
УДК 517.97:519.876

С. З. Кулиев, канд. физ.-мат. наук
Ин-т кибернетики НАН Азербайджана
(Азербайджан, AZ 1141, Баку, ул. Ф.Агаева, 9,
тел. (99412) 5100523, E-mail: azcopal@gmail.com)

Подход к идентификации коэффициентов нелинейных динамических объектов с сосредоточенными параметрами

Предложен подход к параметрической идентификации для класса нелинейных объектов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены формулы градиента функционала, позволяющие для получения значений параметров использовать итерационные методы оптимизации первого порядка. Приведены результаты численных экспериментов и примеры решения тестовых задач.

Запропоновано підхід до параметричної ідентифікації для класу нелінійних об'єктів, описуваних системами звичайних диференціальних рівнянь. Отримано формули градієнта функціонала, які дозволяють для отримання значень параметрів використовувати ітераційні методи оптимізації першого порядку. Наведено результати числових експериментів і приклади розв'язку тестових задач.

К л ю ч е в ы е с л о в а: динамический объект, параметрическая идентификация, фазовое состояние, градиент функционала, сопряженная система.

Исследуем задачу идентификации коэффициентов математической модели объекта, зависящих от его фазового состояния. Динамика объекта описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с обыкновенными производными.

Для численного решения задачи разобьем все множество возможных фазовых состояний объекта на конечное число подмножеств. В каждом подмножестве идентифицируемые коэффициенты будем искать на параметрически заданном классе функций в зависимости от состояния, определенном с помощью какого-либо набора базисных функций. В этом случае первоначальная задача сводится к определению постоянных параметров, участвующих в представлении коэффициентов.

Постановка задачи. Пусть математическая модель функционирования исследуемого динамического объекта описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), K(x(t))), \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор фазового состояния; $K(x(t)) \in R^r$ — идентифицируемая почти всюду непрерывно-дифференцируемая вектор-функция, определяющая коэффициенты математической модели; известная вектор-функция $f(.,.)$ является непрерывно-дифференцируемой по всем своим аргументам.

Предположим, что с целью идентификации коэффициентов математической модели процесса (1) проведены N независимых наблюдений за динамикой состояния объекта при различных начальных условиях

$$x^i(0) = x_0^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Могут быть рассмотрены компоненты вектора состояний или весь вектор в отдельные моменты времени,

$$x(t_{ij}; x_0^i) = x^{ij}, \quad t_{ij} \in (0, T], \quad j = 1, 2, \dots, M_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

в том числе в конечный момент времени T :

$$x(T; x_0^i) = x_T^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где M_i^1 — число моментов времени, в которых проводились наблюдения за состоянием объекта с начальным условием x_0^i . Также можно рассматривать состояния объекта при различных начальных условиях на некоторых интервалах времени:

$$\begin{aligned} x(t; x_0^i) &= y^{ij}(t), \quad t \in [\tau_{ij-1}, \tau_{ij}] \subset [0, T], \\ \tau_{ij-1} &< \tau_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, M_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

где M_i^2 — число временных интервалов, в которых проводились наблюдения за объектом при начальном состоянии x_0^i . Наблюдения могут быть и смешанного типа, т.е. как точечные (3) или (4), так и интервальные (5).

Определим (идентифицируем) неизвестные коэффициенты $K(x)$ системы (1) по результатам наблюдений вида (2)—(4) или (5). Качество идентификации будем оценивать с помощью критерия наименьших квадратов, причем для каждого типа наблюдения (3)—(5) критерии будут различны. Предположим, что проведены финальные наблюдения (4). Тогда критерий качества идентификации примет следующий вид:

$$J(K(x)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I^i(x(T; x_0^i, K(x))) + \varepsilon \|K(x) - \hat{K}(x)\|_{L_2^r}^2 \rightarrow \min_{K(x)}, \quad (6)$$

$$I^i(x(T; x_0^i, K(x))) = \|x(T; x_0^i, K(x)) - x_T^i\|_{R^n}^2, \quad (7)$$

где $x(t) = x(t; x_0, K(x))$ — решение задачи (1) при каком-либо начальном условии x_0 и коэффициентах, определяемых вектор-функцией $K(x) \in R^r$; $\varepsilon > 0$, $\hat{K}(x)$ — параметры регуляризации.

Решение задачи. Все множество фазовых состояний разобьем на конечное число подмножеств, в каждом из которых будем искать коэффициенты на параметрически заданном классе функций в зависимости от состояния, определенном с помощью базисных функций.

Обозначим через $X \subseteq R^n$ множество всевозможных фазовых состояний объекта $x(t)$ при всех допустимых значениях начальных условий и значений коэффициентов $K(x)$. Пусть заданное конечное число односвязных подмножеств (зон) $X^k \subset X$ таких, что

$$X \subseteq \bigcup_{v=1}^L X^v, \quad \text{int } X^i \cap \text{int } X^j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, L,$$

образует покрытие X . Смежные зоны X^i и X^j отделяются одна от другой границами с помощью заданных непрерывно-дифференцируемых функций

$$g(x) = (g^{ij}(x)), \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, L\},$$

таких, что

$$X^i = \{x \in R^n : g^{ij}(x) < 0\}, \\ X^j = \{x \in R^n : g^{ij}(x) > 0\},$$

причем $g^{ij}(x) = -g^{ji}(x)$. Следует заметить, что принадлежность самих границ каким-либо зонам не влияет на поведение системы в целом, а все приведенные ниже выкладки остаются в силе независимо от того, к каким зонам «приписывается» граница.

Предположим, что вектор-функции $f(.,.)$ и $g(.,.)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\|f(x, K)\| \leq m_1, \quad \|\nabla_x f(x, K)\| \leq m_2, \quad \|\nabla_K f(x, K)\| \leq m_3, \\ \|g(x)\| \leq m_4, \quad \|\nabla g(x)\| \leq m_5 \quad (8)$$

при $t \in [0, T]$ и $x \in X$, где $m_i, i = 1, 2, \dots, 5$, — заданные положительные числа.

Идентифицируемые коэффициенты $K(x) = (k_1(x), \dots, k_r(x))$ в каждой из зон $X^v, v = 1, 2, \dots, L$, определим в следующем виде:

$$K(x) = K^v(x) \in R^r, \quad k_s^v(x) = \sum_{i=1}^m p_{si}^v \varphi_i(x), \quad s = 1, 2, \dots, r, \\ p_{si}^v = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x \in X^v, \quad v = 1, 2, \dots, L, \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

где $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\dots,m$, — заданные линейно-независимые базисные функции; p_{si}^v — неизвестные постоянные параметры, определяющие идентифицируемые функции.

Как правило, коэффициенты $K(x)$ в реальных задачах должны удовлетворять ограничениям, обусловленным техническими и технологическими соображениями. Тогда параметры $p=(p^1, p^2, \dots, p^L)$, $p^v=(p_{11}^v, \dots, p_{1m}^v, \dots, p_{rm}^v)$, $v=1, 2, \dots, L$, также должны удовлетворять определенным соответствующим ограничениям.

Обозначим множества допустимых значений зональных параметров p^v , которые предполагаются замкнутыми и ограниченными, через $P^v \subset R^{r \times m}$, $v=1, 2, \dots, L$. В этом случае решение системы дифференциальных уравнений (1), определяющее текущее состояние процесса $x(t)$, зависит от начального состояния x_0 и зональных значений вектора параметров p , т.е. $x(t)=x(t; x_0, p)$.

Таким образом, исходная задача определения коэффициентов $K(x)$ (1) — (7) приведена к задаче определения постоянных параметров $p \in R^{L \times r \times m}$, с помощью которых аппроксимируются искомые коэффициенты. Точность аппроксимации можно улучшать, увеличивая число зон (подмножеств) X^v , $v=1, 2, \dots, L$, или число базисных функций $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$.

Критерий идентификации (6), (7) с учетом (9) примет вид

$$J(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I^i(x(T; x_0^i, p)) + \varepsilon \|p - \hat{p}\|_{R^{L \times r \times m}}^2 \rightarrow \min_{p \in P}, \quad (10)$$

$$I^i(x(T; x_0^i, p)) = \|x(T; x_0^i, p) - x_T^i\|_{R^n}^2,$$

где $x(t)=x(t; x_0, p)$ — решение задачи Коши (1) при допустимом заданном векторе параметров p и начальном состоянии x_0 с учетом (9); \hat{p} — параметр регуляризации, соответствующий функции $\hat{K}(x)$ из (6).

Для обеспечения корректности постановки исследуемой задачи параметрической идентификации необходимо, чтобы соблюдалось определенное соотношение между числом наблюдений и числом идентифицируемых параметров. Например, в случае (9) при N наблюдениях за полным вектором начальных и конечных состояний объекта необходимо, чтобы выполнялось неравенство $N \geq L \times r \times m / n$.

Задачу (1), (2), (10) можно отнести к задачам параметрического оптимального управления. В то же время, эта задача, в силу того, что оптимизируется конечномерный вектор параметров p , может быть отнесена к задачам конечномерной оптимизации. Для ее решения можно использовать известные эффективные численные методы, в частности методы пер-

вого порядка, и стандартные программные средства [1, 2]. Для этого, как известно, необходимо получить формулы для вычисления компонент градиента целевого функционала (10) относительно компонент вектора $p - \nabla_p J(p)$, которые позволят также для рассматриваемых задач сформулировать необходимые условия оптимальности первого порядка относительно вектора параметров p .

Пусть p — допустимое значение параметра. Будем предполагать, что исходные данные и функции рассматриваемой задачи таковы, что для произвольных допустимых значений вектора p траектория системы, во-первых, не проходит через общие точки более чем двух смежных областей, во-вторых, попав на какую-либо границу раздела зон, никогда «не скользит» по ней, т.е. всегда выполняется условие

$$\left| (g_x^{ij*}(x(\bar{t}_{ij})), f(x(\bar{t}_{ij}), K^i(x))) \right| \geq \delta > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, L. \quad (11)$$

Здесь * — знак транспонирования; $\bar{t}_{ij} \in [0, T]$ — время попадания траектории на границу раздела зон, причем точка и время пересечения границы раздела устойчивы к малым изменениям параметров задачи. Условие (11) не принципиально, но в случае его невыполнения потребуются проведение дополнительных вычислений для участков траектории, находящихся на границе раздела зон.

Не нарушая общности рассуждений и используя дополнительные индексы переменных в получаемых формулах, рассмотрим случай, когда имеются всего две зоны фазового пространства, т.е. $L=2$ и $X = X^1 \cup X^2$ (верхние индексы у функции $g^{ij}(x)$ опустим). Важное значение имеет предположение о том, что эксперименты, а следовательно, и результаты наблюдений (4) независимы. Поэтому независимы и слагаемые в функционале (10). Тогда градиент функционала (10) находим в виде

$$\nabla_p J(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla_p I^i(x(T; x_0^i, p)) + 2\varepsilon(p - \hat{p}).$$

Далее для определения $\nabla J(p)$ получим формулы градиентов для отдельных слагаемых $\nabla_p I^i(x(T; x_0^i, p))$, опустив индекс i (т.е. считая, что число наблюдений $N=1$). Для этого получим формулу приращения целевого функционала (10) в результате приращения значений параметров p .

Предположим, что первый из аргументов вектора $p = (p^1, p^2)$ получил приращение: $\bar{p}^1 = p^1 + \Delta p^1$, т.е. изменились параметры, определяющие идентифицируемые коэффициенты $K^1(x)$ в первой зоне X^1 . Тогда

$$\bar{p}^1 = (p_{11}^1 + \Delta p_{11}^1, \dots, p_{rm}^1 + \Delta p_{rm}^1), \quad \Delta p^1 = (\Delta p_{11}^1, \Delta p_{12}^1, \dots, \Delta p_{rm}^1).$$

При этом $x(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), t \in [0, T]$, — соответствующие траектории, и ясно, что $\Delta x(0) = 0$.

Обозначим $K^1(x) = K^1(x) + \Delta K^1(x)$, где

$$\Delta K^1(x) = (\Delta k_1^1(x), \Delta k_2^1(x), \dots, \Delta k_r^1(x)),$$

$$\Delta k_s^1(x) = \sum_{i=1}^m \Delta p_{si}^1 \varphi_i(x), \quad s=1, 2, \dots, r.$$

Пусть $\bar{t} \in (0, T)$ — момент времени попадания траектории системы (1) на границу раздела зон X^1 и X^2 , которая задается уравнением $g(x) = 0$; $\bar{t} + \Delta \bar{t} \in (0, T)$ — момент времени попадания возмущенной траектории $\bar{x}(t)$ на границу раздела.

Рассмотрим случай, когда приращение времени попадания на поверхность разрыва положительно, т.е. $\Delta \bar{t} > 0$. Случай $\Delta \bar{t} < 0$ исследуется аналогично. Тогда функция $\Delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ с точностью до величин первого порядка малости будет решением задачи Коши относительно следующей системы уравнений:

$$\Delta \dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{df(x(t), K^1(x))}{dx} \Delta x(t) + \frac{\partial f(x(t), K^1(x))}{\partial K^1} \Delta K^1(x), & t \in (0, \bar{t}], \\ \frac{df(x(t), K^1(x))}{dx} \Delta x(t) + \frac{\partial f(x(t), K^1(x))}{\partial K^1} \Delta K^1(x) + \\ + f(x(t), K^1(x)) - f(x(t), K^2(x)), & t \in (\bar{t}, \bar{t} + \Delta \bar{t}], \\ \frac{df(x(t), K^2(x))}{dx} \Delta x(t), & t \in (\bar{t} + \Delta \bar{t}, T], \end{cases} \quad (12)$$

$$\Delta x(0) = 0.$$

Здесь использовано обозначение полной производной

$$\frac{df(x(t), K^v(x))}{dx} = \frac{\partial f(x(t), K^v(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x(t), K^v(x))}{\partial K^v} \frac{\partial K^v(x)}{\partial x}, \quad v=1, 2,$$

где элементы матрицы $\frac{\partial K^v(x)}{\partial x}$ размерности $(r \times n)$ определяются, следуя (9), так:

$$\frac{\partial k_s^v(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m p_{si}^v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad s=1, 2, \dots, r.$$

Получим зависимость приращения времени $\Delta \bar{t}$ попадания на границу раздела зон от приращения траектории $\Delta x(t)$. При условии, что \bar{t} и $\bar{t} + \Delta \bar{t}$ являются временами пересечения границы раздела зон для невозмущенной $x(t)$ и возмущенной $\bar{x}(t)$ траекторий, получаем

$$g(x(\bar{t})) = 0, \quad g(\bar{x}(\bar{t} + \Delta \bar{t})) = 0. \quad (13)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \bar{x}(\bar{t} + \Delta \bar{t}) &= x_0 + \int_0^{\bar{t} + \Delta \bar{t}} f(\bar{x}(t), \bar{K}^1) dt = \\ &= x_0 + \int_0^{\bar{t}} f(x(t) + \Delta x(t), K^1 + \Delta K^1) dt + \\ &+ \int_{\bar{t}}^{\bar{t} + \Delta \bar{t}} f(x(t) + \Delta x(t), K^1 + \Delta K^1) dt, \end{aligned}$$

разлагая (13) в ряд Тейлора, с точностью до величин первого порядка малости можно получить следующее уравнение:

$$\Delta \bar{t} = - \frac{\frac{\partial g^*(x(\bar{t}))}{\partial x} \Delta x(\bar{t})}{\frac{\partial g^*(x(\bar{t}))}{\partial x} \left[f(x(\bar{t}), K^1) + \frac{df(x(\bar{t}), K^1)}{dx} \Delta x(\bar{t}) + \frac{\partial f(x(\bar{t}), K^1)}{\partial K^1} \Delta K^1 \right]}, \quad (14)$$

где $\tilde{t} = \bar{t} + \theta \Delta \bar{t}$, $0 \leq \theta < 1$.

Теперь оценим приращение $\Delta x(t)$ траектории системы (1) при $t \in (0, \bar{t}]$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (12). Из первого уравнения системы (12) следует, что

$$\Delta \dot{x}(t) = \int_0^t \left[\frac{df(x(\tau), K^1)}{dx} \Delta x(\tau) + \frac{\partial f(x(\tau), K^1)}{\partial K^1} \Delta K^1 \right] d\tau, \quad t \in (0, \bar{t}].$$

Отсюда, учитывая условия (8), получаем следующую оценку:

$$\|\Delta x(t)\| \leq m_2 \int_0^t \|\Delta x(\tau)\| d\tau + m_3 \|\Delta K^1\|, \quad t \in (0, \bar{t}].$$

Тогда согласно лемме Грануолла [3]

$$\|\Delta x(t)\| \leq m_2 \|\Delta K^1\| t e^{m_2 t}, \quad t \in (0, \bar{t}].$$

Таким образом, в момент времени $t = \bar{t}$ приращение траектории $\Delta x(t)$, вызванное приращением компонент вектора p^1 , удовлетворяет неравенству

$$\|\Delta x(\bar{t})\| \leq A_1 \|\Delta K^1\|, \quad (15)$$

где коэффициент $A_1 = \text{const}$ не зависит от $\Delta \bar{t}$, ΔK^1 .

Оценивая аналогично приращение $\Delta x(t)$ траектории системы (1) при $t \in (\bar{t}, \bar{t} + \Delta \bar{t}]$, с учетом второго уравнения системы (12) получаем

$$\|\Delta x(t)\| \leq A_2 \|\Delta K^1\|, \quad t \in (\bar{t}, \bar{t} + \Delta \bar{t}], \quad (16)$$

где коэффициент $A_2 = \text{const}$ не зависит от $\Delta \bar{t}$, ΔK^1 .

Для оценки $\Delta x(t)$ при $t \in (\bar{t} + \Delta \bar{t}, T]$, пользуясь третьим уравнением системы (12) с начальным условием, удовлетворяющим неравенству (16), получаем оценку, аналогичную (15) и (16), т.е.

$$\|\Delta x(t)\| \leq A_3 \|\Delta K^1\|, \quad t \in (\bar{t} + \Delta \bar{t}, T], \quad (17)$$

где коэффициент $A_3 = \text{const}$ не зависит от $\Delta \bar{t}$, ΔK^1 .

Следует заметить, что, пользуясь приведенной выше методикой, можно получить такие же оценки, как (14)—(17), для случая, когда приращение получает второй аргумент вектора $p = (p^1, p^2)$. Аналогичные результаты получим в случае наличия нескольких зон, т.е. для $L > 2$.

Оценим приращение функционала, полученного в результате приращения первой компоненты вектора $p = (p^1, p^2) - \bar{p} = (\bar{p}^1, \bar{p}^2) = (\bar{p}^1 + \Delta p^1, \bar{p}^2)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{p^1} I(x(T; x_0, p)) &= I(\bar{x}(T; x_0, \bar{p})) - I(x(T; x_0, p)) = \\ &= \frac{\partial I(x(T; x_0, p))}{\partial x} \Delta x(T) + o_1(\|\Delta x(T)\|). \end{aligned} \quad (18)$$

Выразим правую часть (18) через параметры системы (1). Для этого рассмотрим два тождества:

$$\begin{aligned} \psi^*(\bar{t} - \varepsilon) \Delta x(\bar{t} - \varepsilon) - \psi^*(0) \Delta x(0) &= \int_0^{\bar{t} - \varepsilon} \dot{\psi}^*(t) \Delta x(t) dt + \int_0^{\bar{t} - \varepsilon} \psi^*(t) \Delta \dot{x}(t) dt, \\ \psi^*(T) \Delta x(T) - \psi^*(\bar{t} + \varepsilon) \Delta x(\bar{t} + \varepsilon) &= \int_{\bar{t} + \varepsilon}^T \dot{\psi}^*(t) \Delta x(t) dt + \int_{\bar{t} + \varepsilon}^T \psi^*(t) \Delta \dot{x}(t) dt, \end{aligned}$$

где $\psi(t)$ — произвольная непрерывно-дифференцируемая функция всюду, кроме точки $t = \bar{t}$; $\varepsilon = \varepsilon(\Delta \bar{t})$ — некоторое малое число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < \Delta \bar{t}$ в предположении, что $\Delta \bar{t} > 0$. Складывая эти тождества, согласно условию $\Delta x(0) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \psi^*(T) \Delta x(T) &= \psi^*(\bar{t} + \varepsilon) \Delta x(\bar{t} + \varepsilon) - \psi^*(\bar{t} - \varepsilon) \Delta x(\bar{t} - \varepsilon) + \\ &+ \int_0^{\bar{t} - \varepsilon} \dot{\psi}^*(t) \Delta x(t) dt + \int_0^{\bar{t} - \varepsilon} \psi^*(t) \Delta \dot{x}(t) dt + \\ &+ \int_{\bar{t} + \varepsilon}^T \dot{\psi}^*(t) \Delta x(t) dt + \int_{\bar{t} + \varepsilon}^T \psi^*(t) \Delta \dot{x}(t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу произвольности функции $\psi(t)$ положим

$$\psi(T) = \frac{\partial I(x(T; x_0, p))}{\partial x}. \quad (20)$$

Тогда, с учетом (19) и (20), из (18) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{p^1} I(x(T; x_0, p)) &= \\ &= \int_0^{\bar{t} - \varepsilon} [\dot{\psi}^*(t) \Delta x(t) + \psi^*(t) \Delta \dot{x}(t)] dt - \psi^*(\bar{t} - \varepsilon) \Delta x(\bar{t} - \varepsilon) + \int_{\bar{t} + \varepsilon}^T [\dot{\psi}^*(t) \Delta x(t) + \\ &+ \psi^*(t) \Delta \dot{x}(t)] dt + \psi^*(\bar{t} + \varepsilon) \Delta x(\bar{t} + \varepsilon) + o_1(\|\Delta x(T)\|). \end{aligned} \quad (21)$$

Преобразуя интегралы, содержащие функцию $\Delta \dot{x}(t)$, учитывая соотношения (12) и произвольность функции $\psi(t)$, т.е. полагая, что она удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{\psi}^*(t) = \begin{cases} -\psi^*(t) \frac{df(x(t), K^1)}{dx}, & t \in [0, \bar{t} - 0), \\ -\psi^*(t) \frac{df(x(t), K^2)}{dx}, & t \in (\bar{t} + 0, T), \end{cases} \quad (22)$$

а также учитывая оценки (14)–(17), для приращения функционала получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{p^1} I(x(T; x_0, p)) &= \\ &= \int_0^{\bar{t}} \psi^*(t) \frac{df(x(t), K^1)}{\partial K^1} \Delta K^1 dt + o_1(\|\Delta x(T)\|) + o_2(\|\Delta K^1\|), \end{aligned}$$

где $o_2(\|\Delta K^1\|)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка по сравнению с $\|\Delta K^1\|$ при $\Delta K^1 \rightarrow 0$. Тогда для компонент градиента целевого функционала получаем следующие формулы:

$$\frac{dI(x(T; x_0, p))}{dp_{jl}^1} = \int_0^{\bar{t}} \psi^*(t) \frac{\partial f(x(t), K^1)}{\partial K^1} \frac{\partial K^1}{\partial p_{jl}^1} dt,$$

$$\frac{dI(x(T; x_0, p))}{dp_{jl}^2} = \int_{\bar{t}}^T \psi^*(t) \frac{\partial f(x(t), K^2)}{\partial K^2} \frac{\partial K^2}{\partial p_{jl}^2} dt,$$

$$\frac{\partial K^k}{\partial p_{jl}^k} = \varphi_l(x), \quad k=1, 2, \quad j=1, 2, \dots, r, \quad l=1, 2, \dots, m,$$

где функция $\psi(t)$ является решением сопряженной системы (22) с начальным условием (20), удовлетворяющая следующему условию скачка в момент времени пересечения траектории системы (1) границы раздела зон:

$$\psi(\bar{t}-0) = \psi(\bar{t}+0) - \frac{\partial g(x(\bar{t}))}{\partial x} v,$$

$$v = \frac{\psi^*(\bar{t}+0) [f(x(\bar{t}), K^1) - f(x(\bar{t}), K^2)]}{\frac{\partial g^*(x(\bar{t}))}{\partial x} f(x(\bar{t}), K^1)}.$$

В общем случае, при произвольном числе зон фазового пространства, т.е. при $L > 2$, получаем

$$\frac{d}{dp_{kj}^l} J(p) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dp_{kj}^l} I^i(x(T; x_0^i, p)) + 2\varepsilon (p_{kj}^l - \hat{p}_{kj}^l),$$

$$\frac{d}{dp_{kj}^l} I^i(x(T; x_0^i, p)) = \int_{\Pi_l(x_0^i; p)} \left[\psi^*(t; x_0^i, p) \frac{\partial f(x(t; x_0^i, p), K^l)}{\partial K^l} \frac{\partial K^l}{\partial p_{kj}^l} \right] dt,$$

$$\frac{\partial K^k}{\partial p_{jl}^k} = \varphi_l(x), \quad k=1, 2, \dots, L, \quad j=1, 2, \dots, r, \quad l=1, 2, \dots, m,$$

где $\Pi_l(x_0^i; p)$, $l=1, 2, \dots, L$, $i=1, 2, \dots, N$, — промежуток времени, в течение которого траектория с начальным условием x_0^i и значением параметров p

находилась в зоне X^l ; функция $\psi(t; x_0^i, p)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}^*(t; x_0^i, p) = -\psi^*(t; x_0^i, p) \frac{df(x(t), K^l)}{dx}, \quad t \in \Pi_l(x_0^i; p), \quad l=1, 2, \dots, L,$$

с начальным условием

$$\psi(T; x_0^i, p) = \frac{\partial I^i(x(T; x_0^i, p))}{\partial x},$$

удовлетворяющая следующему условию скачка в момент времени пересечения траектории системы (1) границ раздела зон:

$$\begin{aligned} \psi(\bar{t}_{lm}-0) &= \psi(\bar{t}_{lm}+0) - \frac{\partial g^{lm}(x(\bar{t}_{lm}))}{\partial x} v_{lm}, \\ v_{lm} &= \frac{\psi^*(\bar{t}_{lm}+0) [f(x(\bar{t}_{lm}), K^l) - f(x(\bar{t}_{lm}), K^m)]}{\frac{\partial g^{lm}(x(\bar{t}_{lm}))}{\partial x} f(x(\bar{t}_{lm}), K^l)}, \end{aligned}$$

где \bar{t}_{lm} — время попадания траектории системы (1) на границу раздела зон X^l и X^m , $l, m \in \{1, 2, \dots, L\}$.

Результаты численных экспериментов.

1. Рассмотрим модельную задачу параметрической идентификации объекта, описываемого следующим квазилинейным уравнением первого порядка:

$$\dot{x}(t) = K(x)x(t), \quad x(t) \in R, \quad t \in (0, T]. \quad (23)$$

Проведены наблюдения за начальными и конечными состояниями объекта с двадцатью различными траекториями, которые в качестве начальных состояний имеют значения $x_0^i = [0,05i]^T \in R$, $i=1, 2, \dots, 20$, а в качестве конечных состояний — значения (табл. 1), полученные в результате решения задачи Коши относительно (23) при $T=2$ и параметре динамической системы (23) $K(x) = \cos(2x)/(x^2+1)+1$.

Таблица 1

| i | x_0^i | i | x_0^i | i | x_0^i | i | x_0^i | i | x_0^i |
|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|
| 1 | 0,0000 | 2 | 1,3846 | 3 | 1,5994 | 4 | 1,7903 | 5 | 1,9758 |
| 6 | 2,1643 | 7 | 2,3604 | 8 | 2,5663 | 9 | 2,7827 | 10 | 3,0086 |
| 11 | 3,2425 | 12 | 3,4826 | 13 | 3,7278 | 14 | 3,9782 | 15 | 4,2356 |
| 16 | 4,5033 | 17 | 4,7858 | 18 | 5,0885 | 19 | 5,4163 | 20 | 5,7721 |

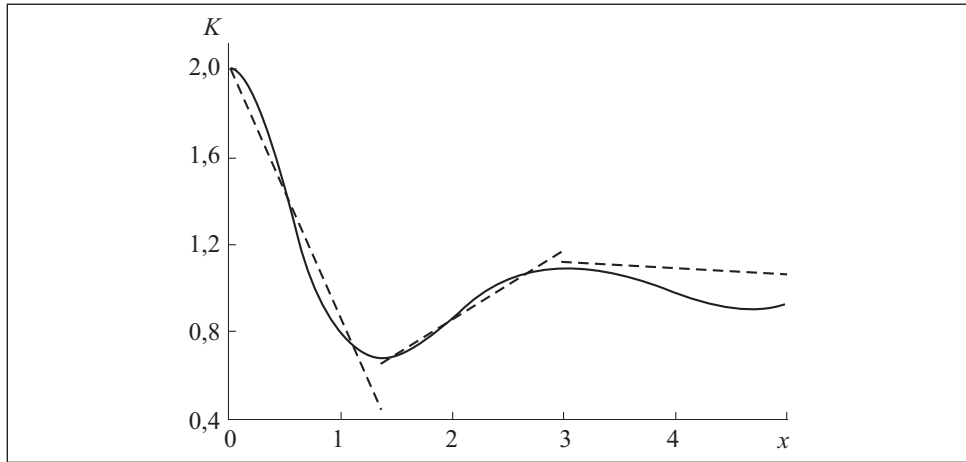


Рис. 1

Число зон фазового пространства в эксперименте $L = 3$. Зоны представляют собой множества

$$X^1 = \{x \in R : x(t) < 1,35\}, X^2 = \{x \in R : 1,35 \leq x(t) < 3\},$$

$$X^3 = \{x \in R : 3 \leq x(t)\}.$$

Восстанавливаемую функцию $K(x)$ будем искать на классе кусочно-линейных функций в виде

$$K(x) = p_1^v x(t) + p_2^v, \quad x(t) \in X^v,$$

$$t \in (0, T], \quad p_1^v = \text{const}, \quad i=1, 2, \quad v=1, 2, \dots, L.$$

Следовательно, вместо уравнения (23) будем рассматривать систему уравнений

$$\dot{x}(t) = (p_1^v x(t) + p_2^v) x(t), \quad x(t) \in X^v \subset R, \quad v=1, 2, \dots, L, \quad t \in (0, T]. \quad (24)$$

Для идентификации неизвестных параметров используем функционал

$$J(p) = \sum_{i=1}^{20} [x(T; x_0^i, p) - x_T^i]_R^2 + \varepsilon \|p\|_{R^{2L}}^2, \quad (25)$$

где ε — параметр регуляризации, значение которого уменьшалось до 10^{-5} ; $x(T; x_0^i, p)$ — решение системы уравнений (24) в момент времени $t = T$ при заданном начальном состоянии x_0^i ; $p = (p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^L; p_2^1, p_2^2, \dots, p_2^L)$. При решении прямой и сопряженной задач Коши для внутренних точек областей использован метод Рунге—Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0,02$.

В результате минимизации функционала (25) с применением метода сопряженных градиентов получены следующие значения оптимизируемого вектора и целевого функционала: значение целевого функционала $J^* \approx 0,0061$ при точности метода сопряженных градиентов $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и точности одномерной минимизации $\varepsilon_2 = 10^{-4}$; оптимальное значение вектора p при этом составляло $p^* = (-1,15597, 0,31639, -0,02623; 2,01836, 0,22656, 1,19401)$.

На рис. 1 представлены график функции $K(x) = \cos(2x)/(x^2 + 1) + 1$ (сплошная линия) и графики аппроксимирующих ее линейных функций (штриховые линии).

2. Рассмотрим модельную задачу параметрической идентификации объекта, описываемого следующей системой квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -K(x_1)x_1(t) - x_2(t), \\ t &\in (0, T]. \end{aligned} \quad (26)$$

Проведены наблюдения за начальным и конечным состояниями объекта с двадцать одной различной траекторией со следующими значениями начальных состояний:

$$(x_{10}^i, x_{20}^j) = [(-3+i; j), i=0, 1, \dots, 6, j=0, 1, 2]^T \in R^2.$$

Значения конечных состояний, приведенные в табл. 2, получены в результате решения задачи Коши относительно (26) при $T=2$ и параметре динамической системы (26) $K(x_1) = x_1^2$.

Восстанавливаемую функцию $K(x_1)$ будем искать на классе кусочно-линейных функций:

$$\begin{aligned} K(x_1) &= p_1^v x_1(t) + p_2^v, \quad x_1(t) \in X^v \subset R, \quad t \in (0, T], \\ p_1^v &= \text{const}, \quad i=1, 2, \quad v=1, 2, \dots, L. \end{aligned}$$

Таблица 2

| i | x_{10}^i | x_{20}^i | i | x_{10}^i | x_{20}^i | i | x_{10}^i | x_{20}^i |
|-----|------------|------------|-----|------------|------------|-----|------------|------------|
| 1 | 1,4065 | -1,4601 | 2 | 0,5619 | 0,5222 | 3 | -0,3687 | 0,2348 |
| 4 | 0,0000 | 0,0000 | 5 | 0,3687 | -0,2348 | 6 | -0,5619 | -0,5222 |
| 7 | -1,4065 | 1,4601 | 8 | 1,3376 | -1,5544 | 9 | 0,7170 | 0,4249 |
| 10 | 0,0895 | 0,1831 | 11 | 0,6919 | -0,0993 | 12 | 0,4274 | -0,4598 |
| 13 | -0,5802 | -0,6147 | 14 | -1,4490 | 1,4639 | 15 | 1,2296 | -1,7107 |
| 16 | 1,0000 | 0,1868 | 17 | 0,7693 | 0,1033 | 18 | 0,8153 | -0,5933 |
| 19 | 0,2612 | -0,6625 | 20 | -0,7336 | -0,7012 | 21 | -1,4700 | 1,5753 |

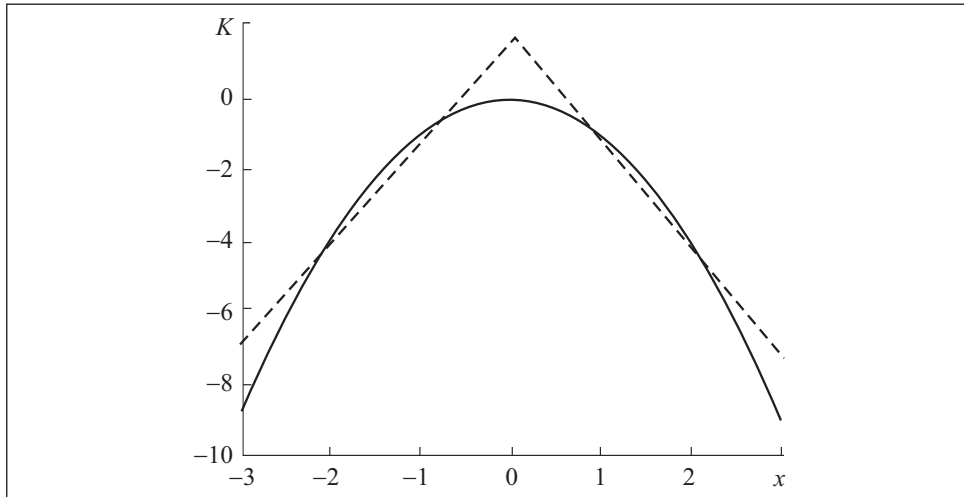


Рис. 2

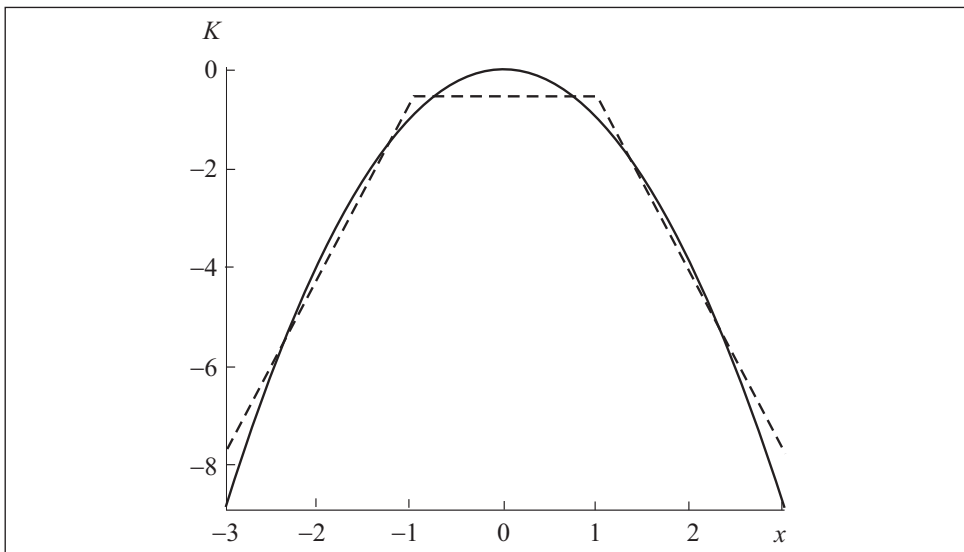


Рис. 3

Вместо уравнения (26) рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -(p_1^v x_1(t) + p_2^v) x_1(t) - x_2(t), \\ x_1(t) &\in X^v, \quad v=1, 2, \dots, L, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{27}$$

Для идентификации неизвестных параметров используем функционал

$$J(p) = \sum_{i=1}^{21} [x(T; x_0^i, p) - x_T^i]_{R^2}^2 + \varepsilon \|p\|_{R^{2L}}^2, \quad (28)$$

где ε — параметр регуляризации, значение которого уменьшалось до 10^{-5} ; $x(T; x_0^i, p)$ — решение системы уравнений (27) в момент времени $t = T$ при заданном начальном состоянии x_0^i . При решении прямой и сопряженной задач Коши для внутренних точек областей использован метод Рунге—Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0,02$.

Число зон в первом эксперименте $L = 2$. Зоны представляют собой множества

$$X^1 = \{x_1 \in R : x_1(t) < 0\}, \quad X^2 = \{x_1 \in R : 0 \leq x_1(t)\}.$$

В результате минимизации функционала (28) с применением метода сопряженных градиентов получены следующие значения оптимизируемого вектора и целевого функционала: $J^* \approx 0,4169$ при $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$; оптимальное значение вектора $p^* = (2,8221, -3,0072; 1,5242, 1,7744)$.

Число зон во втором эксперименте $L = 3$. Зоны представляют собой следующие множества:

$$X^1 = \{x_1 \in R : x_1(t) < -1\}, \quad X^2 = \{x_1 \in R : -1 \leq x_1(t) < 1\}, \quad X^3 = \{x_1 \in R : 1 \leq x_1(t)\}.$$

В результате минимизации целевого функционала с применением метода сопряженных градиентов получены следующие значения оптимизируемого вектора и целевого функционала: $J^* \approx 0,1075$ при $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$; оптимальное значение вектора $p^* = (3,5855, 0,0039, -3,5263; 2,9597, -0,5285, 2,8036)$.

На рис. 2 и 3 представлены графики функции $K(x_1) = x_1^2$ (сплошные линии) и аппроксимирующих ее линейных функций (штриховые линии) при наличии соответственно двух и трех зон.

Как видно из результатов численных экспериментов, при увеличении числа зон происходит значительное уменьшение оптимального значения целевого функционала.

Вывод. Полученные формулы для численного решения задач параметрической идентификации нелинейных динамических объектов позволяют использовать эффективные методы конечномерной оптимизации и стандартные программные средства.

An approach has been proposed to parametric identification for a class of nonlinear objects described by the systems of ordinary differential equations. Formulas of the functional gradient have been obtained which permit using the iterational methods of the first order optimization to obtain the values of the parameters. Results of numerical experiments and examples of solution of the test problems have been presented.

1. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
2. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М. : Наука, 1982. — 432 с.
3. *Gronwall T. H.* Note on the Derivative with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations // *Ann. Math.* — 1919. — **20**. — p. 292—296.
4. *Айда-заде К. Р., Кулиев С. З.* Об одной задаче синтеза управления для нелинейных систем // *Автоматика и вычислительная техника.* — 2005. — № 1. — С. 15—23.
5. *Krotov V. F.* *Global Methods in Optimal Control Theory.* — Marcel Dekker. Inc., 1995. — 399 p.
6. *Voiko I.* *Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design.* — Boston: Birkhäuser, 2009. — 215 p.
7. *Bengea S. C., Raymond A. C.* Optimal Control of Switching Systems // *Automatica.* — 2005. — **41**. — p.11—27.
8. *Capuzzo D. I., Evans L. C.* Optimal Switching for Ordinary Differential Equations // *SIAM J. on Control and Optimization.* — 1984. — **22** (1). — P.143—161.

Поступила 14.05.10;
после доработки 04.08.10

КУЛИЕВ Самир Закир, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Ин-та кибернетики НАН Азербайджана. В 2005 г. окончил Бакинский госуниверситет. Область научных исследований — численные методы оптимизации, оптимальное управление и их приложения.