp(sum(Pq[2*i-1]*H^(2*i)*sq^i,i=1..Rm/2)):
        Dth:=Dth*Z[r]:
      end do:
      CPF := "_____ Constants of FDI _____":
      CPF1 := "+++++ Vector deformation constants, for q = -1":
      CPF2 := "+++++ Argument H deformation constants, for q = -1":
      CPF3 := "+++++ Vector deformation constants, for q = +1":
      CPF4 := "+++++ Argument H deformation constants, for q = +1":
      FI := cat(Fa, "C"): B:= seq(evalf[Dg](A[k]), k = 1 .. Rm):
      B2:=seq(evalf[Dg](Zq[1,k-Rm]), k = Rm+1 .. 2*Rm):
      B3:= seq(evalf[Dg](Z[k]), k = 1 .. Rm):
      B4:=seq( evalf[Dg](Zq[2,k-Rm]), k = Rm+1 .. 2*Rm): dDtg:=evalf[Dg](Ktg*Dtg^2):
      Dtg:=evalf[Dg](Ktg*Dtg): Ktg:=convert (1/Dtg,binary,Dg*3):
      dKtg:=convert(1/dDtg,binary,Dg*3):
      dDth:=evalf[Dg](Dth^2): Dth:=evalf[Dg](Dth): Kth:= convert(1/Dth,binary,Dg*3):
      dKth:=convert(1/dDth,binary,Dg*3):
      save Frm, CPF, CPF1, B, Dtg, Ktg, dDtg, dKtg, CPF2, B2, CPF3, B3, Dth, Kth, dDth,
      dKth, CPF4, B4, FI:
    end if:
  
```



```
end do;
if sn = 1 then print('CTF for this FDI and system DE don't be calculate!') end if;
end proc; # Dg – number of decimal digits for constants
```

Для расчета необходимо ввести блок данных с запуском процедуры. Например, для явного метода Эйлера

```
> Dg:=20: m:=0: n:=1: C:=array(1..m+2, 1..n+1,[[1,0],[0,1]]): Rm:=24: F:="..Exp1/RDF-
Euler.v": CRDF2cpf(n,m,Rm,C,F,Dg):
```

Если параметры перед запуском блока данных не заданы, то их следует поместить в этот блок. Здесь Dg — число достоверных десятичных разрядов при формировании деформаций вектора и аргумента; m — число учитываемых высших производных; n — шаговый интервал ФЧИ; C:=array(1..m+2, 1..n+1,[[1,0],[0,1]]) — массив коэффициентов при дискретных значениях интеграла, функции и ее m старших производных; Rm — число определяемых коэффициентов α_r , ρ_r и γ_r КПФ: F:="..Exp1/RDF-Euler.v" — шаблон имен экспортируемых файлов с относительным путем к каталогу; CRDF2cpf(n,m,Rm,C,F,Dg) — запуск процедуры.

В указанном каталоге формируется шесть файлов с именем RDF-Euler для данного примера. Коэффициенты α_r прямой КПФ располагаются в *.vFa и *.vAa (соответственно для интегрирования функций и решения СДУ), коэффициенты γ_r обратной КПФ (22) — в *.vFg и *.vAg и коэффициенты ρ_r системной КПФ — в файле *.vAr. В файл *.vAc записываются основные параметры итерационного соотношения на базе используемой ФЧИ при формировании ФМ, а именно для $q = -1$ (тригонометрические ФМ) и $q = +1$ (гиперболические и экспоненциальные ФМ):

- константы пошаговой деформации вектора;
- полная деформация вектора при выполнении базового набора итераций;
- компенсирующий множитель в двоичном коде;
- константы деформации шага H_i .

В качестве примера приведем второй блок данных с использованием разработанной процедуры Sint_CRDF для оптимального синтеза ФЧИ:

```
> m:=8:n:=1:Dg:=20:Rm:=24:C:=array(1..m+2,1..n+1,[]): W0:=[C[1,n+1],C[2,1], C[3,1],
C[4,1],C[4,2],C[5,1], C[6,1], C[6,2],C[7,1],C[8,1],C[9,1],C[10,1],C[10,2],NULL]:
Sint_CRDF(W0);F:="..Htr-8.v": CRDF2cpf(n,m,Rm,C,F,Dg):
# явная одношаговая ФЧИ Эйлера с 1,3,5 - 7 производными
```

Для CRDF2cpf компоненты массива C не задаются, а синтезируются указанной процедурой при заданном критерии оптимизации и наложении ограничений на применяемые квантованные производные. В данном

случае для формулы (19) списком $\mathbf{W0}$ задано (слева направо): $a_0 = 0$, $c_{00} = 0$, $c_{10} = 0$, $c_{20} = 0$, $c_{21} = 0$, $c_{30} = 0$, $c_{40} = 0$, $c_{41} = 0$, $c_{50} = 0$, $c_{60} = 0$, $c_{70} = 0$, $c_{80} = 0$, $c_{81} = 0$. В результате синтезируется формула с минимальной для заданных ограничений фазовой погрешностью

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + H\mathbf{P}_{0_i} + \frac{1}{2}H^2\mathbf{P}_{1_i} - \frac{1}{8}H^4\mathbf{P}_{3_i} + \frac{1}{16}H^6\mathbf{P}_{5_i} + \frac{7}{128}H^7\mathbf{P}_{6_i} + \frac{1}{64}H^8\mathbf{P}_{7_i},$$

где при решении СДУ (5) получаем $\mathbf{P}_{k_i} = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{Y}_i$. Синтезированные далее через массив \mathbf{C} компоненты автоматически передаются рассмотренной процедуре CRDF2srф вычисления коэффициентов КПФ и нахождения параметров процесса формирования ФМ.

С помощью процедуры CRDF2srф могут быть сформированы аналитические выражения для коэффициентов КПФ, если символично задавать или вообще не задавать те или иные коэффициенты ФЧИ.

Выводы.

1. CORDIC-подобные алгоритмы формирования ФМ эквивалентны итерационному решению порождающих СДУ посредством РД ФЧИ с определенными наборами шагов H_i .

2. Дискретный итерационный процесс формирования ФМ может быть представлен в виде СДУ, учитывающей как исходную СДУ, так и влияние ФЧИ на результат ее решения. Обобщенная непрерывная модель в точках квантования аргумента x_i адекватна результатам итерационных алгоритмов формирования ФМ, если не учитывать погрешности округления.

3. Для формирования ФМ аппаратно-ориентированными CORDIC-подобными алгоритмами следует учитывать характеристики используемых РДФ, так как фазовая погрешность приводит к весьма проблемному эффекту — деформации вектора решения.

4. В процедуру CRDF2srф вложена обобщенная модель РДФ и СДУ, поэтому она или ее модификации могут быть использованы для эффективного анализа как существующих, так и вновь разрабатываемых CORDIC-подобных алгоритмов.

A analytical mathematical model is proposed for investigating the discrete iterative processes under forming functional macrooperations (FM) of generalized CORDIC-like algorithms. The model unites through the system canonical transfer function the quasi-determining differential equations used to describe FM with iterative formulas of numerical integration. The coefficients of the canonical transfer functions of generalized difference-differential formulas of numerical integration are obtained, and complete functional variant of the corresponding software procedure in Maple language with examples is presented.

1. *Volder J.* The CORDIC Computing Technique// IRE Trans. Computers. — 1959. — Vol. EC-8. — P. 330—334.
2. *Meggit J. E.* Pseudo Division and Pseudo Multiplication processes// IBM Journal. — 1962, April. — P. 210—226.
3. *Walther J. S.* A unified algorithm for elementary functions // Joint computer conference proc.— 1971.— P. 379—385.
4. *Аристов В. В.* Интегро-алгоритмические вычисления. — Киев : Наук. думка, 1980. — 192 с.
5. *Аристов В. В.* Функциональные макрооперации: Основы итерационных алгоритмов. — Киев : Наук. думка, 1992. — 280 с.
6. <http://ieeexplore.ieee.org/search/freeseachresult.jsp?queryText=cordic&openedRefinements=&rowsPerPage=800>.
7. *Hekstra G.* Evaluation of Fast Rotation Methods//Journal of VLSI Signal Processing. — 2000. — Vol. 25, № 2. — P. 113—124.
8. *Аристов В. В.* Синтез разностно-дифференциальных формул численного интегрирования // Электрон. моделирование. — 1988. — **10**, № 4. — С. 3—12.

Поступила 01.12.10

АРИСТОВ Василий Васильевич, канд. техн. наук, вед. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория и реализация итерационных алгоритмов макроопераций, численные методы решения дифференциальных уравнений, схемотехника и архитектуры специализированных устройств, геоинформационные системы, радиотехника.

