

УДК 536.24

Долинский А.А.<sup>1</sup>, Авраменко А.А.<sup>1</sup>, Басок Б.И.<sup>1</sup>, Кузнецов А.В.<sup>2</sup><sup>1</sup> Институт технической теплофизики НАН Украины<sup>2</sup> Университет штата Северная Каролина, США

## БИОКОНВЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПРОЦЕССАХ ФЕРМЕНТАЦИИ

Вивчені теоретичні аспекти процесів ферментації. Запропоновано математичну модель біоконвекційних процесів, характерних для реальних ферментаторів. Отримано рішення даної моделі на основі теорії збурень. Представлено структури вторинних когерентних систем і полів концентрації мікроорганізмів.

Изучены теоретические аспекты процессов ферментации. Предложена математическая модель биоконвективных процессов, характерных для реальных ферментаторов. Получено решение данной модели на основе теории возмущений. Представлены структуры вторичных когерентных систем и полей концентрации микроорганизмов.

The theoretical aspects of fermentation processes are investigated. The mathematical model of bioconvective processes, which is reference for actual fermentation equipment is developed. The solution of the model is obtained on the basis of a perturbation theory. The structures of secondary coherent systems and fields of concentration of microorganisms are presented.

$C$  – концентрация кислорода;  
 $D$  – коэффициент диффузии;  
 $N$  – концентрация микроорганизмов;  
 $V, U, P, \Phi, S$  – амплитуды возмущений скорости, давления, концентраций кислорода и микроорганизмов;  
 $p$  – давление;  
 $t$  – время;  
 $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  
 $\gamma$  – параметр пропорциональности;  
 $\lambda$  – волновое число;

$\mu$  – динамическая вязкость базовой жидкости;  
 $\rho$  – плотность базовой жидкости;  
 $\nu$  – кинематическая вязкость базовой жидкости;  
 $x, y$  – декартовы координаты.

### Индексы:

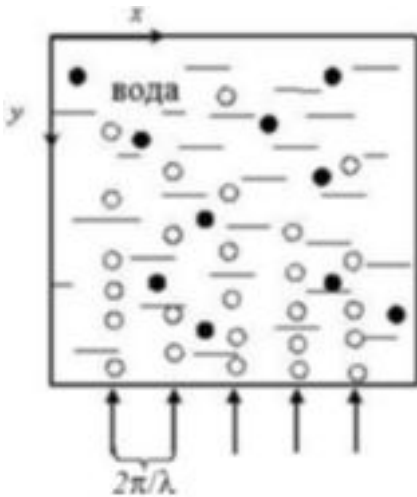
$0$  – начальная величина;  
 $*$  – возмущающая величина;  
 $C$  – относится к кислороду;  
 $N$  – относится к микроорганизмам.

Как известно, с технологической точки зрения процессы ферментации определяются главным образом эффективной подачей, последующим барботированием и интенсивным перемешиванием питательного воздуха с культуральной средой микроорганизмов. Собственно, процесс ферментации заключается в выращивании микроорганизмов при равномерном локальном распределении кислорода, дискретно поступающего в технологический объем среды. Поэтому для реализации ферментативных процессов эффективно применение метода дискретно-импульсного ввода и трансформации энергии (ДИВЭ) [1, 2]. Для выбора оптимальных режимных параметров ферментации важны исследования различных теплофизических явлений, сопровождающих данный процесс, в частности, конвективных эф-

фектов переноса вещества и энергии в базовой жидкости (как правило, воде), питающего кислорода, а также эффектов движения и массопереноса микроорганизмов – т.н. биоконвекции.

В данной работе теоретический анализ динамики развития процессов ферментации был основан на методах возмущений [3] исследования ламинарной биоконвекции [4] в чистой гомогенной жидкости, гидродинамика которой подчиняется уравнениям Навье-Стокса.

Постановка двумерной нестационарной задачи следующая. Предположим, что имеется замкнутая прямоугольная область, в которую по направлению  $y$  подается кислород, причем эта подача осуществляется с шагом  $2\pi/\lambda$  вдоль оси  $x$  (рис 1). В этом случае система уравнений, описывающих данную задачу, выглядит следующим образом:



**Рис. 1. Расчетная схема задачи, обозначения:**  
 ↑ – места ввода кислорода, ○ – включения кислорода, ● – микроорганизмы.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\operatorname{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{j} N \nu \Delta \rho g, \\ \frac{DN}{Dt} &= D_N \nabla^2 N, \\ \frac{DC}{Dt} &= D_C \nabla^2 C - \gamma N, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $D/Dt$  – субстанциальная (полная) производная по времени,  $\mathbf{j}$  – единичный вектор в направлении  $y$ .

Так как кислород подается вдоль оси  $y$ , то можно предполагать, что градиент концентрации начального распределения кислорода имеет вид  $(\nabla C_0)_y = \text{const}$ ,  $(\nabla C_0)_x = 0$ .

Согласно [5] этот постоянный градиент концентрации кислорода вызывает движение микроорганизмов со скоростью  $V_0$  в  $y$ -направлении. Предположим, что в начальный момент концентрация микроорганизмов равнялась  $N_0$ . После начала подачи кислорода из источников, которые расположены с шагом  $2\pi/\lambda$  вдоль оси  $x$ , возникают возмущения в поле концентрации кислорода. В этом случае удобно представить это поле в следующем виде:

$$C(t, x, y) = C_0(y) + \Phi(t, y) \sin(\lambda x), \quad (2)$$

предположив, что форма возмущений носит гармонический характер. В формуле (2)  $\Phi$  – это амплитуда возмущений. Возмущения поля кон-

центраций кислорода вызывают соответствующие возмущения полей скоростей и поля концентраций микроорганизмов.

С учетом (2) последнее уравнение системы (1) в линейном приближении можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \sin(\lambda x) + V_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin(\lambda x) + V^* (\nabla C_0)_y = \\ = D_C \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \lambda^2 \Phi \right) \sin(\lambda x) - \gamma N^*, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $V^*$  и  $N^*$  – это возмущающие компонента проекции скорости на ось  $y$  и концентрация микроорганизмов. Уравнение (3) показывает, что  $y$ -компонента скорости и концентрация микроорганизмов должны выглядеть следующим образом:

$$v(t, x, y) = V_0 + V^* = V_0 + V(t, y) \sin(\lambda x),$$

$$N(t, x, y) = N_0 + N^* = N_0 + S(t, y) \sin(\lambda x).$$

Подстановка этих соотношений в уравнения движения и неразрывности показывает, что

$$u(t, x, y) = U(t, y) \cos(\lambda x),$$

$$p(t, x, y) = p_0(x, y) + P(t, y) \sin(\lambda x),$$

где  $p_0$  – это невозмущенное давление.

Теперь имеются выражения для всех компонент возмущенных величин. На их основе система (1) в линейном приближении может быть преобразована к

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \lambda U = 0, \quad (4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + V_0 \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\lambda P + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \lambda^2 U \right), \quad (5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \lambda^2 V \right) + S \nu \Delta \rho g, \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V_0 \frac{\partial S}{\partial y} = D_N \left( \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \lambda^2 S \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + V (\nabla C_0)_y = D_C \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \lambda^2 \Phi \right) - \gamma S \quad (8)$$

Уравнение (7) может быть решено методом разделения переменных. Для этого представим функцию  $S(t, y)$  в виде произведения

$$S = F(y)G(t). \quad (9)$$

Подстановка (9) в (7) дает

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = \frac{1}{F} \left[ D_N \left( \frac{d^2 F}{dy^2} - \lambda^2 F \right) - V_0 \frac{dF}{dy} \right] = -q^2. \quad (10)$$

Параметр  $-q^2$  имеет отрицательные значения, потому что кислород поглощается микроорганизмами. Соответственно, это ведет к релаксации возмущений  $U$ ,  $V$ ,  $N$  и  $P$ .

После разделения переменных уравнение (10) преобразуется в систему двух уравнений

$$\frac{dG}{dt} + q^2 G = 0, \quad (11)$$

$$D_N \left( \frac{d^2 F}{dy^2} - \lambda^2 F \right) - V_0 \frac{dF}{dy} + q^2 F = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (11)

$$G = c_1 \exp(-q^2 t).$$

Решение уравнения (12) при следующих граничных условиях:

$$F = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (13)$$

$$F = B \quad \text{при} \quad y = h \quad (14)$$

имеет форму

$$F = B \frac{\exp(ny) - \exp(ky)}{\exp(nh) - \exp(kh)},$$

где

$$n = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 4D_N^2(\lambda^2 - q^2)}}{2D_N},$$

$$k = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 + 4D_N^2(\lambda^2 - q^2)}}{2D_N}.$$

Окончательный вид решения уравнения (7) следующий

$$S = B \frac{\exp(ny) - \exp(ky)}{\exp(nh) - \exp(kh)} \exp(-q^2 t).$$

Граничные условия (13), (14) означают, что поперечные возмущения концентрации кислорода (в  $x$ -направлении) вызывают аналогичные возмущения концентрации микроорганизмов. В свою очередь поперечные возмущения приводят к продольным возмущениям, которые начинаются в точке  $y = 0$ .

$$U(t, y) = J(y) \exp(-q^2 t), \quad V(t, y) = W(y) \exp(-q^2 t).$$

После исключения  $P$  и  $U$  получаем

$$\mu (W^{IV} - 2\lambda^2 W'' + \lambda^4 W) - \rho V_0 (W''' - \lambda^2 W') + \rho q^2 (W'' - \lambda^2 W) = B \frac{\exp(ny) - \exp(ky)}{\exp(nh) - \exp(kh)} \lambda^2 \nu \Delta \rho g.$$

Это уравнение можно представить таким образом:

$$D^2 W - \frac{\rho V_0}{\mu} D W' + \frac{\rho q^2}{\mu} D W = D \left( D W - \frac{\rho V_0}{\mu} W' + \frac{\rho q^2}{\mu} W \right) = \beta \frac{\exp(ny) - \exp(ky)}{\exp(nh) - \exp(kh)}, \quad (15)$$

где

$$D = \left( \frac{d^2}{dy^2} - \lambda^2 \right), \quad \beta = \frac{\lambda^2 \nu \Delta \rho g B}{\mu}.$$

Уравнение (15) – это неоднородное линейное уравнение 4-ого порядка. Его решение при следующих граничных условиях

$$W = 0, \quad W' = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$W = 0, \quad W' = 0 \quad \text{при} \quad y = h$$

имеет довольно громоздкий вид и поэтому не приводится. Используя полученные решения, можно рассчитать абсолютное значение скорости в каждой точке

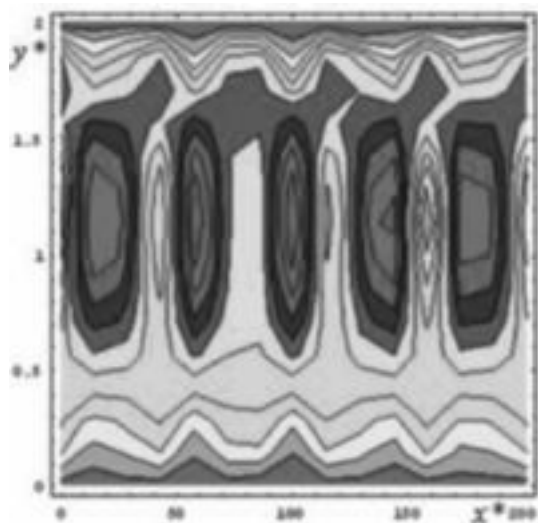
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{U^2(t, y) \cos^2(\lambda x) + V^2(t, y) \sin^2(\lambda x)},$$

а также функцию тока

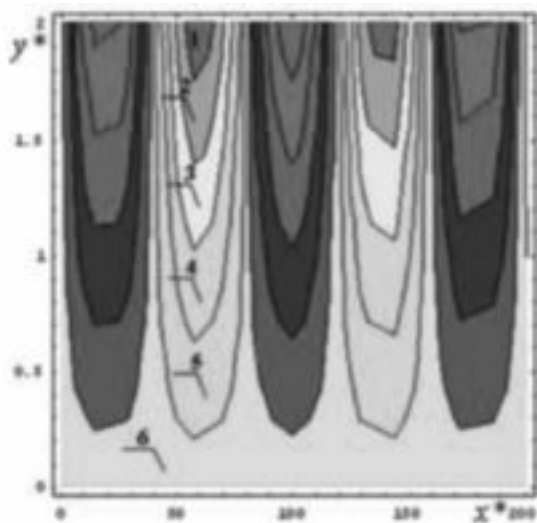
$$\Psi = \int U(t, y) \cos(\lambda x) dy = - \int V(t, y) \sin(\lambda x) dx.$$

Результаты расчетов полей скоростей и концентраций микроорганизмов показаны на рис. 2 при различном шаге расположения источников подачи кислорода.

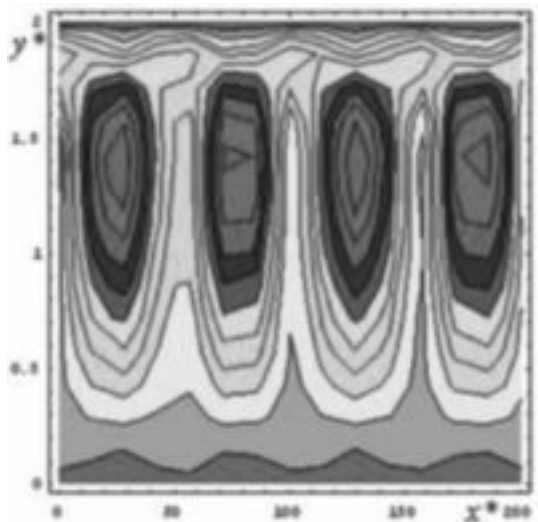
Рис. 2. показывает наличие вихревых структур, вызванных движением микроорганизмов. Смежные структуры вращаются в противоположных направлениях и создают поперечную вихревую цепочку. Механизм возникновения вихревых структур следующий. С началом процесса подачи кислорода в питательную среду возникают возмущения концентрации кислорода, которые, очевидно, близки к гармоническим. Хотя в реальных технологических режимах они могут иметь и более сложную форму. Как только возникают возмущения концентрации кислорода, микроор-



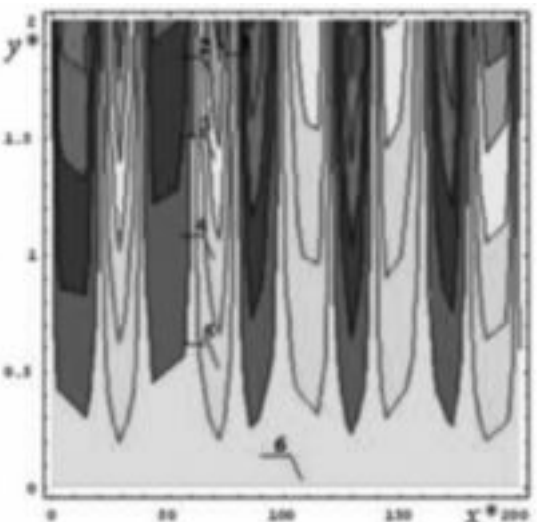
а)



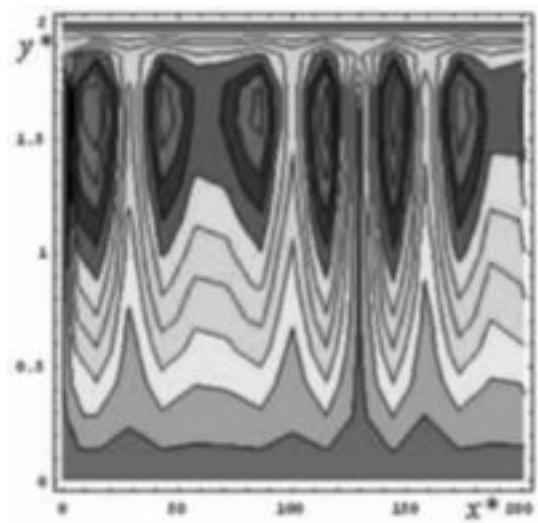
б)



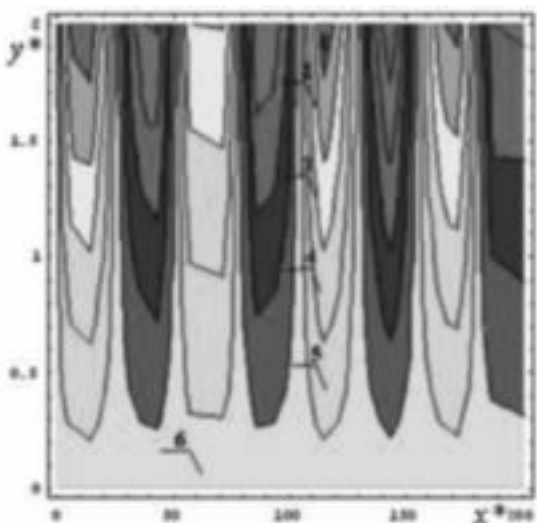
в)



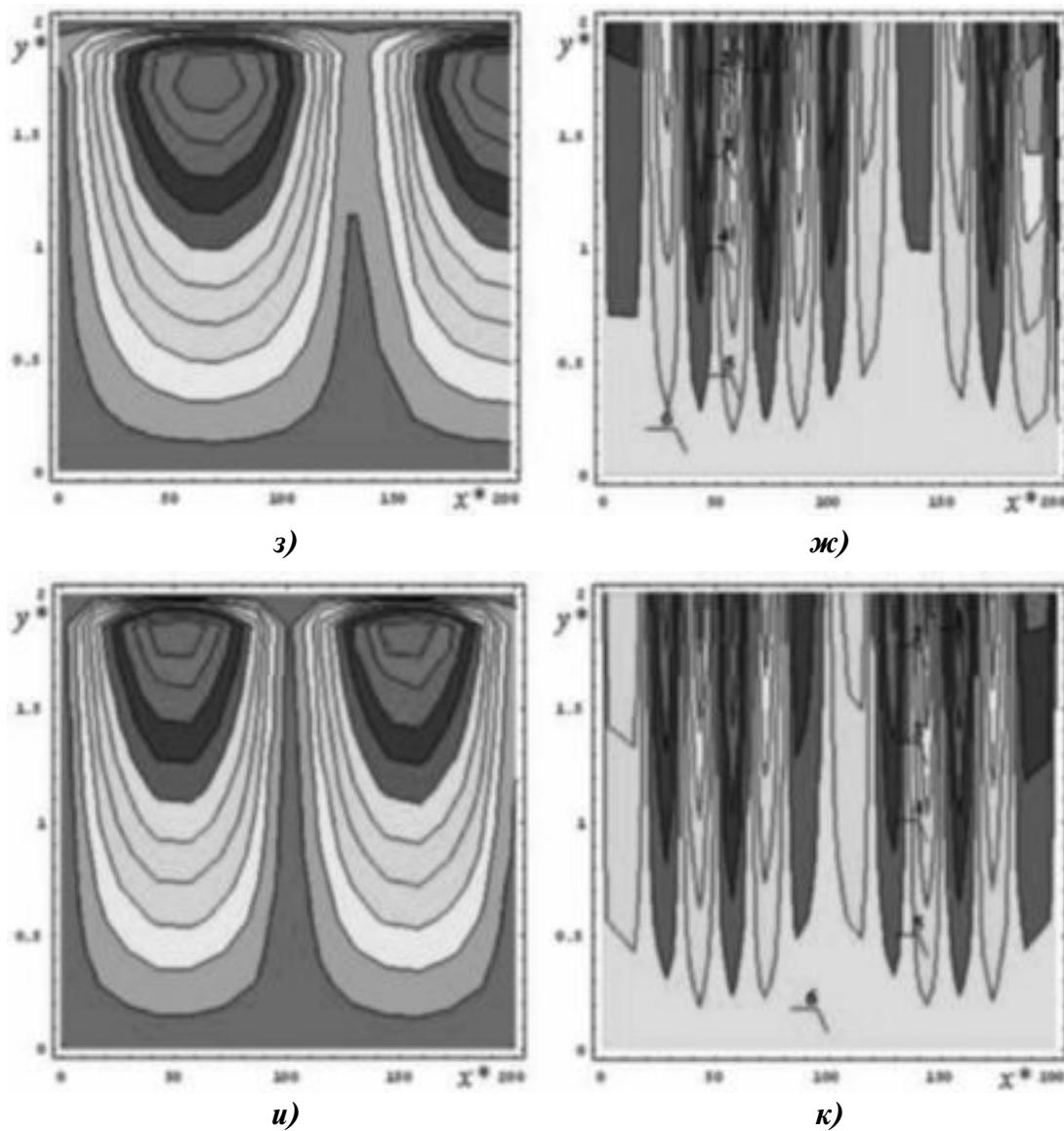
г)



д)



е)



**Рис. 2. Линии тока и поля концентраций микроорганизмов в процессе ферментации:**  
 а, в, д, з, и – линии тока; б, г, е, ж, к – поля концентраций микроорганизмов. а, б –  $\lambda = \pi$ ; в, г –  $\lambda = 2\pi$ ;  
 д, е –  $\lambda = 4\pi$ ; з, ж –  $\lambda = 8\pi$ ; и, к –  $\lambda = 64\pi$ . Поля значений соответствуют различной цветности:  
 1 –  $N^*/N_0 = 1$ ; 2 – 0,9; 3 – 0,7; 4 – 0,5; 5 – 0,3; 6 – 0,1 ( $x^*$  – нормированная относительно волнового  
 числа координата  $x$ ,  $y^*$  – нормированная относительно полувисоты координата  $y$ ).

ганизмы начинают свое движение в направлении градиента концентрации кислорода, стремясь попасть в область с более высокой его концентрацией, т.е. в верхнюю часть технологического объема. Благодаря сдвиговым напряжениям и центробежным градиентам давления, микроорганизмы, перемещаясь к областям с большей концентрацией кислорода, также вовлекают в спутное движение смежные микроорганизмы. При увеличении количества мик-

роорганизмов в нижней части объема происходит возрастание плотности нижних слоев среды (плотность микроорганизма немного больше плотности воды). Процесс повторяется периодически. Таким образом возникают когерентные вихревые структуры с противоположным направлением вращения. Это приводит к существенной интенсификации процессов перемешивания, а значит и к интенсификации массообмена, который и определяет эффективность ферментации.

Отметим, что периодически возникающие когерентные вихревые структуры в процессах ферментации играют определяющую роль рабочих элементов метода ДИВЭ, как и подобные вихревые образования при роторно-пульсационной и пневмо-пульсационной обработке дисперсных систем [2, 6].

*Исследования выполнены при финансовой поддержке NATO Collaborative Linkage Grant (СВР. NUKR.CLG 981714).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Долінський А.А. Принцип дискретно-імпульсного вводу енергії та його використання в технологічних процесах // Вісник АН УРСР. — 1984. — №1. — С. 39–46.
2. Накорчевский А.И., Басок Б.И. Гидродинамика и тепломассообмен в гетерогенных систе-

мах и пульсирующих потоках (под ред. А.А. Долинского). — Киев, Наукова думка, 2001. — 348 с.

3. Авраменко А. А., Басок Б. И., Кузнецов А. В. Групповые методы в теплофизике. — Киев: Наукова думка, 2003. — 484 с.

4. Авраменко А. А., Кузнецов А. В., Басок Б. И. Неустойчивость биоконвективных процессов в пористых средах // Промышленная теплотехника. — 2003. — 25. — №1. — С. 17 — 23.

5. Metcalfe A.M., Pedley T.J. Falling plumes in bacterial bioconvection // J. Fluid Mech. — 2001. — Vol. 445, — P. 121 — 149.

6. Б.И. Басок, Б.В. Давыденко, Ю.С. Кравченко, И.А. Пироженко. Исследование микроструктуры потока жидкости в роторно-пульсационном аппарате // Доповіді НАНУ. — 2003. — № 11. — С.71–76.

*Получено 14.09.2005 г.*

УДК 536.24:535.2

**БОРИСОВ И.И., ХАЛАТОВ А.А., КОБЗАРЬ С.Г.**

*Институт технической теплофизики НАН Украины*

## ТЕПЛООБМЕН И СОПРОТИВЛЕНИЕ В ЩЕЛЕВЫХ КАНАЛАХ СО СФЕРИЧЕСКИМИ УГЛУБЛЕНИЯМИ И ДИСТАНЦИОНИРУЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Наведено результати експериментального дослідження теплообміну і аеродинамічного опору в плоскому каналі із сферичними заглибинами та дистанційними елементами. Проаналізовано вплив дистанційних елементів на параметр аналогії Рейнольдса та теплогідрравлічну ефективність.

Представлены результаты экспериментального исследования теплообмена и аэродинамического сопротивления в плоском канале со сферическими углублениями и дистанционирующими элементами. Проанализировано влияние дистанционирующих элементов на параметр аналогии Рейнольдса и теплогидравлическую эффективность.

The results of heat transfer and hydraulic resistance experimental study in a narrow channel with inserts controlling the channel height elements are presented. The influence of this inserts on the Reynolds analogy factor and thermal-hydraulic efficiency is also analyzed.

$D$  — диаметр сферического углубления;  
 $d$  — диаметр сферического выступа;  
 $h$  — высота канала;  
 $f$  — коэффициент аэродинамического сопротивления;  
 $k_S$  — коэффициент увеличения поверхности;  
 $k_{Re}$  — параметр аналогии Рейнольдса;  
 $r_1$  — радиус ребра в поперечном разрезе;

$S_x$  — поперечный шаг сферических углублений;  
 $S_z$  — продольный шаг сферических углублений;  
 $Re$  — число Рейнольдса;  
 $Nu$  — число Нуссельта;  
 $\delta$  — глубина сферического углубления.

**Нижние индексы:**

0 — аэродинамические и теплообменные характеристики гладкого канала.